2022. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny

A feladatok megoldása

1. Azt mondjuk, hogy egy $A \subseteq \mathbb{Z}$ halmaz *szabálytalan*, ha tetszőleges $x, y \in A$ különböző elemeire nincs x-től és y-tól különböző $x + k(y - x)$ alakú eleme (ahol k egész). Létezik-e végtelen szabálytalan halmaz?

(Szabó Péter)

1. Megoldás: Megmutatjuk, hogy az $a_1 = 3!, a_2 = (3!)!, a_3 = \big((3!)!\big)!, \ldots$ (monoton növekedő) sorozat elemei megfelelő A halmazt alkotnak. A feladat feltétele azt követeli meg, hogy ha x és y két különböző A-beli elem, akkor abban a (mindkét irányban végtelen) számtani sorozatban, melynek x és y két szomszédos eleme, ne legyen további A-beli elem.

Tegyük fel tehát, hogy $a_i < a_j$ a sorozat két különböző eleme. Mivel $2a_i < (a_i)! = a_{i+1} \leq a_j$, ezért $a_i + k(a_j - a_i) < 0$, ha k negatív, a megadott A halmaz elemei viszont pozitívak. Ha $k > 1$, akkor $a_i + k(a_j - a_i) > a_j$. A sorozat a_j-nél nagyobb elemei oszthatók $(a_j - a_i)$-vel, ugyanis $a_j - a_i < a_j$ és $(a_j)! = a_{j+1} \mid a_m$, ha $j < m$. Az $a_i + k(a_j - a_i)$ sorozat elemei viszont a_i maradékot adnak modulo $a_j - a_i$ (ami $a_i < a_j - a_i$ miatt egy nemnulla maradék), így a_i-n és a_j-n kívül nincs másik eleme A-ban. □

2. Megoldás: Az $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ halmaz elemeit növekvő sorrendben fogjuk választani úgy, hogy az előírt szabálytalansági feltétel és $\sum_{1 \leq i < j < n} \frac{1}{a_j - a_i} < 1$ minden n-re teljesüljön. Legyen $a_1 = 1$. Ha már az $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ számokat kiválasztottuk, akkor a szabálytalansági feltétel eléréséhez kétféle számot nem választhatunk a_n-nek: (1) olyat, amelyik korábbi $x = a_i$ és $y = a_j$ által meghatározott számtani sorozatba esik, és (2) olyan a_n-et, amelyre egy korábbi kiválasztott a_i szám benne van az a_n és egy másik korábbi kiválasztott a_j szám által meghatározott számtani sorozatban. Az (1) feltétel a pozitív egész számok legfeljebb $\sum_{1 \leq i < j < n} \frac{1}{a_j - a_i} < 1$ sűrűségű részét zárja ki, a (2) feltétel pedig csak olyat, ami legfeljebb az eddigi legnagyobb kétszerese. Tehát tudunk mindkét feltételnek eleget tevő akármilyen nagy a_n-et választani, így azt is el tudjuk érni, hogy a $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{a_j - a_i} < 1$ feltétel továbbra is teljesüljön. □

3. Megoldás: Az $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ halmaz elemeit növekvő sorrendben fogjuk választani úgy, hogy $2 \cdot 10^i \leq a_i \leq 3 \cdot 10^i - 1$, tehát például az első elemre $20 \leq a_1 \leq 29$. Konkrétabban, választhatjuk őket úgy, hogy $2 \cdot 10^i \leq a_i \leq 3 \cdot 10^i - 1$ mindig teljesüljön, tehát például az első elemre $20 \leq a_1 \leq 29$. Ekkor $i < j$ esetén $a_j - a_i > 10^j$. Emiatt $1 \leq i, j < n$ esetén nem állhat fent, hogy $a_j = a_n + k(a_i - a_n) = a_i - (k-1)(a_n - a_i)$, mert $k = 1$ esetén a_i-t kapunk, míg $k \geq 2$-re $a_n + k(a_i - a_n)$ negatív; ha $k \leq 0$, akkor pedig $a_n + k(a_i - a_n) > a_n > a_j$. Vegyük észre, hogy $a_n = a_i + k(a_j - a_i) = a_j - (k-1)(a_i - a_j)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $(a_n - a_i)$-t osztja $a_j - a_i$. Ha már megválasztottuk $a_1, \ldots, a_{n-1}$-et, akkor a $[2 \cdot 10^n, 3 \cdot 10^n - 1]$ intervallumból fix $1 \leq i < j < n$ esetén ez legfeljebb $\left\lceil \frac{10^n}{10^j} \right\rceil = 10^{n-j}$ számra állhat fenn. Ezt összegezve az összes korábbi (i, j) számpárra legfeljebb $10^n \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{10^j} = 10^n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{j-1}{10^j} < 10^n$ szám van kizárva. Tehát minden lépésben meg tudjuk alkalmasan választani a következő számot. □

2. Legyen n pozitív egész. Tegyük fel, hogy az $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixok összege az egységmátrix, de $\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i$ szinguláris minden olyan esetben, amikor az $\alpha_i \in \mathbb{R}$ együtthatók közül legalább egy nulla.

a) Mutassuk meg, hogy $\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i$ nemszinguláris, ha $\alpha_i \neq 0$ minden i-re.

b) Lássuk be, hogy ha az A_i mátrixok szimmetrikusak, akkor mindegyikük rangja 1.

(Garamvölgyi Dániel)

Megoldás (kitűző):

a) Tekintsük az

$$f\colon (x_1,\dots,x_n)\mapsto \det(x_1A_1+\ldots+x_nA_n)$$

leképezést. Ez egy legfeljebb n-edfokú polinom az $x_1,\dots,x_n$ ismeretlenekben. Vegyük észre, hogy f-nek nem lehet olyan monomja, amelyben az egyik változó (például x_1) nem szerepel. Valóban, ekkor $f(0,x_2,\dots,x_n)$ nem az azonosan nulla polinom volna, így létezne $\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$, amelyre $f(0,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\neq 0$, amiből viszont következne, hogy $\sum_{i=2}^n \alpha_i A_i$ nemszinguláris. Mivel f legfeljebb n-edfokú, szükségképpen egyetlen monomból áll: $f(x_1,\dots,x_n)=\alpha x_1\cdots x_n$, ahol $\alpha=f(1,\dots,1)=1$ a feltétel szerint, és az állítás azonnal adódik.

b) Először megmutatjuk, hogy minden A_i pozitív szemidefinit. Rögzítsük i-t és tekintsük az $M_t=A_i+t\sum_{j\neq i}A_j$ mátrixot minden $0\le t\le 1$ paraméterre. Vegyük észre, hogy $M_0=A_i$, illetve $M_1=\sum_{i=1}^n A_i$ az egységmátrix. Ha M_0-nak lenne negatív sajátértéke, akkor folytonossági megfontolásokból következne, hogy valamely $0<t<1$ értékre M_t-nek lenne 0 sajátértéke, azaz szinguláris volna, ami ellentmondana az a) rész állításának. Következésképp $M_0=A_i$ pozitív szemidefinit.

A folytatásban használni fogjuk a következő egyszerű állítást: ha $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ pozitív szemidefinit mátrixok, akkor $A+B$ is pozitív szemidefinit és $\operatorname{Ker}(A+B)=\operatorname{Ker}(A)\cap\operatorname{Ker}(B)$. Legyen $X_i=\operatorname{Ker}(A_i)$; ekkor $X_1\cap\ldots\cap X_n=\operatorname{Ker}(A_1+\ldots+A_n)=\{0\}$, illetve bármely i indexre $\cap_{j\neq i}X_j=\operatorname{Ker}(\sum_{j\neq i}A_j)\neq\{0\}$. Ebből azonnal következik, hogy bármely i indexre X_i nem tartalmazhatja a $\cap_{j\neq i}X_j$ metszetet, speciálisan a $\cap_{j<i}X_j$ metszetet sem. Következésképp

$$\mathbb{R}^n\supsetneq X_1\supsetneq X_1\cap X_2\supsetneq\ldots\supsetneq X_1\cap\ldots\cap X_{n-1}\supsetneq\{0\},$$

amiből szükségképpen adódik, hogy $\dim(X_1)=n-1$, azaz A_1 rangja valóban 1. Természetesen hasonlóan belátható, hogy a többi mátrix rangja is 1.

2.1. Megjegyzés: A megoldás nem használja, hogy a mátrixok összege éppen az egységmátrix: az a) résznél elegendő feltenni az összegről, hogy nemszinguláris, a b) résznél pedig azt, hogy pozitív definit. Ha kihasználjuk, hogy az összeg az egységmátrix, akkor a b) résznél a következő egyszerűbb gondolatmenet is működik. Láttuk, hogy $\det(x_1A_1+\cdots+x_nA_n)=x_1\ldots x_n$. Speciálisan az $x_1A_1+\cdots+x_nA_n$ mátrix karakterisztikus polinomja: $\det(xI-x_1A_1-\cdots-x_nA_n)=\det(x(A_1+\cdots+A_n)-(x_1A_1+\cdots+x_nA_n))=\det((x-x_1)A_1+\cdots+(x-x_n)A_n)=(x-x_1)\ldots(x-x_n)$. Tehát $x_1=1$, $x_2=\cdots=x_n=0$ helyettesítéssel adódik, hogy A_1 karakterisztikus polinomja $x^{n-1}(x-1)$. Mivel A_1 szimmetrikus, ezért $\mathbb{R}$ fölött diagonalizálható, tehát diagonális alakjában a főátlóban egyetlen 1-es van, a többi 0, azaz rangja valóban 1. □

3. Legyen $f\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ olyan függvény, mely szomszédos egészek között lineáris, és $n=0,1,\ldots$ esetén

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{ha } 2\mid n,\\ 4^\ell+1, & \text{ha } 2\nmid n,\ 4^{\ell-1}\le n<4^\ell\ (\ell=1,2,\ldots).\end{cases}$$

Legyen $f^1(x)=f(x)$, és $f^k(x)=f\big(f^{k-1}(x)\big)$ minden $k\ge 2$ egészre. Határozzuk meg Lebesgue majdnem minden $x\in[0,\infty)$-re a $\liminf_{k\to\infty}f^k(x)$ és $\limsup_{k\to\infty}f^k(x)$ értékét.

(Buczolich Zoltán)

1. Megoldás (informális vázlat): Legyen $I_n=[n,n+1)$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Vegyük észre, hogy egy tetszőleges I_n egy véletlen pontját véve (uniform mérték szerint) $1/(4^k+1)$ valószínűséggel kerülünk az első 4^k+1 intervallum mindegyikébe, ahol $n<4^k+1$. Sőt, mindegyik intervallumban egyenletes eloszlás szerint kerülünk az újabb pontba. Ez egy bolyongást ad a nemnegatív egészeken. Erről a bolyongásról könnyen látszik, hogy akárhány lépés után csak N-től függő pozitív eséllyel bekerül bármely fix N szám fölé, tehát ez majdnem biztosan bekövetkezik végtelen sokszor, tehát $\limsup_{k\to\infty}f^k(x)>N$, amiből ∞.

A majdnem biztosan $\liminf_{k\to\infty} f^k(x) = 0$ igazolásához vizsgáljuk meg, hogy mi történik az I_0 intervallumon belül. Ha az $[1/5^{t+1}, 1/5^t)$ intervallum egy egyenletesen választott pontjából indulunk, akkor t lépés alatt eljutunk az $[1/5, 1)$ intervallumba, ahonnan ismét egyenletes eséllyel lépünk tovább az $I_1, \dots, I_4$ intervallumokba, mindegyiken belül egy uniform eloszlás szerinti pontba. Ez azt jelenti, hogy ahányszor a bolyongás I_0-ba jut I_0-n kívülről, minden alkalommal $1/5^t$ eséllyel $1/5^t$ alá fog menni, attól függetlenül, hogy ezt előzőleg mikor tette. Belátható, hogy a bolyongás majdnem biztosan végtelen sokszor jut el I_0-ba, amiből következik, hogy $\liminf_{k\to\infty} f^k(x) \le 1/5^t$, tehát 0. $\square$

2. Megoldás: Rögzítsünk $m \ge 0$ egészt. Legyen $I_n = [n, n+1)$ $(n = 1, 2, ...)$, továbbá legyen $I_0 = [0, 5^{-m})$, illetve $q = 1, 2, ..., m$ mellett $I_{5-q} = [5^{-q}, 5^{-q+1})$. (Ha $m = 0$, akkor egyszerűen $I_n = [n, n+1)$ teljesül $n = 0, 1, ...$ mellett.) Legyen az összes ilyen intervallumindex halmaza $\mathcal{I}$. Vegyük észre, hogy amennyiben valamilyen $i, j \in \mathcal{I}$ indexekre $f(I_i) \cap I_j \ne \emptyset$, akkor $f(I_i) \supseteq I_j$.

Legyen f meredekségének abszolút értéke a_t az I_t intervallumon (tehát például $a_0 = 5$), I_t hossza pedig h_t. Ekkor indukcióval belátható, hogy tetszőleges $i_0, i_1, i_2, ..., i_n$ indexsorozatra ($i_j \in \mathcal{I}$ minden j-re)

$$\lambda(\bigcap_{j=0}^{n} f^{-j}(I_{i_j})) = h_n \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{a_{i_j}},$$

amennyiben a baloldalon szereplő metszet nemüres. (Tetszőleges egyéb indexsorozatra nyilván 0 ez a mérték.) Ez $n = 1$-re abból következik, hogy f meredeksége I_{i_0}-n állandó a_{i_0}, illetve a nemüres metszet miatt $f(I_{i_0})$ tartalmazza az h_{i_1} hosszúságú I_{i_1}-et. Másrészt ha már $(n-1)$-re igazolt ez az egyenlőség tetszőleges, nemüres metszetet garantáló indexek mellett, akkor a

$$\bigcap_{j=0}^{n} f^{-j}(I_{i_j}) = I_{i_0} \cap f^{-1}(\bigcap_{j=1}^{n} f^{-(j-1)}(I_{i_j}))$$

átírásban a jobb oldalon levő metszethalmaz egy $h_n \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a_{i_j}}$ mértékű intervallum az I_{i_1}-ben, melynek f szerinti őse valóban egy $h_n \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{a_{i_j}}$ mértékű intervallum az I_{i_0}-ban.

Definiáljunk egy Markov-láncot, melynek állapotait $\mathcal{I}$ elemei jelölik, és az i-ből j-be való átmenet $p_{i,j}$ valószínűsége $\lambda(f^{-1}(I_j) \cap I_i)$. Ekkor i_0-ból indulva tetszőleges $i_1, ..., i_n$ indexsorozatnak megfelelő állapotok végigjárásának valószínűsége épp megegyezik a $\lambda(\bigcap_{j=0}^{n} f^{-j}(I_{i_j}))$ mértékkel, melyet fent meghatároztunk. Ebből azt a következtetést is levonhatjuk, hogy tetszőleges N-re és i_0-ra a

$$\lambda\left(\bigcup_{i_0,...,i_n<N} \bigcap_{j=0}^{n} f^{-j}(I_{i_j})\right)$$

mennyiség n-ben annak valószínűségéhez tart, hogy i_0-ból indulva a Markov-folyamatunk mindvégig N alatt marad. (Ez a limesz létezik: csökkenő halmazsorozattal van dolgunk.) Ebből könnyen meggondolható, hogy ha tetszőleges s állapotból elindulva 1 valószínűséggel a Markov-folyamatunk nem korlátos, akkor $\limsup f^k(x) = +\infty$ Lebesgue majdnem mindenütt. (Valóban, ellenkező esetben megfelelő N, k_0-ra az $[s, s+1)$-nek egy pozitív mértékű részhalmazán igaz az, hogy $k \ge k_0$ esetén $f^k(x) < N$. Mivel k_0 egy fix véges szám, N-et alkalmasan megnövelve itt $k_0 = 0$ feltehető. Ez ekkor azt jelenti, hogy a

$$\lambda\left(\bigcup_{s=i_0,...,i_n<N} \bigcap_{j=0}^{n} f^{-j}(I_{i_j})\right)$$

limesze nagyobb, mint 0, de ez a limesz azonban egyszersmind megegyezik annak a valószínűségével, hogy s-ből indulva N alatt marad a Markov-folyamat, így ezen valószínűség 0 kéne legyen, ami ellentmondás.)

Ugyanilyen gondolatmenet végén nyerjük azt, hogy amennyiben tetszőleges s állapotból indulva 1 valószínűséggel végtelen sokszor érinti 0-t a Markov-folyamatunk, akkor Lebesgue majdnem mindenütt teljesül $\liminf f^k(x) < 5^{-m}$. Ha ez minden $m \ge 0$- igaz, akkor $\liminf f^k(x) = 0$ Lebesgue majdnem mindenütt. Magyarán elegendő a következő két, tisztán Markov-láncokra vonatkozó állítást igazolni, hogy lezárjuk a feladat megoldását:

1. Minden $m \geq 0$-ra tetszőleges s állapotból elindulva 1 valószínűséggel a Markov-folyamatunk nem korlátos.

   A vizsgált Markov-folyamat minden lépésben felfelé lép, lefelé lép, vagy egy helyben marad. Ezen kimenetelek mindegyike állapotfüggő valószínűséggel bír, de ezen valószínűségek mindegyike pozitív. Ebből viszont következik, hogy ha egy állapotban végtelen sokszor jár, akkor 0 valószínűsége lesz annak, hogy onnan csak véges sokszor lép feljebb. Azaz indukcióval igazolható, hogy adott korlát alatt 0 valószínűséggel marad a Markov-folyamat. Azaz 1 valószínűséggel nemkorlátos, amint igazolni akartuk.

2. Minden $m \geq 0$-ra tetszőleges s állapotból elindulva 1 valószínűséggel a Markov-folyamatunk végtelen sokszor érinti a 0-t.

   Az első pont alapján 1 valószínűséggel nem korlátos a folyamat. Így elegendő azt belátni, hogy $s \geq 1$ kezdőállapot mellett teljesül az állítás.

   Ennek igazolásához minden $n \geq 1$-ra legyen $g(n) = 1 + \lfloor \log_4 n \rfloor$, valamint $g(0) = 0$, $g(5^{-q}) = 5^{-q}$ $(q = 1, 2, \ldots, m)$. Ekkor ha $g(n_1) = g(n_2)$, akkor tetszőleges s állapotra $p_{n_1,s} = p_{n_2,s}$. Továbbá, $g(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$. Így definiálható egy olyan módosított Markov-lánc, melynek állapotait szintén $\mathcal{I}$ elemei jelölik, és i, j között az átmenet $p'_{i,j}$ valószínűsége $p_{g^{-1}(i),g^{-1}(j)}$, ahol némi pongyolaságot megengedve $g^{-1}(i)$ alatt i egyetlen ősét értjük, míg $g^{-1}(j)$ alatt j teljes ősképét. Az így kapott módosított Markov-folyamat pontosan akkor érinti tetszőleges kezdőállapotból indulva 1 valószínűséggel a 0-t végtelen sokszor, ha az eredetire ez igaz volt, így dolgozhatunk ezzel.

   Ez a Markov-folyamat azonban már viszonylag egyszerű: felfelé mindig csak a soron következő állapotba léphet, valamint tetszőleges $n \geq 1$ állapotból nagyobb valószínűséggel lép lejjebb a folyamat, mint feljebb. Ekkor $s \geq 1$-ből indulva a folyamat 1 valószínűséggel végtelen sokszor jár s-ben: az s alatt maradás valószínűsége az előző pont alapján 0, míg ha $Pr(\forall n > 0 X_n > s) > 0$, akkor

   $$Pr\big(\exists N\, \forall 1 \leq n \leq N : X_n - X_{n-1} \text{ legalább annyiszor negatív, mint ahányszor pozitív } \big| \\ \forall n > 0 X_n > s\big) = 1,$$

   azaz az s felett maradás valószínűsége is 0. (A Pr-be írt eseményekbe mindig beleértjük, hogy $X_0 = s$-t kikötjük.) Viszont s-ből mindig egy fix pozitív valószínűséggel lép a folyamat a 0 állapotba. Így ha s-ben végtelen sokszor jár a folyamat, ez a 0-ba lépés végtelen sok független, fix pozitív valószínűségű eseményt jelent. Így a független eseményekre vonatkozó Borel-Cantelli lemma szerint 1 valószínűséggel végtelen sok bekövetkezik, azaz

   $$Pr(X_n = 0 \text{ végtelen sok indexre} | X_n = s \text{ végtelen sok indexre}) = 1.$$

   Így mivel a feltétel valószínűsége 1, $Pr(X_n = 0 \text{ végtelen sok indexre}) = 1$ tetszőleges kezdőállapot mellett. Ezzel készen vagyunk. □

3. Megoldás (kitűző):

A megoldás során végig az $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ jelölést használjuk.

3.1. Definíció: Az $[n-1, n]$ $(n \in \mathbb{N})$ alakú intervallumokat egész intervallumoknak nevezzük.

Ha $b < a$, akkor is használjuk az $[a, b]$ intervallum jelölést, ebben az esetben az a, b végpontú intervallumokat értjük rajta.

A következő két lemma bizonyítását az olvasóra hagyjuk.

3.2. Lemma: *Adott n esetén létezik $0 < \widetilde{\gamma}_n < 1$, hogy ha $\widetilde{J} \subset [0, 4^{n+1}]$ egy adott egész intervallum, akkor ha $\widetilde{H}_{J,n}$ jelöli azon $x \in \widetilde{J}$ pontok halmazát, melyekre létezik $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) > 4^{n+1}$, akkor $\lambda(\widetilde{H}_{J,n}) > \widetilde{\gamma}_n \lambda(\widetilde{J}) = \widetilde{\gamma}_n$.*

3.3. Lemma: *Legyen $I = [a, b]$, $a < b$, $\lambda(I) < 1$ és jelölje k_I a legkisebb olyan k-t, melyre $f^{k_I}(I)$ tartalmaz egész intervallumot (ilyen k_I nyilván mindig létezik). Ekkor létezik $a \leq a' < b' \leq b$, $b' - a' > (b-a)/4$ úgy, hogy $f(a'), f(b') \in \mathbb{N}$, és f^{k_I} lineáris $[a', b']$-n.*

Először a feladatban azt az esetet bizonyítjuk, hogy $\limsup_{n\to+\infty} f^n(x) = +\infty$ majdnem minden x-re.

Legyen $H_n = \{x \in [0,+\infty) \mid f^k(x) \in [0,4^n]\, \forall k = 0,1,\ldots\}$.

Indirekt tegyük föl, hogy $\lambda(H_n) > 0$, és legyen p a H_n halmaz Lebesgue sűrűségi pontja. Adott $0 < \gamma < 1$ esetén válasszunk $1 > \delta_\gamma > 0$-t, hogy $J = [p, p+\delta_\gamma]$-ára

$$\lambda(J \cap H_n) > \gamma\lambda(J). \tag{1}$$

Jelölje k_J a legkisebb k-t amire $f^k(J)$ tartalmaz egy egész intervallumot. Mint 3.3. Lemmában láttuk, létezik $J' \subset J$ intervallum, hogy $\lambda(J') > \lambda(J)/4$, f^{k_J} lineáris J'-n. Mivel $p \in H_n \cap J$, így $f^{k_J}(p) \le 4^n$, és könnyen látható, hogy $f^{k_J}(J) \subset [0, 4^{n+1}]$.

A 3.2. Lemma alapján könnyen látható, hogy létezik csak n-től függő γ'_n, melyre teljesül, hogy ha $H'_{J,n}$ jelöli azon $x \in J$-k halmazát, melyekre létezik $k \in \mathbb{N}$, hogy $f^k(x) > 4^{n+1}$, akkor

$$\lambda(H'_{J,n}) > \gamma'_n \lambda(J). \tag{2}$$

Nyilván $H'_{J,n} \cap H_n = \emptyset$. Így 3.2. Lemma ellentmond (1)-nek, ha γ elég közel van 1-hez. Ebből következik, hogy $\limsup_{n\to+\infty} f^n(x) = +\infty$ majdnem minden x-re.

Most rátérünk a $\liminf_{n\to+\infty} f^n(x) = 0$ majdnem minden x-re rész bizonyítására.

3.4. Lemma: *Tegyük föl, hogy $k \ge 2$ adott, és J egy egész intervallum, $J \subset [4^{k-1}, 4^k]$, ekkor választhatóak olyan egymásba nem nyúló $J_1, ..., J_l \subset J$ intervallumok és $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$ számok, hogy*

$$f^{n_j}(J_j) \subset [0, 4^{k-1}] \text{ egy egész intervallum,} \tag{3}$$

$$f^{n_j} \text{ lineáris } J_j\text{-n,} \tag{4}$$

és

$$\lambda(J \setminus \cup_{j=1}^{l} J_j) < \frac{4}{4^k+1}\lambda(J) = \frac{4}{4^k+1}. \tag{5}$$

Bizonyítás: Az f függvény meredekségének abszolútértéke J belsejében 4^k+1. J tartalmaz egy $\frac{1}{4}\cdot\frac{4^k}{4^k+1}$ hosszúságú I'_1 részintervallumot, melyre $f(I'_1) = [0, 4^{k-1}]$ és f lineáris I'_1-n, ez az intervallum tovább bontható $J_1, J_2, \ldots$ véges sok részintervallumra, hogy az f-nél vett képeik egész intervallumok legyenek és rajtuk persze f lineáris. Ezen J_j intervallumokhoz tartozó $n_j = 1$. Az uniójuk $I_1 = I'_1$, és összhosszuk $\frac{1}{4}\cdot\frac{4^k}{4^k+1}$.

Másrészt J tartalmaz egy $\widehat{I}_1$ részintervallumot melyre $f(\widehat{I}_1) \subset [4^k, +\infty)$. A $\widehat{I}_1$-ot „eldobjuk”.

Tehát $f(\mathrm{cl}(J \setminus (I_1 \cup \widehat{I}_1))) = [4^{k-1}, 4^k]$ és f lineárisan ráképezi $\mathrm{cl}(J \setminus (I_1 \cup \widehat{I}_1))$ komponenseit $[4^{k-1}, 4^k]$-ra. Továbbá $f(\mathrm{cl}(J \setminus (I_1 \cup \widehat{I}_1))) = [4^{k-1}, 4^k]$ összesen $(3/4)\cdot 4^k$ darab egész intervallumot tartalmaz.

Így $\mathrm{cl}(J \setminus (I_1 \cup \widehat{I}_1))$ felbontható olyan J'' intervallumokra, melyek képei f-nél $[4^{k-1}, 4^k]$-beli egész intervallumok. Egy ilyen J'' intervallum hossza $\frac{1}{4^k+1}$. A $\mathrm{cl}(J \setminus (I_1 \cup \widehat{I}_1))$-beli J'' intervallumok összhossza pedig $\frac{3}{4}\cdot\frac{4^k}{4^k+1}$.

Ezeken, pontosabban ezek f-nél vett képein ismételhető az előző érvelés. Mindegyik $f(J'')$ intervallum tartalmaz egy $\frac{1}{4}\cdot\frac{4^k}{4^k+1}$ hosszúságú I''_2 részintervallumot, melyre $f(I''_2) = [0, 4^{k-1}]$ és f lineáris I''_2-n. Ez az intervallum tovább bontható úgy hogy az f-nél vett képek egész intervallumok legyenek. Az I''_2 intervallumok ősképeit tekintve találhatunk J''-ben egy $\frac{1}{4}\cdot 4^k \cdot \left(\frac{1}{4^k+1}\right)^2$ hosszúságú I'_2 részintervallumot, melyre $f^2(I'_2) = [0, 4^{k-1}]$ és f^2 lineáris I'_2-n, ez az intervallum tovább bontható úgy hogy az f^2-nél vett képek egész intervallumok legyenek, ezek az intervallumok adják majd a további J_j intervallumokat, $n_j = 2$-vel. Összegezve az összes lehetséges J'' típusú intervallumra az összes lehetséges I'_2 típusú intervallumok összhossza, $\frac{3}{4}\cdot 4^k \cdot \frac{1}{4}4^k \cdot \left(\frac{1}{4^k+1}\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4^k}{4^k+1}\right)^2$. Ez megegyezik azon I_2 halmaz összhosszával, mely tartalmazza az ebben a lépésben definiált J_j intervallumokat.

Másrészt $f(J'')$ tartalmaz egy $\widehat{I}_2''$ részintervallumot, melyre $f(\widehat{I}_2'') \subset [4^k, +\infty)$. Így J'' tartalmaz egy $\widehat{I}_2'$ részintervallumot, melyre $f(\widehat{I}_2') = \widehat{I}_2''$. Az $\widehat{I}_2'$-t eldobjuk.

Tehát $f(\mathrm{cl}(f(J'') \setminus (I_2'' \cup \widehat{I}_2''))) = [4^{k-1}, 4^k]$ és f lineárisan ráképezi $\mathrm{cl}(f(J'') \setminus (I_2'' \cup \widehat{I}_2''))$ komponenseit $[4^{k-1}, 4^k]$-ra. Továbbá $f(\mathrm{cl}(f(J'') \setminus (I_2'' \cup \widehat{I}_2''))) = [4^{k-1}, 4^k]$ összesen $(3/4) \cdot 4^k$ darab egész intervallumot tartalmaz.

Így $\mathrm{cl}(f(J'') \setminus (I_2'' \cup \widehat{I}_2''))$ fölbontható olyan $\widetilde{J}'''$ intervallumokra, melyek képei f-nél $[4^{k-1}, 4^k]$-beli egész intervallumok, ezen $\mathrm{cl}(f(J'') \setminus (I_2'' \cup \widehat{I}_2'')$-beli $\widetilde{J}'''$ intervallumok összhossza $\dfrac{3}{4} 4^k \dfrac{4^k}{4^k+1}$. A megfelelő f-nél vett ősképeket tekintve $\mathrm{cl}(J'' \setminus (I_2 \cup \widehat{I}_2))$ fölbontható olyan J''' intervallumokra, melyek képei f^2-nél $[4^{k-1}, 4^k]$-beli egész intervallumok, és ezeken f^2 lineáris.

Ezt az eljárást elég sokszor, K-szor ismételve kapunk $I_1, \ldots, I_l \subset J$ intervallumokat, $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$ számokat, hogy (3) és (4) teljesül. Továbbá,

$$\lambda\Big(\bigcup_{j=1}^{l} J_j\Big) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4^k}{4^k+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \Big(\frac{4^k}{4^k+1}\Big)^2 + \Big(\frac{3}{4}\Big)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \Big(\frac{4^k}{4^k+1}\Big)^3 + \cdots + \Big(\frac{3}{4}\Big)^{K-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \Big(\frac{4^k}{4^k+1}\Big)^K = \star.$$

Legyen $\eta_k = \frac{4^k}{4^k+1}$. Ekkor

$$\star = \frac{1}{4}\eta_k\Big(1+\frac{3}{4}\eta_k+\cdots+\Big(\frac{3}{4}\eta_k\Big)^{K-1}\Big) = \frac{1}{4}\eta_k \frac{1-(\frac{3}{4}\eta_k)^K}{1-\frac{3}{4}\eta_k} = \frac{\eta_k}{4-3\eta_k} - \frac{\eta_k}{(\frac{3}{4}\eta_k)^K} 4 - 3\eta_k \to \frac{\eta_k}{4-3\eta_k}, \text{ ha } K \to \infty.$$

Így $\lambda(J \setminus \cup_{j=1}^{l} I_j) \to 1 - \frac{\eta_k}{4-3\eta_k} = \star\star$, ha $K \to \infty$.

Mivel $\star\star = 1 - \dfrac{\eta_k}{4-3\eta_k} = \dfrac{4(1-\eta_k)}{4-3\eta_k} < 4(1-\eta_k) = \dfrac{4}{4^k+1}$, így (5) teljesül, ha K elegendően nagy. □

Most iterálhatjuk a 3.4. Lemmát (n-ekkel lefelé haladva, amíg le nem érünk a $[0, 4]$ intervallumba), és így kapható a következő lemma.

3.5. Lemma: *Ha J egy egész intervallum, akkor választhatóak olyan egymásba nem nyúló $J_1, \ldots, J_\ell \subset J$ intervallumok és $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}$ számok, hogy*

$$f^{n_j}(J_j) \subset [0, 4] \text{ egy egész intervallum,} \tag{6}$$

$$f^{n_j} \text{ lineáris } J_j\text{-n,} \tag{7}$$

és

$$\lambda\Big(\bigcup_{j=1}^{\ell} J_j\Big) > \prod_{k=2}^{\infty}\Big(1 - \frac{4}{4^k+1}\Big) > \frac{1}{100}. \tag{8}$$

A (6) és (7) tulajdonságokat használva az is igaz, hogy

3.6. Lemma: *Ha $\varepsilon > 0$ adott és J egy egész intervallum, akkor választhatóak olyan egymásba nem nyúló $J_1, \ldots, J_\ell \subset J$ intervallumok és $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}$ számok, hogy*

$$f^{n_j}(J_j) \subset [0, \varepsilon], \tag{9}$$

$$f^{n_j} \text{ lineáris } J_j\text{-n,} \tag{10}$$

és

$$\lambda\Big(\bigcup_{j=1}^{\ell} J_j\Big) > \frac{\varepsilon}{500}. \tag{11}$$

3.3. és 3.6. Lemmák következménye, hogy ha $L \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon > 0$ adott, valamint $I = [a, b] \subset [0, +\infty)$ tetszőleges intervallum, akkor

$$\lambda\big(\{x \in I \mid \exists n \in \mathbb{N},\, n \geq L,\, f^n(x) \in [0, \varepsilon]\}\big) > \frac{\varepsilon}{10000}\lambda(I).$$

Valóban, tekintsük $f^L(I)$-t. Ha $f^L(I)$ tartalmaz egész intervallumokat, akkor ezeken alkalmazzuk 3.6. Lemmát. Ha $f^L(I)$ nem tartalmaz egész intervallumokat, akkor alkalmazzuk 3.3. Lemmát I-re és utána az 3.6. Lemmát.

Azaz $\liminf_{n\to+\infty} f^n(x) = 0$ minden intervallumon belül egy fix mértékaránnyal bíró halmazon. Ebből már a Lebesgue sűrűségi tételt használva könnyen következik, hogy $\liminf_{n\to+\infty} f^n(x) = 0$ majdnem minden x-re. □

4. Minden n-edfokú, egész együtthatós f polinomra tekintsük az

$$\int_{-1}^{1} x^n f(x)\,dx$$

integrált. Jelölje α_n azt a legkisebb pozitív valós számot, amit ilyen integrál adhat. Határozzuk meg a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \alpha_n}{n}$$

határértéket.

(Ruzsa Imre)

Megoldás (kitűző): Legyen

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j.$$

Ekkor az integrál értéke

$$\int_{-1}^{1} x^n f(x)\,dx = 2 \sum_{j\le n;\ 2\,|\,j+n} \frac{a_j}{n+j+1}.$$

Ilyen összeg formájában azok a racionális számok állnak elő, amelyek nevezője osztja az $n+1$ és $2n+1$ közötti páratlan számok legkisebb közös többszörösét, vagyis

$$\alpha_n = \frac{2}{[2n+1, 2n-1, 2n-3, \ldots, n^+]},$$

ahol n^+ a legkisebb n-nél nagyobb páratlan számot jelöli (azaz $n+1$ vagy $n+2$).

A legkisebb közös többszörös prímtényezői azok a prímek, melyeknek van páratlan többszörösük az $[n+1, 2n+1]$ intervallumban, vagyis a

$$[3, (2n+1)/3] \cup [n+1, 2n+1]$$

halmazba esnek. Ezen prímek szorzátanak logaritmusa

$$\vartheta(2n+1) - \vartheta(n) + \vartheta\left(\frac{2n+1}{3}\right) - \log 2 = \left(2 - 1 + \frac{2}{3} + o(1)\right) n = \left(\frac{5}{3} + o(1)\right) n,$$

ahol használtuk, hogy a Csebisev-függvényre $\vartheta(n)/n \to 1$.

Vegyük még észre, hogy az 1-nél magasabb kitevővel szereplő prímek mindegyike legfeljebb $\sqrt{2n+1}$, a kitevőjük pedig legfeljebb $\log(2n+1)$, vagyis ezek teljes hozzájárulása a logaritmushoz $\vartheta\big(\sqrt{2n+1}\big)\log(2n+1) = o(n)$, tehát a kérdéses határérték szempontjából elhanyagolható. Így azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \alpha_n}{n} = -\frac{5}{3}.$$

□

5. Ki lehet-e választani a sík minden egyeneséről egy-egy nem elfajuló szakaszt úgy, hogy bármely két kiválasztott szakasz diszjunkt legyen?

(Keleti Tamás, Pálvölgyi Dömötör)

1. Megoldás (kitűzők): Belátjuk, hogy nem lehet. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha $\mathcal{S}$ páronként diszjunkt síkbeli szakaszok családja és $E \subset \mathbb{R}^2$ azon (a, b) számpárok halmaza, amelyekre az $y = ax + b$ egyenes tartalmazza valamelyik $\mathcal{S}$-beli szakaszt, akkor E (kétdimenziós) Lebesgue-mértéke nulla (sőt, σ-véges az 1-dimenziós Hausdorff mértékre nézve).

Legyen

$$E_{q,r} = \big\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; (\exists s \in \mathcal{S})\ (q, aq + b) \in s,\ (r, ar + b) \in s\big\}.$$

Mivel $E = \cup_{q,r\in\mathbb{Q},\, q<r} E_{q,r}$, ezért elég belátni, hogy minden $E_{q,r}$ halmaz nulla Lebesgue mértékű (sőt, σ-véges az 1-dimenziós Hausdorff mértéke). Rögzítsük a $q < r$ racionális számokat és legyen $F(a, b) = (aq+b, ar+b)$. Mivel az S-beli szakaszok páronként diszjunktak, azért $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in E_{q,r}$, $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ esetén ($a_1q + b_1 < a_2q + b_2$ és $a_1r + b_1 < a_2r + b_2$) vagy ($a_1q + b_1 > a_2q + b_2$ és $a_1r + b_1 > a_2r + b_2$). Ez azt jelenti, hogy $F(E_{q,r})$ egy szigorúan monoton növő függvény grafikonja. Mivel egy monoton növő függvény grafikonját 45 fokkal elforgatva Lipschitz függvény grafikonját kapjuk, ezért ebből következik, hogy $F(E_{q,r})$ nulla Lebesgue mértékű (sőt, σ-véges az 1-dimenziós Hausdorff mértékre nézve). Ebből viszont következik ugyanez $E_{q,r}$-re is, hiszen F egy nem-szinguláris lineáris transzformáció. $\square$

2. Megoldás: Legyen megint $\mathcal{S}$ páronként diszjunkt síkbeli szakaszok családja és $E \subset \mathbb{R}^2$ azon (a, b) számpárok halmaza, amelyekre az $y = ax + b$ egyenes tartalmazza valamelyik $\mathcal{S}$-beli szakaszt. Most azt fogjuk megmutatni, hogy E első kategóriájú halmaz a síkon, tehát Baire kategória tétele szerint nem lehet $E = \mathbb{R}^2$.

Legyen D_1 és D_2 két diszjunkt körlap a síkon, melyek sugara és középpontjuk mindkét koordinátája racionális. Mivel megszámlálható sok ilyen körlap-pár van, és minden minden szakaszhoz megadható két ilyen körlap, melyekre a szakasz két végpontja D_1-ben illetve D_2-ben van, ezért elég megmutatni, hogy a D_1 és D_2 között menő $\mathcal{S}$-beli szakaszokhoz tartozó (a, b) pontok sehol sem sűrű halmazt alkotnak.

Rögzítsük a D_1 és D_2 körlapokat és álljon F a fenti tulajdonságú (a, b) pontokból. Úgy fogjuk belátni, hogy F sehol sem sűrű, hogy tetszőleges $(a, b) \in F$ ponthoz meg fogunk adni tetszőlegesen közel olyan (a', b') pontot, melyhez elég közel már nincs F-beli pont. Ehhez válasszuk (a', b')-t (a, b)-hez tetszőlegesen közel úgy, hogy az $y = a'x + b'$ egyenes az $y = ax + b$ egyenest a D_1 és D_2 körlapok között messe. Ekkor minden (a', b')-hez elég közeli (a'', b'') pont is a D_1 és D_2 körlap között metszi az $y = ax + b$ egyenest, így (a'', b'') valóban nem lehet F-ben. $\square$

6. Legyen ε egy primitív hetedik egységgyök. Mely egész számok állnak elő $|\alpha|^2$ alakban, ahol α a $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ hetedik körosztási test egy eleme?

(Szabó Csaba, Zábrádi Gergely)

Megoldás (kitűző):

Válasz: pontosan azok a pozitív egész számok állnak elő, melyek prímtényezős felbontásában minden olyan prím páros kitevőn szerepel, mely 3-at, 5-öt vagy 6-ot ad maradékul 7-tel osztva (és természetesen a 0 is előáll).

6.1. Lemma: *Legyen $p \neq 2, 7$ prím. A -7 pontosan akkor kvadratikus maradék modulo p, ha $p \equiv 1, 2$ vagy $4 \pmod 7$.*

Bizonyítás: A kvadratikus reciprocitás segítségével kiszámoljuk a $\left(\frac{-7}{p}\right)$ Legendre-szimbólumot:

$$\left(\frac{-7}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{7}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{7-1}{2}\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{7}\right) = \left(\frac{p}{7}\right).$$

Modulo 7 pedig az $1, 2, 4$ számok a kvadratikus maradékok. $\square$

Először belátjuk, hogy a fönt felsorolt egészek előállnak $|\alpha|^2$ alakban, ahol $\alpha \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$. A négyzetszámok nyilván megfelelnek, hiszen α választható egész számnak is. Továbbá ha $a, b \in \mathbb{Z}$ egyaránt előáll $|\alpha|^2$ alakban ($\alpha \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$), akkor ab is. Tehát elegendő a 7-et és a 7-tel osztva $1, 2, 4$ maradékot adó prímeket előállítani.

Ehhez vegyük észre (lásd pl. itt — ez egy Gauss-összeg), hogy $(1+2(\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^4))^2=-7$, speciálisan $\left|(1+2(\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^4)\right|^2=7$ előáll a kívánt alakban. Ebből az is következik, hogy $\sqrt{-7}\in\mathbb{Q}(\varepsilon)$. Legyen $\lambda=\frac{1+\sqrt{-7}}{2}$: ez egy algebrai egész, hiszen minimálpolinomja x^2-x+2.

6.2. Lemma: *$\mathbb{Z}[\lambda]$-ban igaz a számelmélet alaptétele.*

Bizonyítás: Mivel $-7\equiv 1 \pmod 4$, $\mathbb{Z}[\lambda]$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ egészeinek gyűrűje. A Stark–Heegner-tétel szerint $d<0$ esetén a $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-beli algebrai egészek gyűrűjében pontosan akkor igaz a számelmélet alaptétele, ha $d=-1,-2,-3,-7,-11,-19,-43,-67,-163$, speciálisan $d=-7$-re is. Ehhez valójában nem is kell a Stark–Heegner-tétel, be lehet látni elemien is: a Minkowski-féle becslésből (3.5-ös fejezet az Algebrai Számelmélet jegyzetben) azt kapjuk, hogy minden ideálosztályban van $\frac{2\sqrt{7}}{\pi}$-nél kisebb normájú elem, de ez a norma csak 1 lehet (azaz az ideál az egész gyűrű), hiszen pozitív egész és $\frac{2\sqrt{7}}{\pi}<2$. $\square$

6.3. Állítás: *Ha $p\equiv 1,2$ vagy $4 \pmod 7$ prímszám, akkor a p nem prímelem $\mathbb{Z}[\lambda]$-ban.*

Bizonyítás: Egyrészt $2\mid\lambda(\lambda-1)=-2$, de $2\nmid\lambda$ és $2\nmid\lambda-1$, azaz a 2 nem prímtulajdonságú. Hasonlóképp ha $p\neq 2,7$ prím és $p\equiv 1,2$ vagy $4 \pmod 7$, akkor a 6.1. Lemma szerint van olyan $b\in\mathbb{Z}$ egész, melyre $p\mid b^2+7=(b+\sqrt{-7})(b-\sqrt{-7})$, de $p\nmid b+\sqrt{-7}$ és $p\nmid b-\sqrt{-7}$ a $\mathbb{Z}[\lambda]$ gyűrűben, azaz p nem prímtulajdonságú. $\square$

A fönti állítás (és a 6.2. Lemma) szerint minden $p\equiv 1,2,4 \pmod 7$ prím fölbomlik $p=\pi_1\pi_2$ szorzatra, ahol se π_1, se π_2 nem egység $\mathbb{Z}[\lambda]$-ban. Speciálisan

$$p^2=N_{\mathbb{Q}(\sqrt{-7})/\mathbb{Q}}(p)=N_{\mathbb{Q}(\sqrt{-7})/\mathbb{Q}}(\pi_1)N_{\mathbb{Q}(\sqrt{-7})/\mathbb{Q}}(\pi_2)=|\pi_1|^2|\pi_2|^2$$

miatt $|\pi_1|^2=|\pi_2|^2=p$, azaz p előáll a kívánt alakban.

Most rátérünk annak az igazolására, hogy ha egy n egész szám prímfelbontásában valamely 7-tel osztva $3,5$, vagy 6 maradékot adó q prím páratlan kitevőn szerepel, akkor n nem áll elő $|\alpha|^2$ alakban. Ehhez a $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ gyűrű számelméletére van szükség. $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ a hetedik körosztási test egészeinek gyűrűje (3.12.5. Tétel az Algebrai Számelmélet jegyzetben). Speciálisan $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ egy Dedekind-gyűrű (3.3.1. Tétel az Algebrai Számelmélet jegyzetben), ezért ideáljaira teljesül a számelmélet alaptétele (3.3.3. Tétel az Algebrai Számelmélet jegyzetben). Valójában elemekre is teljesül a számelmélet alaptétele $\mathbb{Z}[\varepsilon]$-ban, de erre nem lesz szükség.

6.4. Lemma: *Legyen $P\lhd\mathbb{Z}[\varepsilon]$ tetszőleges prímideál. Ekkor $|\mathbb{Z}[\lambda]/P|=7$ vagy $\equiv 1 \pmod 7$ és prímhatvány.*

Bizonyítás: $\mathbb{Z}[\lambda]/P$ egy véges nullosztómentes gyűrű, azaz egy véges test. Ebben $\varepsilon+P$ egy hetedik egységgyök, ami primitív, kivéve, ha $\varepsilon-1\in P$. Tehát $\mathbb{Z}[\lambda]/P$ multiplikatív csoportjának rendje osztható 7-tel, azaz $|\mathbb{Z}[\lambda]/P|\equiv 1 \pmod 7$, ha $\varepsilon-1\notin P$. Viszont $(\varepsilon-1)\mathbb{Z}[\varepsilon]$ egy prímideál, mert $7=(\varepsilon-1)(\varepsilon^2-1)(\varepsilon^3-1)(\varepsilon^4-1)(\varepsilon^5-1)(\varepsilon^6-1)\in(\varepsilon-1)\mathbb{Z}[\varepsilon]$ miatt $\mathbb{Z}[\varepsilon]/(\varepsilon-1)\mathbb{Z}[\varepsilon]\cong\mathbb{F}_7$. Tehát $\varepsilon-1\in P$ csak $P=(\varepsilon-1)\mathbb{Z}[\varepsilon]$ esetén áll elő, és ennek pedig 7 az indexe. $\square$

A továbbiakban arra lesz szükségünk, hogy az ideálok $\mathfrak{N}(A):=|\mathbb{Z}[\varepsilon]/A|$ abszolút normája ($A\lhd\mathbb{Z}[\varepsilon]$) multiplikatív, azaz ha $A,B\lhd\mathbb{Z}[\varepsilon]$, akkor $\mathfrak{N}(AB)=\mathfrak{N}(A)\mathfrak{N}(B)$ és egy α elem által generált (tört) főideál normája megegyezik a Galois-konjugáltjainak szorzatának abszolútértékével, azaz a szokásos $\left|N_{\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q}}(\alpha)\right|$-val (3.5.6. Állítás az Algebrai Számelmélet jegyzetben). Ha tehát $0\neq\alpha\in\mathbb{Q}(\varepsilon)$ tetszőleges, akkor az általa generált $\alpha\mathbb{Z}[\varepsilon]$ törtfőideál előáll $P_1^{n_1}\cdots P_r^{n_r}$ alakban, ahol $n_1,\dots,n_r\in\mathbb{Z}$ és $P_1,\dots,P_r$ prímideálok. A 6.4. Lemma miatt $\left|N_{\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q}}(\alpha)\right|$ olyan prímhatványok szorzata, melyek mindegyike $\equiv 1 \pmod 7$ vagy 7-nek egy hatványa. Speciálisan $\left|N_{\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q}}(\alpha)\right|$ prímfelbontásában minden 7-tel osztva $3,5$ vagy 6 maradékot adó prímszám páros kitevőn szerepel. Viszont $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q})$ egy hatodrendű ciklikus csoport (a 7 elemű test multiplikatív csoportjával izomorf), speciálisan a komplex konjugálás által generált kételemű csoportnak és egy $g\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q})$ harmadrendű elem által generált részcsoportnak a direkt szorzata. Tehát az α elem Galois-konjugáltjai $\alpha,g(\alpha),g^2(\alpha),\overline{\alpha},g(\overline{\alpha}),g^2(\overline{\alpha})$. Speciálisan ha $\alpha\cdot\overline{\alpha}=|\alpha|^2$ racionális, akkor g fixálja, és így $N_{\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q}}(\alpha)=|\alpha|^2g(|\alpha|^2)g^2(|\alpha|^2)=(|\alpha|^2)^3$. Tehát ha $|\alpha|^2$-ben valamely $q\equiv 3,5,6 \pmod 7$ prím páratlan kitevőn szerepelne, akkor ennek köbében $N_{\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q}}(\alpha)$-ban is. $\square$

7. Egy szabályos k-szög csúcsaiba pontszerű bábukat állítunk, majd ezekkel lépegetünk. Egy lépésben egy bábu átugrik egy másikat, azaz az új helye a pillanatnyi helyének tükörképe lesz egy másik bábu pillanatnyi helyére. Milyen $k \geq 3$ egész esetén lehet ilyen lépések sorozatával elérni, hogy a bábuk egy, az eredetitől eltérő méretű szabályos k-szög csúcsait alkossák?

(Tardos Gábor)

Megoldás (kitűző):

Azt fogjuk bizonyítani, hogy $k = 3$, 4 és 6 esetén nincs ilyen lépéssorozat, minden egyéb esetben viszont van.

Vegyük először a $k = 3$, 4 és 6 eseteket. Az induló szabályos sokszög ilyenkor egy szabályos háromszög- vagy négyzetrács legkisebb szabályos k-szöge. Rácspont tükörképe rácspontra ismét rácspont, így a bábuk csak rácspontokra juthatnak el, tehát az eredetinél kisebb szabályos sokszögbe nem juthatunk. De a lépések megfordíthatóak, így ha nagyobb szabályos sokszögbe jutnánk, akkor a lépéseket megfordítva egy kisebbe is, ami ellentmondás.

A másik irányhoz számozzuk meg a bábukat 0-tól $(k-1)$-ig körben a k-szögben, és legyen P_i az i-edik bábu kiindulópontja. P_0-át origónak tekintjük, és a sík pontjait vektorokként kezeljük. A P_i kifejezésben az indexet a továbbiakban moduló k értjük. A $(k-1) \times (k-1)$-es $A = (a_{ij})$ mátrixról azt mondjuk, hogy *leírja* azt a konfigurációt, amikor a 0-ás bábu az origóban van, ha $1 \leq i \leq k-1$ esetén az i-es bábu helye $\sum_{j=1}^{k-1} a_{ij} P_j$. Az identitásmátrix nyilván a kiindulási állapotot írja le. Előfordulhat, hogy több különböző mátrix is ugyanazt a konfigurációt írja le.

Hívjuk egy mátrix *megengedett transzfomációjának*, hogy egyik sorához hozzádjuk, vagy abból kivonjuk egy másik sorának kétszeresét, vagy egyik sorát megszorozzuk (-1)-gyel. Vegyük észre, hogy ha A' az A mátrixból megengedett transzformációval kapjuk, akkor a konfigurációt, amit A' leír, megkaphatjuk legfeljebb két szabályos lépéssel az A által leírt konfigurációból: Az i-edik sor (-1)-szerezéséhez az i-es bábuval ugrunk az origóban pihenő 0-ás bábu felett, ha meg az i-edik sor kétszeresét akarjuk levonni vagy hozzáadni a j-edik sorból/sorhoz, akkor a j-es bábuval ugorjuk át a 0-ás és i-es bábukat a megfelelő sorrendben.

A fentiekből látszik, hogy ha az identitás-mátrixból eljuthatunk egy A mátrixba megengedett transzformációkkal, akkor az A által leírt konfiguráció is elérhető szabályos lépésekkel. (Nem nehéz azt sem látni, hogy minden szabályos lépésekkel elérhető konfiguráció egy ilyen mátrix által leírt konfiguráció eltoltja, de erre nem lesz szükségünk.) Használni fogjuk az alábbi (talán közismert) lemmát.

7.1. Lemma: *Az $m \times m$-es identitás mátrixból akkor és csak akkor érhető el az ugyanakkora $A = (a_{ij})$ egész mátrix megengedett transzformációk sorával, ha $|\det(A)| = 1$ és a_{ij} pont akkor páratlan, ha $i = j$.*

Bizonyítás: A „csak akkor” irány triviális, hiszen az identitás mátrix teljesíti a feltételeket, és egy megengedett transzformáció a determináns abszolút értékét sem változtatja, és egyetlen elem paritását sem.

A továbbiakban az „akkor” irányt bizonyítjuk k-ra vonatkozó indukcióval. A megengedett transzformációk inverze is megengedett, így elég belátni, hogy a feltételeknek megfelelő A mátrixból eljuthatunk az identitásmátrixig.

Először A utolsó oszlopára koncentrálunk. Amíg ott találunk két különböző abszolút értékű nem-nulla értéket, mondjuk a-t és b-t, $|a| > |b| > 0$, egy megengedett transzformációval a-t $(a - 2b)$-re vagy $(a + 2b)$-re cseréljük úgy, hogy az abszolút értéke csökkenjen. Az utolsó oszlopban más változás nincs, így az abszolút értékek összege az utolsó oszlopban (egy nem-negatív egész) szigorúan csökken, és az eljárás véges sok lépés után megáll. Ekkor az utolsó oszlopban csak 0 és $\pm a$ szerepel valamilyen $a > 0$ értékre. Eközben a determináns abszolút értéke nem változott, viszont most osztható a-val, így $a = 1$. Az elemek paritása sem változott, így az utolsó oszlopban csupa 0 szerepel, kivéve a legutolsó elemet, ami ± 1. További maximum egy megengedett transzformációval elérjuk, hogy a mátrixunk jobb alsó eleme 1 legyen.

Ha $m = 1$, akkor meg is vagyunk (meg eleve is triviális volt az állítás). Ha $m > 1$, akkor az indukciós feltevést használjuk a kapott B mátrix bal felső $(m-1)$-szer $(m-1)$-es B_0 részére. B determinánsát az utolsó oszlop szerint kifejtve kapjuk, hogy $\det(B_0) = \det(B) = \pm 1$. Nyilván a paritásfeltételt is teljesíti

B_0, így megengedett transzformációk sorozatával az identitásmátrixba alakítható. Ezek a megengedett transzformációk persze a teljes B mátrixra is alkalmazhatóak, ekkor egy olyan C mátrixot kapunk, ami utolsó sora és oszlopa nélkül az identitásmátrix. Az utolsó oszlopa is megegyezik az identitásmatrix utolsó oszlopával, mivel ez B-ben teljesült, utána meg nem változott.

Végezetül C-ben az utolsó sor nem utolsó elemei mind párosok, így a feljebbi sorok kétszereseinek ismételt levonásával vagy hozzáadásával mind 0-vá redukálhatóak. Ezzel eljutottunk A-ból az identitásmátrixig és beláttuk a lemmát. □

Tekintsük az alábbi $(k-1) \times (k-1)$-es A mátrixot:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

amely a kiindulási konfiguráció $2\pi/k$ szögű elforgatását írja le, amiben az i-es bábu helye $P_{i+1} - P_1$. Így A^j a kiindulási konfiguráció $2j\pi/k$ szögű elforgatottját írja le minden j-re és A minden polinomja is az eredeti konfigurációval hasonlót (azaz – esetleg elfajuló – szabályos k-szöget) ír le.

Pozitív egész i-re legyen $B_i = \sum_{j=0}^{i-1} A^j$. Az első bábu helye az A^j által leírt konfigurációban $P_{j+1} - P_j$, így a B_i által leírt konfigurációban $\sum_{j=0}^{i-1}(P_{j+1} - P_j) = P_i$. Vegyük észre, hogy $B_k = 0$ és így $B_{ik} = B_k \sum_{j=0}^{i-1} A^{jk}$ ugyancsak zéró minden i-re. Legyen most $1 \le i \le k$ egy k-hoz relatív prím egész. Ekkor találhatunk hozzá olyan ℓ pozitív egészt, hogy k osztja $(i\ell - 1)$-et. Ekkor

$$B_i \sum_{j=0}^{\ell-1} A^{ij} = B_{i\ell} = I + AB_{i\ell-1} = I.$$

Van tehát az egész B_i mátrixnak egész inverze, így $|\det(B_i)| = 1$. Sajnos azonban a lemmában szereplő paritásfeltételt B_i nem teljesíti. Ezt megoldandó B_i-t hatványozni fogjuk. Tekintsük a B_i mátrixot a kételemű test felett. Determinánsa 1, így nem szinguláris, tehát (mivel a mátrixcsoport véges) valamelyik hatványa az identitás. Így van olyan $t \ge 1$ kitevő, hogy B_i^t moduló 2 megegyezik az identitásmátrixszal. Determinánsa ± 1, tehát a 7.1. Lemma szerint B_i^t megengedett transzformációkkal elérhető az identitásmátrixból, és így a B_i^t által leírt konfigurációt elérhetjük szabályos lépésekkel. Vizsgáljuk meg, hogy ez milyen konfiguráció.

Mint láttuk, A minden polinomja szabályos k-szöget ír le. Ezen belül B_i olyan konfigurációt ír le, amiben az 1-es bábu P_i-be kerül, tehát $|P_i|$ lesz a keletkezett szabályos k-szög oldalhossza. Emiatt a B_i^t olyan szabályos k-szöget ír le, aminek élhossza

$$\left(\frac{|P_i|}{|P_1|}\right)^t |P_1|.$$

Ez nagyobb, mint az eredeti k-szög $|P_1|$ élhossza amennyiben $1 < i < k-1$. Ezzel meg is vagyunk, ha tudunk ilyen i értéket választani, tehát $1 < i < k-1$, k-hoz relatív prím i egészet. Ilyen pedig $k > 4$, $k \ne 6$ miatt létezik. □

8. Igazoljuk, hogy az $\varepsilon_n = \pm 1$ előjelek megválaszthatóak úgy, hogy az $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^s} \colon \{\operatorname{Re} s > 1\} \to \mathbb{C}$ függvény minden $\xi \in \{\operatorname{Re} s = 1\}$ pontban minden komplex értékhez torlódik (azaz minden $\xi \in \{\operatorname{Re} s = 1\}$-hez és $z \in \mathbb{C}$-hez létezik olyan $s_n \to \xi$, $\operatorname{Re} s_n > 1$ sorozat, melyre $f(s_n) \to z$).

(Maga Balázs)

1. Megoldás (Zeta-függvény és Baire kategória nélkül): Először igazolunk néhány technikai állítást.

1. Legyen $s = a + bi$, ahol $a > 0$. Belátjuk, hogy
$$\left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right| < \frac{a+|b|}{n^{a+1}}.$$
Ehhez írjuk fel $\frac{1}{n^s}$-et $\frac{1}{n^a}e^{-ib\log n}$ alakban. Látható, hogy az abszolútérték $\frac{1}{n^a}$, az argumentum pedig $-b\log n$. Használva a háromszög-egyenlőtlenséget, valamint, hogy két azonos abszolútértékű komplex szám távolsága kisebb az argumentumuk különbségének és az abszolútértékük szorzatánál adódik, hogy
$$\left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right| < \left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{(n+1)^a}\right) + \frac{1}{n^a}|b|(\log(n+1) - \log n).$$
Itt az első tagot az $\frac{1}{x^a}$ függvény deriváltjának segítségével becsülve, a második tagnál pedig a $\log(1+x) \leq x$ egyenlőtlenséget használva adódik az állítás.

2. Ebből könnyen adódni fog, hogy bár az $\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ sor csak $a > 1$ esetén abszolút konvergens, de a tagok párosításával adódó
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^s} - \frac{1}{(2n)^s}\right)$$
sor (mely persze ugyanott konvergens, ahol $\eta(s)$, és az összege is ugyanaz) már abszolút konvergens $a > 0$ esetén is. Valóban,
$$\left|\frac{1}{(2n-1)^s} - \frac{1}{(2n)^s}\right| < \frac{a+|b|}{(2n-1)^{a+1}},$$
ami $a + 1 > 1$ miatt szummábilis.

3. Megmutatjuk továbbá, hogy $\eta(s)$ folytonos az $a > 0$ nyílt félsíkon. Ehhez elegendő, hogy minden $K > 0$ számra a párosítással kapott sor egyenletesen konvergens az $\frac{1}{K} \leq a \leq K$ és $|b| \leq K$ feltételek által meghatározott téglalapon. Ez azonban világos, ha a fenti becslést a következőképpen folytatjuk:
$$\frac{a+|b|}{(2n-1)^{a+1}} \leq \frac{2K}{(2n-1)^{\frac{1}{K}+1}}.$$

4. Most meggondoljuk, hogy a feladat megoldásához elegendő belátni, hogy a $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{(2n)^s}$ sornak megválaszthatók úgy $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ előjelei, hogy a kapott sor minden $\{\operatorname{Re} s = 1\}$-et kielégítő pontban mindenhova torlódjon. Valóban, tegyük fel, hogy létezik ilyen előjelválasztás. Mivel $\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ folytonos $\{\operatorname{Re} s = 1\}$ pontjaiban, és g ezen egyenes minden pontjában mindenhova torlódik, ugyanez teljesül $2g + \eta$-ra. Másrészt $2g + \eta$ olyan alakú, mint a feladat által megkövetelt f (tagonként összegezhetünk a $\{\operatorname{Re} s > 1\}$-en való abszolút konvergencia miatt). Így valóban elegendő a fentit kielégítő g létezését igazolni.

5. Tovább redukálva a feladatot meggondoljuk, hogy elegendő az $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ előjeleket úgy megválasztani, hogy a $h(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^s}$ sor $\{\operatorname{Re} s = 1\}$ minden pontjában mindenhová torlódjon. Valóban, ha $h(s)$ ilyen tulajdonságú, akkor $g(s) = \frac{1}{2^s}h(s)$ is, hiszen 2^s folytonos, és sehol sem nulla.

6. Most belátjuk, hogy tetszőleges $\xi \in \{\operatorname{Re} s = 1\}$ és $N \in \mathbb{N}^+$ esetén az
$$\left\{\sum_{n=N}^{M-1} \frac{\varepsilon_n}{n^\xi} \;\middle|\; M > N,\ \varepsilon_n \in \{0, 1\}\ (n = N, ..., M-1)\right\}$$
halmaz sűrű $\mathbb{C}$-ben.

Legyen $\xi = 1 + it$. Ekkor
$$\frac{1}{n^\xi} = \frac{1}{n}e^{-it\log n},$$
azaz az abszolút érték $\frac{1}{n}$, az argumentum pedig $-t\log n$. Itt a szomszédos argumentumok különbsége monoton csökkenő módon tart a 0-hoz. Ebből könnyen meggondolhatóan következik, hogy bármilyen kis

szögtartományban pozitív felső sűrűséggel vannak a tagok. Így minden szögtartományon belül divergens az abba eső tagok összege. Ha ugyanis H pozitív felső sűrűségű, akkor legyártható $1 = i_1 < i_2 < \cdots$ sorozat, hogy minden $H \cap [i_k, i_{k+1})$ legalább ϱi_{k+1} elemet tartalmaz valamilyen $\varrho > 0$-ra. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy ϱi_{k+1} mindig egész, nyilván ilyen választás is lehetséges ϱ esetleges (k-tól függő) csökkentésével. Így

$$\sum_{n\in H} \frac{1}{n} > \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=(1-\varrho)i_{k+1}}^{i_{k+1}-1} \frac{1}{n}.$$

Itt adott k-ra a belső összegre a következő alsó becslés adható:

$$\log i_{k+1} - \log((1-\varrho)i_{k+1}) = -\log(1-\varrho),$$

azaz az alsó becsléseket követően kapott sor még mindig divergens. Így valóban teljesül, hogy minden szögtartományon belül divergens az abba eső tagok összege.

Másrészt itt a tagok abszolút értéke tart a 0-hoz. Ebből a

$$\sum_{n=N}^{M-1} \frac{\varepsilon_n}{n^{\xi}}$$

összegek halmazának sűrűsége már könnyen adódik: ha egy z komplex számot akarunk közelíteni, az 1 előjelekkel hagyatkozhatunk egy kis, $\arg z$-ra centrált szögtartományra, és azon belül az abszolút értéket is tetszőleges pontossággal beállíthatjuk, miközben minden más előjel helyébe 0-t írunk.

7. Legyen X egy megszámlálható sűrű halmaz $\{\mathrm{Re}\, s = 1\}$-ben, Z pedig egy megszámlálható sűrű halmaz $\mathbb{C}$-ben. Könnyen látható, hogy a kívánt tulajdonságú h létezéséhez elegendő olyan h-t konstruálni, ami X minden pontjában torlódik Z minden pontjához.

   Tetszőleges $m \in \mathbb{N}^+$, $\xi \in X$ és $z \in Z$ esetén legyen

   $$H(m, \xi, z) = \left\{ (\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^+} \;\middle|\; \exists w \in \{\mathrm{Re}\, s > 1\} : |\xi - w| < \frac{1}{m}, |z - h(w)| < \frac{1}{m} \right\}.$$

   Készen leszünk a feladat megoldásával, ha megmutatjuk, hogy

   $$\bigcap_{m\in\mathbb{N}^+} \bigcap_{\xi\in X} \bigcap_{z\in Z} H(m,\xi,z) \neq \emptyset.$$

8. Most rekurzióval legyártunk egy sorozatot, ami ebben a metszetben lesz. Soroljuk fel az $\mathbb{N}^+ \times X \times Z$ halmazt: $\mathbb{N}^+ \times X \times Z = \{(m_j, \xi_j, z_j) \mid j \in \mathbb{N}^+\}$.

   Legyen $N_0 = 1$. A rekurzió j-ik lépésében már legyen adott N_{j-1}, valamint az $(\varepsilon_n)_{n=1}^{N_{j-1}-1}$ előjelek. Válasszunk a 6. pont alapján egy $M > N_{j-1}$-et, valamint $(\varepsilon_n)_{n=N_{j-1}}^{M-1}$ előjeleket úgy, hogy

   $$\left| z_j - \sum_{n=1}^{M-1} \frac{\varepsilon_n}{n^{\xi_j}} \right| < \frac{1}{2m_j}.$$

   Folytonosság alapján választhatunk egy $w_j \in \mathbb{C}$ számot úgy, hogy $\mathrm{Re}\, w_j > 1$, $|\xi_j - w_j| < \frac{1}{m_j}$ és

   $$\left| z_j - \sum_{n=1}^{M-1} \frac{\varepsilon_n}{n^{w_j}} \right| < \frac{1}{2m_j}.$$

   Az abszolút konvergencia miatt választhatunk egy $N_j \geq M$ számot úgy, hogy

   $$\sum_{n=N_j}^{\infty} \frac{1}{|n^{w_j}|} < \frac{1}{2m_j}.$$

   Végül az $(\varepsilon_n)_{n=M}^{N_j-1}$ előjeleket válasszuk mind 0-nak.

   Könnyen ellenőrizhető, hogy minden j-re a w_j pont tanúsítja, hogy $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty} \in H(m_j, \xi_j, z_j)$, amivel a bizonyítást befejeztük. $\square$

2. Megoldás (Zeta-függvényes): Ez a megoldás bizonyos vonásaiban hasonlít az 1. Megoldásra, de bizonyos előismeretek felhasználásával elegánsabb gondolatmenethez vezet, s a kapott eredmény is erősebb. Azt nyerjük ugyanis, hogy a generikus előjelválasztásra teljesül a feladat állítása.

1. Először meggondoljuk, hogy a $\{-1, 1\}$ előjelhalmaz $\{0, 1\}$-gyel helyettesíthető, ezzel könnyítve a későbbi technikai részleteket.

   Elegendő ugyanis azt igazolni, hogy alkalmas előjelválasztás a $\{\operatorname{Re} s = 1\}$ egy sűrű részhalmazán kielégíti a feladat állítását. Rögzítsünk hát egy megszámlálható $A \subseteq \{\operatorname{Re} s = 1\}$ sűrű halmazt, ami nem tartalmazza az 1-et. Legyen
   $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$
   a Riemann-zeta függvény, ez folytonosan terjed ki A-ra. Ekkor az $f(s) + \zeta(s)$ Dirichlet-sor együtthatói a $\{0, 2\}$-ből kerülnek ki (tagonként összegezhetünk a $\{\operatorname{Re} s > 1\}$-en való abszolút konvergencia miatt), és ζ folytonos kiterjedése miatt f pontosan akkor torlódik A pontjaiban mindenhova, ha $f + \zeta$. Ezen a 2-vel történő osztás sem módosít, így valóban áttérhetünk $\{0, 1\}$ előjelhalmazra.

2. A lehetséges előjelsorozatok tere $\{0, 1\}^{\omega}$, lássuk el ezt a szorzattopológiával. Ez ekkor teljesen metrizálható, így teljesül rá a Baire-kategóriatétel: nyílt, sűrű halmazok megszámlálható metszete nemüres. Be fogjuk látni, hogy a feltételnek eleget tevő előjelsorozatok halmaza tartalmaz egy ilyen metszetet, ezzel igazolva az állítást.

3. A kérdéses előjelsorozatok halmaza felírható megszámlálható metszetként így:
   $$\{(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty} \mid \forall \xi \in A\text{-ban } f \text{ mindenhova torlódik}\} =$$
   $$\bigcap_{\xi \in A} \bigcap_{z \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \left\{ (\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty} \;\middle|\; \exists w \in \{\operatorname{Re} s > 1\} : |\xi - w| < \frac{1}{m}, |z - f(w)| < \frac{1}{m} \right\}.$$
   Elegendő, hogy itt a legbelső halmaz nyílt és sűrű: ezt a továbbiakban jelölje $H(m, \xi, z)$.

4. $H(m, \xi, z)$ nyílt: tegyük fel, hogy $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty} \in H(m, \xi, z)$, tanúsítsa ezt egy w pont, és legyen f az előjelsorozathoz tartozó függvény. Ekkor $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ N-ik báziskörnyezete azon előjelsorozatokat tartalmazza, melyeknek első N tagja $(\varepsilon_n)_{n=1}^{N}$. Tegyük fel, hogy f_N előjelsorozata is ebből a báziskörnyezetből kerül ki. Ekkor
   $$|f_N(w) - f(w)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^w} \right|,$$
   mely korlát $N \to \infty$ esetén tart a 0-hoz. Így elég nagy N-re w az $f_N \in H(m, \xi, z)$ relációt is tanúsítja, azaz elég nagy N-re $H(m, \xi, z)$ tartalmazza $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ N-ik báziskörnyezetét, igazolva a pontunk állítását.

5. $H(m, \xi, z)$ sűrű: elég az, hogy ha már N előjelet rögzítettünk, rögzíthető a többi úgy, hogy $H(m, \xi, z)$-beli előjelsorozatot kapjunk. Az előző megoldás 6. pontja alapján tetszőleges $\xi \in \{\operatorname{Re} s = 1\}$ és $N \in \mathbb{N}^+$ esetén az
   $$\left\{ \sum_{n=N+1}^{M} \frac{\varepsilon_n}{n^{\xi}} \;\middle|\; M > N,\ \varepsilon_n \in \{0, 1\}\ (n = N+1, ..., M) \right\}$$
   halmaz sűrű $\mathbb{C}$-ben. Speciálisan beállítható úgy ${\varepsilon_n}_{N+1}^{M}$, hogy $\sum_{n=1}^{M} \frac{\varepsilon_n}{n^{\xi}}$ a z pont $\frac{1}{2m}$ környezetében legyen. Az összes ezt követő előjelet viszont 0-ra rögzíthetjük. Így mivel ez a véges összeg folytonos ξ-ben, ξ-hez elég közeli ξ' pontban $\sum_{n=1}^{M} \frac{\varepsilon_n}{n^{\xi'}}$ a z pont $\frac{1}{m}$ környezetében lesz. Ez igazolja, hogy $H(m, \xi, z)$ sűrű, készen vagyunk. □

9. A síkvektorok az összeadásra nézve csoportot alkotnak. Mutassuk meg, hogy ennek a csoportnak minden olyan S halmaz generátorrendszere, amely tartalmazza egy körív pozitív lineáris mértékű Borel részhalmazát.

(Laczkovich Miklós)

1. Megoldás: A feltételből következik, hogy megadhatóak diszjunkt zárt $I_1, I_2 \subset [0, 2\pi)$ intervallumok egy π-nél rövidebb intervallumon belül, és bennük pozitív Lebesgue mértékű Borel $B_i \subset I_i$ halmazok úgy, hogy az adott (a, b) középpontú r sugarú kör minden $t \in B_1 \cup B_2$ szöghöz tartozó pontja S-ben van, azaz $(a + r\cos t, b + r\sin t) \in S$. Legyen

$$F(t_1, t_2) = (a + r\cos t_1, b + r\sin t_1) + (a + r\cos t_2, b + r\sin t_2) \qquad (t_i \in I_i).$$

Mivel F Jacobi determinánsa $r^2 \sin(t_2 - t_1)$ pozitív $I_1 \times I_2$-n, ezért F pozitív Lebesgue mértékű halmazt pozitív mértékűbe visz. Másrészt Fubini tétel miatt $B_1 \times B_2$ pozitív Lebesgue mértékű Borel halmaz, így $F(B_1 \times B_2)$ is pozitív Lebesgue mértékű mérhető halmaz. Mivel definíció szerint $F(B_1 \times B_2) \subset S + S$, ezért ebből az következik, hogy az S által generált csoport tartalmaz pozitív mértékű mérhető halmazt.

Steinhaus tétele szerint ha $H \subset \mathbb{R}^n$ pozitív mértékű mérhető halmaz, akkor $H - H$ tartalmaz gömböt. Így a fentiek alapján az S által generált csoport tartalmaz körlapot, tehát S generátorrendszer. □

2. Megoldás: Legyen $E \subset [0, 2\pi)$ szögek olyan pozitív mértékű Borel halmaza, melyek mindegyikéhez az adott köríven S-beli pont tartozik. A Lebesgue sűrűségi tétel szerint az E halmaz majdnem minden pontja sűrűségi pont, így megadhatóak olyan azonos hosszú diszjunkt $[a_i, b_i] \subset [0, 2\pi)$ $i = 1, 2, 3$ intervallumok, melyek mindegyikében E sűrűsége több mint $2/3$. Legyenek A_i és B_i az a_i illetve b_i szögeknek megfelelő pontok a köríven. Mivel az intervallumok egyforma hosszúak, ezért az A_1B_2 és A_2B_1 szakaszok párhuzamosak. A sűrűségi feltétel miatt pozitív mértékű mérhető sok szöghöz tartozik olyan $X_1, X_2 \in S$ pontpár az A_1 és B_1 illetve A_2 és B_2 közötti köríven, melyek által meghatározott szakasz párhuzamos az A_1B_2 és A_2B_1 szakaszokkal. Nem nehéz ellenőrizni, hogy ezen szakaszok hosszai is pozitív mértékű mérhető halmazt alkotnak. Tehát az S által generált csoport tartalmaz A_1B_2 irányban pozitív mértékű sok vektort.

Steinhaus tétele szerint ha $H \subset \mathbb{R}$ pozitív mértékű mérhető halmaz, akkor $H - H$ tartalmaz szakaszt. Így a fentiek alapján az S által generált csoport tartalmaz A_1B_2 irányban szakaszt, amiből következik, hogy tartalmazza a teljes origón átmenő A_1B_2 irányú egyenest. Ugyanígy megkaphatjuk a teljes origón átmenő A_1B_3 irányú egyenest is. Mivel ezek különböző egyenesek, ezért S a teljes síkot generálja. □

10. Létezik-e $f\colon \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ folytonos függvény, melyre minden irracionális szám ősképének pozitív a Hausdorff-dimenziója?

(Balka Richárd, Elekes Márton, Kiss Viktor)

Megoldás (kitűzők): Indirekt tegyük fel, hogy létezik ilyen f.

Feltehető, hogy f a $(0, 1) \setminus \mathbb{Q}$-n van definiálva: ehhez elég, hogy létezik olyan $\varphi\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$ lokálisan bi-Lipschitz homeomorfizmus, mely az irracionális számokat irracionálisba, a racionálisakat racionálisba viszi (lokálisan bi-Lipschitz leképezés tartja a Hausdorff-dimenziót). Ilyet könnyű találni, vagy képlettel megadunk racionális törtfüggvényt, vagy végtelen töröttvonalat konstruálunk rekurzívan racionális töréspontokkal.

Tekintsük a gráf lezárását, ez legyen az F zárt halmaz $[0, 1] \times \mathbb{R}$-ben. Minden $q \in \mathbb{Q}$-ra az F^q vízszintes szekció megszámlálható, mivel csak racionális pontja lehet a folytonosság miatt. Tehát az indirekt feltevésből $\{y \in \mathbb{R} \mid \dim_H F^y = 0\} = \mathbb{Q}$. Ismert, hogy $\mathbb{Q}$ nem G_δ halmaz (azaz nem megszámlálható sok nyílt halmaz metszete).

Igazoljuk, hogy $\{y \mid \dim_H F^y = 0\}$ egy G_δ halmaz, ami ellentmondás. Ismert, hogy A null Hausdorff-dimenziós akkor és csak akkor, ha $H^{1/n}_\infty(A) < 1/n$ minden n-re, ahol $H^{1/n}_\infty$ az $1/n$-dimenziós Hausdorff előmérték átmérő-korlátozás nélkül, azaz

$$H^{1/n}_\infty(A) = \inf\Big\{\sum \mathrm{diam}(I_i)^{1/n} \;\Big|\; I_1, I_2, \ldots \text{ nyílt intervallumok, } A \subset \bigcup_i I_i\Big\}.$$

Elég tehát belátni, hogy $\big\{y \;\big|\; H^{1/n}_\infty(F^y) < 1/n\big\}$ nyílt, hiszen a halmazunk ezek metszete.

Ehhez elég megmutatni, hogy tetszőleges $U \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz és $N > 0$ esetén az $Y = \{y \in [-N, N] \mid F^y \not\subset U\}$ halmaz zárt. Mivel $Y = \{y \in [-N, N] \mid (\exists x \in \mathbb{R})\ x \notin U, (x, y) \in F\}$, ezért a kompakt $F \cap \big(([0, 1] \setminus U) \times [-N, N]\big)$ halmaz merőleges vetülete az y tengelyre épp Y, ami tehát zárt. $\square$

10.1. Megjegyzés: Hausdorff-dimenzió helyett pakolási- vagy felső box-dimenzióra pozitív lenne a válasz a feladat kérdésére.