A 2021. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

2021. október 22. - 2021. november 2.

1. feladat. Legyen $n, m \in \mathbb{N}$; $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}^n$. Mutassuk meg, hogy ezen vektorok nemnegatív egész együtthatós lineáris kombinációi pontosan akkor adják ki a teljes $\mathbb{Z}^n$ rácsot, ha $m \geq n$ és az alábbi két állítás teljesül:

1) a vektorok nem esnek $\mathbb{R}^n$ egy origót tartalmazó félterébe (azaz nem esnek egy $n-1$ dimenziós altér ugyanazon oldalára),
2) az $(a_1, \ldots, a_m)$ mátrix (amely $m \times n$ típusú, és az i-edik oszlopa a_i mint oszlopvektor) összes $n \times n$-es minorai determinánsainak (nem páronkénti, hanem együttes) legnagyobb közös osztója 1.

2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a

$$2^x + 5^y - 31^z = n!$$

egyenletnek csak véges sok megoldása van az x, y, z, n nemnegatív egészekre nézve.

3. feladat. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ egy nemüres nyílt intervallum és $f : I \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely minden $x, y \in I \cap \mathbb{Q}$ esetén teljesíti az

$$4f\left(\frac{3x+y}{4}\right) + 4f\left(\frac{x+3y}{4}\right) \leq f(x) + 6f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(y)$$

egyenlőtlenséget. Mutassuk meg, hogy ekkor f folytonosan kiterjeszthető I-re.

4. feladat. Legyen I a pozitív valós számok halmazának egy nemüres nyílt részintervalluma. Milyen páros $n \in \mathbb{N}$ esetén léteznek olyan $f : I \to \mathbb{R}$ injektív és $p : I \to \mathbb{R}$ pozitív függvények, hogy minden $x_1, \ldots, x_n \in I$ esetén

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}\right)\right) = \frac{p(x_1)f(x_1) + \cdots + p(x_n)f(x_n)}{p(x_1) + \cdots + p(x_n)}$$

teljesül?

5. feladat. Legyen $f(x) = \dfrac{1 + \cos(2\pi x)}{2}$, ha $x \in \mathbb{R}$ és $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n}$. Igaz-e, hogy Lebesgue majdnem minden x-re $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 1$?

6. feladat. Legyenek f és g 2π-periodikus integrálható függvények úgy, hogy a 0 egy környezetében $g(x) = f(ax)$ valamilyen $a \neq 0$-val. Igazoljuk, hogy f és g Fourier-sora egyszerre konvergens vagy divergens a 0 pontban.

7. feladat. Ha a k és n pozitív egészek kettes számrendszerbeli alakja rendre $k = \sum_{i=0}^{\infty} k_i 2^i$ és $n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i$, akkor ezen számok logikai összegén a

$$k \oplus n = \sum_{i=0}^{\infty} |k_i - n_i| \, 2^i$$

mennyiséget értjük. Legyen N egy tetszőleges pozitív egész, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pedig egy olyan komplex számsorozat, melyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $|c_k| \leq 1$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor vannak olyan C és δ pozitív konstansok, hogy

$$\int_{[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]} \sup_{\substack{n<N \\ n\in\mathbb{N}}} \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i(kx+(k\oplus n)y)} \right| \mathrm{d}(x,y) \leq C \cdot N^{-\delta}$$

teljesül.

8. feladat. Igazoljuk, hogy egy 2-dimenziós Riemann-sokaságon pontosan akkor létezik zérus görbületű metrikus lineáris konnexió, ha a Riemann-sokaság Gauss-görbülete felírható egy vektormező divergenciájaként.

9. feladat. Egy adott n természetes számra két játékos véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) választ egy közös $0 \leq j \leq n$ számot, majd egymástól függetlenül mindegyikük véletlenszerűen kiválasztja $\{1, 2, \ldots, n\}$ egy j elemű részhalmazát. Legyen p_n annak a valószínűsége, hogy ugyanazt a halmazt választották. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 2\log n + 2\gamma - 1 + \mathrm{o}(1), \qquad (n \to \infty),$$

ahol γ az Euler-féle konstans.

10. feladat. Tekintsünk egy érmét, amelyen a fej dobás valószínűsége p, ahol $0 < p < 1$ rögzített. Dobjuk fel az érmét többször, a dobások legyenek egymástól függetlenek. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik, $(i+1)$-edik, ..., $(i+m-1)$-edik dobások közül pontosan T az írás. $T = 1$ esetén számoljuk ki a $\mathbb{P}(\overline{A}_2\overline{A}_3\cdots\overline{A}_m|A_1)$ feltételes valószínűséget, $T = 2$ esetén pedig adjunk $\mathbb{P}(\overline{A}_2\overline{A}_3\cdots\overline{A}_m|A_1)$-re $a + \frac{b}{m} + \mathrm{O}\left(p^m\right)$ alakú közelítést, amint $m \to \infty$.

A megoldások beküldési határideje 2021. november 2-án (kedden) magyar idő szerint 12.00 óra, ezeket magyar nyelven, nyomtatva vagy jól olvashatóan tintával, feladatonként külön papírra írva, továbbá a versenyzők nevének, évfolyamának, végzettségének, pontos lakcímének és e-mail címének feltüntetésével kell elküldeni elektronikusan pdf formátumban a nagyg@science.unideb.hu és pinki@science.unideb.hu címekre. A megoldásokat egy levélben kérjük, feladatonként külön fájlban. Ha valaki nem tudja megoldani az elektronikus benyújtást, akkor ugyanazon időpontig ajánlottan postára kell adni a versenybizottság címére:

Nagy Gergő és/vagy Pink István,
Debreceni Egyetem Matematikai Intézet
4032 Debrecen, Egyetem tér 1.