A 2021. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai és megoldásaik

1. feladat (Hajdu Lajos). Legyen $n, m \in \mathbb{N}$; $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}^n$. Mutassuk meg, hogy ezen vektorok nemnegatív egész együtthatós lineáris kombinációi pontosan akkor adják ki a teljes $\mathbb{Z}^n$ rácsot, ha $m \geq n$ és az alábbi két állítás teljesül:

1) a vektorok nem esnek $\mathbb{R}^n$ egy origót tartalmazó félterébe (azaz nem esnek egy $n-1$ dimenziós altér ugyanazon oldalára),

2) az $(a_1, \dots, a_m)$ mátrix (amely $m \times n$ típusú, és az i-edik oszlopa a_i mint oszlopvektor) összes $n \times n$-es minorai determinánsainak (nem páronkénti, hanem együttes) legnagyobb közös osztója 1.

Megoldás. (Hajdu Lajos) *Szükségesség.* Mivel $\mathbb{Z}^n$ dimenziója n, így $m \geq n$ nyilván szükséges. Az 1) feltétel is az, ugyanis ha $a_1, \dots, a_m$ egy origót tartalmazó T féltérbe esnek, akkor ugyanez igaz nemnegatív egész (sőt, valós) együtthatós lineáris kombinációikra is. Végül, ha $a_1, \dots, a_m$ nemnegatív egész együtthatós kombinációiként minden $\mathbb{Z}^n$-beli vektor előáll, akkor persze a vektorrendszer generálja $\mathbb{Z}^n$-et $\mathbb{Z}$ fölött. Tekintsük $\mathbb{Z}^n$ egy tetszőleges ($\mathbb{Z}$ fölötti) $b_1, \dots, b_n$ bázisának előállítását $a_1, \dots, a_m$ segítségével. Az e bázis vektoraiból képzett mátrix determinánsa ± 1, így

$$\pm 1 = \det(b_1, \dots, b_n) = \det\left(\sum_{i=1}^{m} u_i^{(1)} a_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} u_i^{(n)} a_i\right)$$

a determináns additivitása miatt mutatja 2) szükségességét is. (Itt az $u_i^{(j)}$-k a b_j előállításában fellépő egész együtthatók, és itt is oszlopvektor jelölést használunk: a mátrixok oszlopai a megfelelő oszlopvektorok.)

Elegendőség. Az $m \geq n$ feltételből és 1)-ből következik, hogy $\mathbb{Q}^n$ bármely vektora előáll $a_1, \dots, a_m$ nemnegatív racionális együtthatókkal képzett lineáris kombinációjaként. (Valóban, az ilyen alakban (kúpkombinációként) előálló vektorok véges sok féltér metszetében találhatóak, ám már maguk a kiinduló vektorok pozitív racionális skalárszorosai sem teljesítik ezt a feltételt. Így az egyetlen lehetőség az, hogy a kombinációk halmaza $\mathbb{Q}^n$.) Legyen

$$-a_i = x_1^{(i)} a_1 + \dots + x_m^{(i)} a_m \quad (1 \leq i \leq m),$$

ahol az $x_j^{(i)}$-k nemnegatív racionális számok. Legyen t ezen együtthatók (pozitív) közös nevezője. Ekkor

$$-t a_i = y_1^{(i)} a_1 + \dots + y_m^{(i)} a_m \quad (1 \leq i \leq m),$$

ahol az $y_j^{(i)}$-k nemnegatív egészek. Így persze

$$-a_i = (t-1) a_i + y_1^{(i)} a_1 + \dots + y_m^{(i)} a_m \quad (1 \leq i \leq m),$$

vagyis $-a_i$ $(i = 1, \dots, m)$ előáll a vektoraink nemnegatív egész együtthatós kombinációjaként. Ebből következően az $a_1, \dots, a_m$ vektorok összes nemnegatív egész együtthatós kombinációi egy rácsot alkotnak ($\mathbb{Z}^n$ egy részrácsát). Már csak azt kell megmutatnunk, hogy ez a rács a teljes $\mathbb{Z}^n$. Ehhez használjuk a következő Lemmát, és annak egy következményét.

1.1. Lemma (Cassels [1], Lemma 2, 15. oldal). *Legyenek $b_1, ..., b_k$ lineárisan független vektorok $\mathbb{Z}^n$-ben ($k \le n$). Ez a vektorrendszer pontosan akkor egészíthető ki $\mathbb{Z}^n$ bázisává ($\mathbb{Z}$ fölött), ha a $(b_1, ..., b_k)$ mátrix (a szokásos jelöléssel) összes $k \times k$-s minorai determinánsainak (mint rendszernek) legnagyobb közös osztója* 1.

1.2. Következmény. *Egy egész elemű mátrix pontosan akkor egészíthető ki (kizárólag sorok vagy kizárólag oszlopok hozzávételével) unimoduláris mátrixszá, ha maximális rendű minorai aldeterminánsainak legnagyobb közös osztója* 1.

A 2) feltétel és az 1.2 Következmény miatt az $a_1, \dots, a_m$ vektorok "meghosszabbíthatók" (azaz $m - n$ komponenssel kiegészíthetők) úgy, hogy az így keletkező vektorok $\mathbb{Z}^m$ egy bázisát adják ($\mathbb{Z}$ fölött). De akkor persze az eredeti $a_1, \dots, a_m$ vektorrendszer szükségképpen generálja $\mathbb{Z}^m$ első n komponensét, vagyis $\mathbb{Z}^n$-et ($\mathbb{Z}$ fölött).

Tehát $m \ge n$ esetén az 1) és 2) tulajdonságokból következik, hogy a vektoraink nemnegatív egész együtthatós kombinációi előállítják $\mathbb{Z}^n$-et.

Hivatkozás. [1] J. W. S. Cassels, *An introduction to the geometry of numbers*, Springer-Verlag, Berlin, 1959.

1.3. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy a jellemzésben szereplő 1) feltétel helyettesíthető ezzel a feltétellel:

1') Minden $\mathbb{R}^n$-beli nemnulla b vektorhoz található olyan i ($1 \le i \le m$), hogy $(b, a_i) < 0$ teljesül (ahol $(.,.)$ a belső szorzat).

□

2. feladat (Hajdu Lajos). Bizonyítsuk be, hogy a

$$2^x + 5^y - 31^z = n!$$

egyenletnek csak véges sok megoldása van az x, y, z, n nemnegatív egészekre nézve.

Megoldás. (Hajdu Lajos) Vegyük észre, hogy az egyenletnek nincs olyan x, y, z, n megoldása, melyre $n \ge 31$ teljesülne. Valóban, $n \ge 31$ esetén egyenletünkből

$$2^x + 5^y \equiv 0, 1 \pmod{31}$$

adódna, aszerint, hogy $z > 0$ vagy $z = 0$. A fenti kongruencia viszont nem megoldható, hiszen 2 és 5 hatványai modulo 31 rendre $1, 2, 4, 8, 16$ és $1, 5, 25$. Így egyenletünk erre a véges sok esetre redukálódik:

$$2^x + 5^y - 31^z = n! \quad (0 \le n \le 30).$$

Azonban ezen egyenletek mindegyikének az exponenciális diofantikus egyenletek egy klasszikus eredménye szerint csupán véges sok megoldása van (lásd például Evertse-Győry [1] 132. oldalán Theorem 6.1.3-at). Innen állításunk közvetlenül adódik.

Hivatkozás. [1] J.-H. Evertse, K. Győry, *Unit equations in Diophantine number theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

2.1. Megjegyzés. Sok számolással valószínűleg az egyenlet összes megoldása meghatározható, megfelelő modulusok segítségével, de ez nem túl egyszerű.

□

3. feladat (Páles Zsolt). Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ egy nemüres nyílt intervallum és $f : I \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely minden $x, y \in I \cap \mathbb{Q}$ esetén teljesíti az

$$4f\left(\frac{3x+y}{4}\right) + 4f\left(\frac{x+3y}{4}\right) \leq f(x) + 6f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(y)$$

egyenlőtlenséget. Mutassuk meg, hogy ekkor f folytonosan kiterjeszthető I-re.

Megoldás. (Páles Zsolt) Értelmezzük egy tetszőleges $g : I \to \mathbb{R}$ függvény n-edrendű osztott differenciáját az alábbi képlettel:

$$g[x_0, x_1, \dots, x_n] := \sum_{i=0}^{n} \frac{g(x_i)}{\prod_{j \in \{0,\dots,n\} \setminus \{i\}} (x_i - x_j)},$$

ahol $x_0, \dots, x_n$ az I intervallum páronként különböző elemei. Az osztott differenciákra vonatkozó alábbi lemma jól ismert, bizonyítása elemi és megtalálható pl. [1, Chapter XV, Lemma 2.6]-ban.

3.1. Lemma. *Legyen* $1 \leq n \leq m$ *és* $u_0 < u_1 < \cdots < u_m$ *tetszőleges* I*-beli elemek. Ekkor bármely* $0 \leq j_0 < j_1 < \cdots < j_n \leq m$ *indexek esetén léteznek olyan* $c_0, \dots, c_{m-n}$ nemnegatív *számok, hogy*

$$g[u_{j_0}, u_{j_1}, \dots, u_{j_n}] = \sum_{i=0}^{m-n} c_i g[u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+n}]$$

minden $g : I \to \mathbb{R}$ *függvény esetén teljesül.*

Ezek után vegyük észre, hogy a feladatbeli feltétel azzal ekvivalens, hogy f teljesíti az

$$f\left[x, \frac{3x+y}{4}, \frac{x+y}{2}, \frac{x+3y}{4}, y\right] \geq 0$$

egyenlőtlenséget minden $I \cap \mathbb{Q}$-beli egymástól különböző x, y elemek esetén. A Lemmát felhasználva megmutatjuk, hogy ekkor

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \geq 0$$

minden $I \cap \mathbb{Q}$-beli páronként különböző x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 elemekre is érvényes. Az osztott differenciák szimmetriája miatt feltehetjük, hogy $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

Legyen $u_0 < u_1 < \cdots < u_m$ egy olyan I-beli racionális számokból álló *számtani* sorozat, amelynek elemei között az x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 elemek megtalálhatók, azaz vannak olyan $0 \leq j_0 < j_1 < j_2 < j_3 < j_4 \leq m$ indexek, hogy $x_i = u_{j_i}$, ha $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ekkor a Lemma szerint vannak olyan $c_0, \dots, c_{m-4}$ nemnegatív számok, hogy

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = f[u_{j_0}, u_{j_1}, u_{j_2}, u_{j_3}, u_{j_4}] = \sum_{i=0}^{m-4} c_i f[u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, u_{i+4}].$$

Kihasználva, hogy az $u_0 < u_1 < \cdots < u_m$ számok számtani sorozatot alkotnak és felhasználva a feladatbeli egyenlőtlenség osztott differenciákkal kifejezett alakját látható, hogy

$$f[u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, u_{i+4}] = f\left[u_i, \frac{3u_i + u_{i+4}}{4}, \frac{u_i + u_{i+4}}{2}, \frac{u_i + 3u_{i+4}}{4}, u_{i+4}\right] \geq 0.$$

Így a $c_0, \dots, c_{m-4}$ számok nemnegativitása alapján

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \sum_{i=0}^{m-4} c_i f[u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, u_{i+4}] \geq 0.$$

A megoldás befejező részében belátjuk, hogy ebből a tulajdonságból következik, hogy f Lipschitz folytonos minden $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ alakú halmazon, ahol $[a,b] \subseteq I$.

Legyenek tehát $a, b \in I$, $a < b$ rögzített (nem feltétlen racionális) elemek. Az I nyíltságát kihasználva válasszuk meg az $u_1 < u_2 < u_3 < a$ és $b < v_1 < v_2 < v_3$ rögzített $I \cap \mathbb{Q}$-beli elemeket. Ekkor minden $x, y \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$ esetén

$$f[x, y, u_1, u_2, u_3] \geq 0 \qquad \text{és} \qquad f[x, y, v_1, v_2, v_3] \geq 0. \tag{1}$$

Az első egyenlőtlenség részletesen kiírva azt jelenti, hogy

$$\frac{1}{y-x}\left(\frac{f(y)}{\prod_{j=1}^{3}(y-u_j)} - \frac{f(x)}{\prod_{j=1}^{3}(x-u_j)}\right) \geq -\sum_{i=1}^{3} \frac{f(u_i)}{(u_i - x)(u_i - y)\prod_{j\in\{1,\dots,3\}\setminus\{i\}}(u_i - u_j)}.$$

Az alábbi képlettel megadott leképezés

$$[a,b]^2 \ni (x,y) \mapsto -\sum_{i=1}^{n} \frac{f(u_i)}{(u_i - x)(u_i - y)\prod_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}}(u_i - u_j)}$$

folytonos $[a,b]^2$-n, ezért alulról korlátos valamilyen C konstanssal. Ezért a fenti egyenlőtlenség alapján minden $x, y \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$ esetén

$$\frac{1}{y-x}\left(\frac{f(y)}{U(y)} - \frac{f(x)}{U(x)}\right) \geq C, \tag{2}$$

ahol $U(t) := \prod_{j=1}^{3}(t - u_j)$, ha $t \in [a,b]$. Ekkor U egy szigorúan monoton növő pozitív polinom $[a,b]$ felett. Így $U(a) \leq U \leq U(b)$, továbbá van egy olyan M pozitív szám, hogy $|U'| \leq M$ az $[a,b]$-n. A Lagrange középértéktétel alapján azonnal adódik, hogy U Lipschitz tulajdonságú $[a,b]$ felett az M Lipschitz modulussal. Az $x = a$ helyettesítéssel a fenti egyenlőtlenség szerint

$$f(y) \geq \frac{U(y)}{U(a)} f(a) + U(y)C(y-a) \geq -\frac{U(b)}{U(a)}|f(a)| - U(b)|C|(b-a),$$

ami azt mutatja, hogy f alulról korlátos $[a,b] \cap \mathbb{Q}$-n. Az $y = b$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) \leq \frac{U(x)}{U(b)} f(b) + U(x)C(x-b) \leq |f(b)| + U(b)|C|(b-a),$$

ami pedig azt mutatja, hogy f felülről is korlátos $[a,b] \cap \mathbb{Q}$-n. Így van egy olyan $K \geq 0$ szám, hogy $|f(x)| \leq K$, ha $x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$. Az eddigieket felhasználva, az (2) egyenlőtlenségből $x < y$ esetén kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\geq \frac{U(y) - U(x)}{U(x)} f(x) + U(y)C(y-x) \geq -\frac{U(y) - U(x)}{U(x)}|f(x)| - U(y)|C|(y-x) \\ &\geq -\frac{M(y-x)}{U(a)} K - U(b)|C|(y-x) = -\left(\frac{MK}{U(a)} + U(b)|C|\right)(y-x). \end{aligned}$$

Az (1) alatti második egyenlőtlenségből hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$\frac{1}{y-x}\left(\frac{f(y)}{V(y)} - \frac{f(x)}{V(x)}\right) \geq D, \tag{3}$$

valamilyen D konstanssal, ahol $V(t) := \prod_{j=1}^{3}(t - v_j)$, ha $t \in [a, b]$. Ekkor V egy szigorúan monoton csökkenő negatív polinom $[a, b]$ felett. Így $V(a) \geq V \geq V(b)$, továbbá van egy olyan N pozitív szám, hogy $|V'| \leq N$ az $[a, b]$-n. A Lagrange középértéktétel alapján azonnal adódik, hogy V Lipschitz tulajdonságú $[a, b]$ felett az N Lipschitz modulussal. Ezeket a tulajdonságokat felhasználva $x < y$ esetén a (3) egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\leq \frac{V(y) - V(x)}{V(x)} f(x) + V(y)D(y - x) \leq \left| \frac{V(y) - V(x)}{V(x)} f(x) \right| + |V(y)D|(y - x) \\ &\leq \frac{N|y - x|}{|V(a)|} K + |V(b)||D|(y - x) = \left(\frac{NK}{|V(a)|} + |V(b)||D| \right)(y - x). \end{aligned}$$

Legyen végül

$$L := \max\left(\frac{MK}{U(a)} + U(b)|C|, \frac{NK}{|V(a)|} + |V(b)||D| \right).$$

Az eddigi becsléseket összevetve nyerjük, hogy f Lipschitz folytonos $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ felett az L Lipschitz modulussal.

A bizonyítás befejező lépése elemi. A már igazolt Lipschitz tulajdonságot kihasználva belátható, hogy tetszőleges $x \in I$ és (r_n) racionális tagú x-hez konvergáló sorozat esetén az $(f(r_n))$ sorozat Cauchy-sorozat, amelynek határértéke, amit $g(x)$-szel jelölünk, nem függ a racionális számsorozat választásától. Az így definiált g függvényről az is látható, hogy lokálisan Lipschitz folytonos, tehát folytonos is, és hogy racionális x helyeken g értéke megegyezik $f(x)$-szel.

Hivatkozás. [1] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, vol. 489, Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985. □

4. feladat (Páles Zsolt). Legyen I a pozitív valós számok halmazának egy nemüres nyílt részintervalluma. Milyen páros $n \in \mathbb{N}$ esetén léteznek olyan $f : I \to \mathbb{R}$ injektív és $p : I \to \mathbb{R}$ pozitív függvények, hogy minden $x_1, \ldots, x_n \in I$ esetén

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \right) \right) = \frac{p(x_1)f(x_1) + \cdots + p(x_n)f(x_n)}{p(x_1) + \cdots + p(x_n)}$$

teljesül?

Megoldás. (Borbényi Márton és Gáspár Attila megoldásának néhány gondolatát felhasználva) Ha $n = 2$, akkor

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \sqrt{x_1 x_2} \right) = \left(\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{2} \right)^2,$$

tehát a függvényegyenlet teljesül az $f(x) := \sqrt{x}$ és $p(x) := 1$ képletekkel megadott függvényekkel.

Megmutatjuk, hogy bármely $n \geq 4$ páros szám esetén a feladatbeli függvényegyenletnek nincs injektív f és pozitív p megoldása.

Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy az egyenlet teljesül valamilyen f-re és p-re és $n = 2k$ páros számra, ahol $k \geq 2$.

Legyen a továbbiakban x, y az I intervallum két különböző eleme és $z := \frac{1}{2}(\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy})$. Az egyenletből az $x_1 = \cdots = x_k = x$, illetve $x_{k+1} = \cdots = x_{2k} = y$ helyettesítésekkel az kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(z) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x + y}{2} + \sqrt{xy} \right) \right) = f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2k}}{2k} + \sqrt[2k]{x_1 \cdots x_n} \right) \right) \\ &= \frac{p(x_1)f(x_1) + \cdots + p(x_{2k})f(x_{2k})}{p(x_1) + \cdots + p(x_{2k})} = \frac{p(x)f(x) + p(y)f(y)}{p(x) + p(y)}. \end{aligned}$$

Ezek után az $x_1 = x$, $x_2 = y$ és $x_3 = \cdots = x_n = z$ helyettesítésekkel a függvényegyenletből, az előző egyenlőséget is felhasználva, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{x+y+(n-2)z}{n} + \sqrt[n]{xyz^{n-2}}\Big)\Big) &= \frac{p(x)f(x)+p(y)f(y)+(n-2)p(z)f(z)}{p(x)+p(y)+(n-2)p(z)} \\ &= \frac{(p(x)+p(y))f(z)+(n-2)p(z)f(z)}{p(x)+p(y)+(n-2)p(z)} = f(z). \end{aligned}$$

Mivel f injektív, ezért innen az alábbi egyenlőséghez jutunk:

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{x+y+(n-2)z}{n} + \sqrt[n]{xyz^{n-2}}\Big) = z.$$

A z értelmezéséből adódik, hogy $x + y = 4z - 2\sqrt{xy}$. Ezt a fenti egyenlőségbe helyettesítve, majd azt átrendezve kapjuk, hogy

$$\frac{2\sqrt{xy} + (n-2)z}{n} = \sqrt[n]{xyz^{n-2}}.$$

Ennek az egyenlőségnek a bal-, illetve jobboldala a $(\sqrt{xy}, \sqrt{xy}, z, \ldots, z)$ szám n-es számtani, illetve mértani közepe. Ezért az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $\sqrt{xy} = z$. Ebből a z értelmezése alapján azt kapjuk, hogy $x + y = 2\sqrt{xy}$. Ez pedig csak $x = y$ esetén teljesülhet, ami ellentmond az x és y választásának (t.i. annak, hogy x és y különböznek egymástól). A kapott ellentmondás azt igazolja, hogy a feladatbeli függvényegyenletnek nincs injektív f és pozitív p megoldása. □

5. feladat (Buczolich Zoltán). Legyen $f(x) = \dfrac{1+\cos(2\pi x)}{2}$, ha $x \in \mathbb{R}$ és $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n}$. Igaz-e, hogy Lebesgue majdnem minden x-re $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 1$?

Megoldás. (Gáspár Attila megoldása alapján) Megmutatjuk, hogy majdnem minden $x \in \mathbb{R}$-re $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 1$. Tetszőleges x valós számra $f(x) = f(\{x\})$, ezért elég a $[0,1]$-en igazolni az állítást. f differenciálható és $f'(1) = 0$, ezért valamilyen $]\alpha, 1[$ $(0 < \alpha < 1)$ intervallumon $f(x) > x$. Ellenőrizhető, hogy $f(3/4) = 1/2 < 3/4$. A Bolzano–Darboux-tétel miatt a $[3/4, 1]$ intervallumon $f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ felveszi a 0-t. Az f szigorúan konkáv ezen a halmazon, ezért legfeljebb két ottani pontban veheti fel. Mivel $f(1) = 1$, így az előbbiek miatt $f|_{]3/4,1[}$-nak pontosan egy fixpontja van, mely legyen $1-a$ $(a \in]0, 1/4[)$. Ekkor $f(]1-a, 1]) \subset]1-a, 1]$, az $f|_{]1-a,1]}$ monoton növő és $f(x) \geq x$ $(x \in]1-a, 1])$. Egyszerű érveléssel minden $x \in]1-a, 1]$-re $f^n(x) \to 1$ $(n \to \infty)$. Látható, hogy $f(1-x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Emiatt a $[0, a[$ intervallumon is teljesül, hogy $f^n(x) \to 1$ $(n \to \infty)$. Legyen $A_0 = [a, 1-a]$, továbbá $A_{n+1} = (f|_{[0,1]})^{-1}(A_n)$ tetszőlegesen adott $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$-ra. Ha $x \in [0,1] \setminus A_n$, akkor $f^n(x)$ a $[0,1] \setminus A_0$ halmazban van, amelyen az utóbbiak szerint $f^k(t) \to 1$ $(k \to \infty)$. Tehát $f^n(x) \nrightarrow 1$ $(n \to \infty)$ csak akkor teljesülhet, ha $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$. Így elég azt megmutatni, hogy $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ nullmértékű.

Ellenőrizhető, hogy $A_1 \subset (f|_{[0,1]})^{-1}([0, 1-a]) = A_0$, amiből indukcióval kapjuk, hogy $A_{n+1} \subset A_n$ minden $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$-ra. Látható, hogy A_1-et úgy kapjuk az A_0-ból, hogy kiveszünk belőle egy intervallumot. Mivel az f monoton a $]0, 1/2[$-en és az $]1/2, 1[$-en, $(f|_{[0,1]})^{-1}$ két monoton ágra bontható. Indukcióval látható, hogy minden $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$-ra teljesül, hogy az A_{n+1}-et úgy kapjuk, hogy az A_n összes komponenséből (ezek intervallumok) kiveszünk egy intervallumot, és az is igazolható, hogy a kivett intervallumok az előző lépésben kivettek $f|_{[0,1]}$ általi ősképei. Továbbá az is világos, hogy az A_n halmaz 2^n darab diszjunkt intervallumból áll.

Az f szigorúan konkáv a $[3/4, 1]$ intervallumon, ezért $[3/4, 1-a]$-n $f' > \frac{f(1)-f(1-a)}{1-(1-a)} = 1$. Ellenőrizhető, hogy $f'(1/2 + x) = f'(1-x)$ $(x \in \mathbb{R})$, ezért az $[1/2 + a, 1-a]$ intervallumon is teljesül, hogy $f' > 1$. Az is látható, hogy $(f|_{[1/2,1]})^{-1}(A_0) \subset [1/2 + a, 1-a]$, ezért $|((f|_{[1/2,1]})^{-1})'| < 1$ az A_0-on. A kompaktság miatt van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy az A_0-on $|((f|_{[1/2,1]})^{-1})'| \leq c < 1$. A szimmetria miatt az is teljesül, hogy $|((f|_{[0,1/2]})^{-1})'| \leq c$ az A_0-on. Az A_n-ek komponenseit ezeknek az inverzeknek az ismételt alkalmazásával kapjuk, ezért tetszőlegesen adott $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esetén A_n minden komponense legfeljebb c^n hosszú.

Legyen I az A_n egy komponense, és legyen J az A_{n+1} származtatásakor I-ből kivett intervallum. Jelölje I_0 az $(f|_{[0,1/2]})^{-1}(I)$ halmazt (ez az A_{n+1}-nek komponense), és legyen $J_0 = (f|_{[0,1/2]})^{-1}(J)$. Ekkor J_0 az I_0-ból kivett intervallum. Legyen x, illetve y rendre $|(f|_{[0,1/2]})'|$ minimuma, illetve maximuma I'-n. Világos, hogy $\lambda(I') \leq (1/x)\lambda(I)$ és $\lambda(J') \geq (1/y)\lambda(J)$, ezért

$$\frac{\lambda(J')}{\lambda(I')} \geq \frac{\lambda(J)}{\lambda(I)}\frac{x}{y}.$$

Az $\ln|(f|_{[0,1/2]})'|$ az $A_0 \cap [0,1/2]$-en sima, ezért Lipschitz, ebből következik, hogy $\ln y - \ln x \leq K\lambda(I) \leq Kc^n$ valamilyen $K \in \mathbb{R}$ konstanssal. Emiatt

$$\ln\frac{\lambda(J')}{\lambda(I')} \geq \ln\frac{\lambda(J)}{\lambda(I)} - Kc^n.$$

Ugyanez a gondolatmenet működik akkor is, ha I_0, illetve J_0 rendre az I, illetve J halmaz $(f|_{[1/2,1]})^{-1}$ általi képe. Így indukcióval látható, hogy az A_n tetszőleges I komponensére teljesül, hogy

$$\ln\frac{\lambda(J)}{\lambda(I)} \geq \ln\frac{\lambda(J_0)}{\lambda(A_0)} - \sum_{i=0}^{n-1} Kc^n,$$

ahol J_0 az A_0-ból kivett intervallum. Vegyük észre, hogy $\sum_{i=0}^{\infty} Kc^n$ véges, mert $0 < c < 1$. Emiatt van egy $\varepsilon > 0$, melyre $\lambda(J)/\lambda(I) \geq \varepsilon$ tetszőlegesen adott $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esetén. Ebből következik, hogy $\lambda(A_{n+1}) \leq \lambda(A_n)(1-\varepsilon)$, ezért $\lambda(A_n) \to 0$ $(n \to \infty)$. □

6. feladat (Totik Vilmos). Legyenek f és g 2π-periodikus integrálható függvények úgy, hogy a 0 egy környezetében $g(x) = f(ax)$ valamilyen $a \neq 0$-val. Igazoljuk, hogy f és g Fourier-sora egyszerre konvergens vagy divergens a 0 pontban.

Megoldás. (Gáspár Attila) A g Fourier-sorának az N. részletösszege a 0-ban

$$s_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n,$$

ahol $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\,dx$. Ellenőrizhető, hogy ez nem változik, ha $g(x)$-et $g(-x)$-re cseréljük. Emiatt feltehető, hogy $a > 0$.

Indukcióval látható, hogy

$$s_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx$$

(az $x = 0$ nullmértékű, ezért figyelmen kívül hagyható). Az $N = 0$ eset triviális, az $N \geq 1$ eset pedig a

$$\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(N-\frac{1}{2}\right)x\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos(Nx)$$

azonosságból következik.

Legyen $0 < \delta_0 < \pi$. A $[-\pi,\pi]$ intervallumon

$$g = g\chi_{]-\delta_0,\delta_0[} + g\chi_{[-\pi,\pi]\setminus]-\delta_0,\delta_0[}.$$

A $[-\pi,\pi]\setminus]-\delta_0,\delta_0[$-on az $\frac{1}{\sin(x/2)}$ korlátos, ezért a $\frac{g\chi_{[-\pi,\pi]\setminus]-\delta_0,\delta_0[}}{\sin(x/2)}$ integrálható. A Riemann-Lebesgue-lemma szerint

$$\int_{[-\pi,\pi]\setminus]-\delta_0,\delta_0[} \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)\frac{g(x)}{\sin\frac{x}{2}}\,dx \to 0,$$

ha $N\to\infty$. Így s_N pontosan akkor konvergens, ha az

$$s_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta_0}^{\delta_0}\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}g(x)\,dx$$

konvergens. Emiatt a konvergencia nem változik, ha g helyett $g\chi_{]-\delta_0,\delta_0[}$-ra térünk át. Ha δ_0-t elég kicsinek választjuk, akkor a $]-\delta_0,\delta_0[$ intervallumon $g(x)=f(ax)$. Az f helyett hasonlóan áttérhetünk $f\chi_{]-a\delta_0,a\delta_0[}$-ra. Tehát feltehető, hogy $g(x)=f(ax)$ mindenhol, és egy tetszőlegesen kicsi intervallumon kívül mindkettő 0.

Mivel f és g szerepe felcserélhető elég azt belátni, hogy ha g Fourier-sora konvergens 0-ban, akkor f-é is. Vezessük be valós u esetén az

$$s_u = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\sin\left(\left(u+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}g(x)\,dx$$

jelölést (ez pozitív egész u-ra ugyanaz, mint eddig). Megmutatjuk, hogy ha s_N konvergens, akkor s_u is, ha $u\to\infty$.

Legyen $\varepsilon>0$ és legyen $\delta>0$ olyan kicsi, hogy $\int_{-\delta}^{\delta}|f|\le\varepsilon$. Legyen u tetszőleges valós, és legyen $N=\lfloor u\rfloor$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\begin{aligned}|s_u-s_N| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int\frac{\sin\left(\left(u+\frac{1}{2}\right)x\right)-\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}f(x)\,dx\right|\le\\ &\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{\sin\left(\left(u+\frac{1}{2}\right)x\right)-\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right||f(x)|\,dx+\\ &+\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{R}\setminus]-\delta,\delta[}\frac{\sin\left(\left(u+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}f(x)\,dx\right|+\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{R}\setminus]-\delta,\delta[}\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}f(x)\,dx\right|.\end{aligned}$$

A 0-nak egy környezetében $\left|\sin\frac{x}{2}\right|\ge\frac{|x|}{4}$, feltehető, hogy ezen kívül az f nulla. A szinusz Lipschitz-folytonossága miatt

$$\left|\frac{\sin\left(\left(u+\frac{1}{2}\right)x\right)-\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right|\le\frac{\left|\left(u+\frac{1}{2}\right)x-\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right|}{\frac{|x|}{4}}=4|u-N|\le 4$$

és ezért

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{\sin\left(\left(u+\frac{1}{2}\right)x\right)-\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right||f(x)|\,dx\le\int_{-\delta}^{\delta}4|f(x)|\,dx\le 4\varepsilon.$$

Feltehető, hogy f a $[-\pi,\pi]$-n kívül 0, ezért $\frac{f\chi_{\mathbb{R}\setminus]-\delta_0,\delta_0[}}{\sin(x/2)}$ integrálható. A Riemann-Lebesgue-lemmából következik, hogy elég nagy u esetén a másik két integrál abszolút értéke legfeljebb ε. Ezzel megmutattuk, hogy

$$|s_u-s_N|\le\frac{4\varepsilon}{2\pi}+\frac{\varepsilon}{2\pi}+\frac{\varepsilon}{2\pi}=\frac{6\varepsilon}{2\pi},$$

tehát $s_u-s_N\to 0$, ha $u\to\infty$.

Legyen

$$s'_N = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\sin\frac{y}{2}} f(y)dy$$

az f Fourier-sorának a részletösszege. Az $y = ax$ helyettesítéssel

$$s'_N = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\sin\left(a\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{ax}{2}} g(x)\,a\,dx = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\sin\left(\left(u+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{ax}{2}} g(x)\,a\,dx,$$

ahol $u = a(N+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$. Látható, hogy

$$s'_N - s_u = \frac{1}{2\pi}\int \sin\left(\left(u+\frac{1}{2}\right)x\right)\left(\frac{1}{\sin\frac{ax}{2}} - \frac{1}{a\sin\frac{x}{2}}\right) g(x)\,a\,dx.$$

A 0 körül $\sin x = x + \mathrm{O}(x^2)$, ezért

$$\frac{1}{\sin\frac{ax}{2}} - \frac{1}{a\sin\frac{x}{2}} = \frac{a\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{ax}{2}}{\sin\frac{ax}{2}\cdot a\sin\frac{x}{2}} \sim \frac{\mathrm{O}(x^2)}{\left(\frac{ax}{2}\right)^2} = \mathrm{O}(1),$$

vagyis a fenti különbség a 0-nak egy környezetében korlátos. Feltehető, hogy a g ezen a környezeten kívül 0, ezért $\left(\frac{1}{\sin\frac{ax}{2}} - \frac{1}{a\sin\frac{x}{2}}\right) g(x)$ integrálható. Ha $N \to \infty$, akkor $u \to \infty$, ezért a Riemann-Lebesgue-lemma következtében $s'_N - s_N \to 0$. Emiatt $s'_N = s_u - (s'_N - s_u)$ is konvergens. □

7. feladat (Gát György). Ha a k és n pozitív egészek kettes számrendszerbeli alakja rendre $k = \sum_{i=0}^{\infty} k_i 2^i$ és $n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i$, akkor ezen számok logikai összegén a

$$k \oplus n = \sum_{i=0}^{\infty} |k_i - n_i|\, 2^i$$

mennyiséget értjük. Legyen N egy tetszőleges pozitív egész, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pedig egy olyan komplex számsorozat, melyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $|c_k| \le 1$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor vannak olyan C és δ pozitív konstansok, hogy

$$\int_{[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]} \sup_{\substack{n<N\\ n\in\mathbb{N}}} \frac{1}{N}\left|\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{\imath(kx+(k\oplus n)y)}\right| d(x,y) \le C\cdot N^{-\delta}$$

teljesül.

Megoldás. (Gát György) Belátjuk, hogy az egyenlőtlenséget elég olyan esetekben belátni, amikor N egy kettő hatvány.

Legyen ugyanis A olyan egész, hogy $2^{A-1} < N \le 2^A$, valamint

$$\tilde{c}_k := \begin{cases} c_k, & \text{ha } k < N \\ 0, & \text{ha } N \le k. \end{cases}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
&\int_{[-\pi,\pi]^2} \sup_{N>n\in\mathbb{N}} \frac{1}{N}\left|\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{\imath(kx+(k\oplus n)y)}\right| d(x,y)\\
&= \int_{[-\pi,\pi]^2} \sup_{N>n\in\mathbb{N}} \frac{1}{N}\left|\sum_{k=0}^{2^A-1} \tilde{c}_k e^{\imath(kx+(k\oplus n)y)}\right| d(x,y)\\
&\le 2\int_{[-\pi,\pi]^2} \sup_{2^A>n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^A}\left|\sum_{k=0}^{2^A-1} \tilde{c}_k e^{\imath(kx+(k\oplus n)y)}\right| d(x,y)\\
&\le C2^{-A\delta} \le CN^{-\delta},
\end{aligned}$$

ha 2 hatványokra már igazoltuk az állítást. Tehát be kell látnunk, hogy alkalmas C és $\delta > 0$ esetén bármely $A \in \mathbb{N}$ esetén:

$$\int_{[-\pi,\pi]^2} \sup_{2^A > n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^A} \left| \sum_{k=0}^{2^A-1} c_k e^{\imath(kx+(k\oplus n)y)} \right| d(x,y) \leq C 2^{-A\delta}.$$

Az adott függvény L^1-normáját becsüljük felül az L^4-normájával: (Megjegyezzük, hogy az L^2-normával való felső becslés „nem vezet eredményre”.)

$$\begin{aligned}
&\int_{[-\pi,\pi]^2} \sup_{2^A > n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^A} \left| \sum_{k=0}^{2^A-1} c_k e^{\imath(kx+(k\oplus n)y)} \right| d(x,y) \\
&\left(\int_{[-\pi,\pi]^2} \sup_{2^A > n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{2^A} \sum_{k=0}^{2^A-1} c_k e^{\imath(kx+(k\oplus n)y)} \right|^4 d(x,y) \right)^{1/4} \\
&\leq \left(\int_{[-\pi,\pi]^2} \sum_{n=0}^{2^A-1} \left| \frac{1}{2^A} \sum_{k=0}^{2^A-1} c_k e^{\imath(kx+(k\oplus n)y)} \right|^4 d(x,y) \right)^{1/4} \\
&= \left(\frac{1}{2^{4A}} \sum_{n=0}^{2^A-1} \sum_{k=0}^{2^A-1} \sum_{l=0}^{2^A-1} \sum_{s=0}^{2^A-1} \sum_{t=0}^{2^A-1} c_k \bar{c}_l c_s \bar{c}_t \int_{[-\pi,\pi]^2} e^{\imath((k-l+s-t)x+((k\oplus n)-(l\oplus n)+(s\oplus n)-(t\oplus n))y)} d(x,y) \right)^{1/4} \\
&=: \left(\frac{1}{2^{4A}} \sum_{n=0}^{2^A-1} \sum_{k=0}^{2^A-1} \sum_{l=0}^{2^A-1} \sum_{s=0}^{2^A-1} \sum_{t=0}^{2^A-1} c_k \bar{c}_l c_s \bar{c}_t B_{k,l,s,t,n} \right)^{1/4}.
\end{aligned}$$

A trigonometrikus rendszer ortogonalitása miatt $B_{k,l,s,t,n}$ vagy nulla vagy $4\pi^2$. Továbbá nem nulla pontosan akkor, ha

$$k - l + s - t = (k \oplus n) - (l \oplus n) + (s \oplus n) - (t \oplus n) = 0.$$

Azaz, $t = k - l + s$,

$$(k - l + s) \oplus n = (k \oplus n) - (l \oplus n) + (s \oplus n).$$

Legyen k_i, l_i, s_i, n_i a k, l, s, n természetes számok kettes számrendszerbeli felírásának i-edik koordinátája ($i = 0, 1, \dots$). Blokkosítsuk ezeket a $0, 1$ sorozatokat ötösével. (Vagyis vegyünk ki öt elemű blokkokat). Azaz, legyen:

$$\begin{aligned}
&k_{(0)} := (k_{0,4}, k_{0,3}, k_{0,2}, k_{0,1}, k_{0,0}) := (k_4, k_3, k_2, k_1, k_0), \\
&\dots k_{(a)} := (k_{a,4}, k_{a,3}, k_{a,2}, k_{a,1}, k_{a,0}) := (k_{5a+4}, k_{5a+3}, k_{5a+2}, k_{5a+1}, k_{5a}),
\end{aligned}$$

ahol $a = 0, \dots, \lfloor A/5 \rfloor - 1$. Hasonlóképp képezzük az $l_{(a)}, s_{(a)}, n_{(a)}$ blokkokat is. Tegyük fel, hogy van olyan $a \in \{0, \dots \lfloor A/5 \rfloor - 1\}$, hogy

$$k_{(a)} = (1,0,0,0,1), \quad l_{(a)} = (0,0,1,0,0), \quad s_{(a)} = (0,0,0,0,0), \quad n_{(a)} = (0,0,1,0,0).$$

Mi lesz ebben az esetben a $k - l$ szám a-adik blokkjában? $(k-l)_{(a)} = (0,1,1,0,\epsilon)$, ahol $\epsilon \in \{0,1\}$ a k és az l számok a-adik blokknál kisebb indexű blokkjaiban (ha van ilyen) lévő koordinátáitól függ. Ugyanilyen alapon $k - l + s$ a-adik blokkja:

$$(k - l + s)_{(a)} = (0, 1, 1, \delta, \tilde{\epsilon}),$$

ahol a $\delta, \tilde{\epsilon} \in \{0, 1\}$ számok a $k - l$ és az s számok a-adik blokknál kisebb indexű blokkjaiban (ha van ilyen) lévő koordinátáitól függnek. Mivel a $\oplus$ művelet (amelyre nézve a $\{0, 1, \dots 2^A - 1\}$ halmaz csoport) koordinátánként „hat", így

$$((k - l + s) \oplus n)_{(a)} = (0, 1, 0, \delta, \tilde{\epsilon}).$$

Továbbá,

$$(k \oplus n)_{(a)} = (1, 0, 1, 0, 1), \quad (l \oplus n)_{(a)} = (0, 0, 0, 0, 0), \quad (s \oplus n)_{(a)} = (0, 0, 1, 0, 0).$$

A korábbi módszer és jelölés alapján

$$((k \oplus n) - (l \oplus n))_{(a)} = (1, 0, 1, 0, \epsilon_1), \quad ((k \oplus n) - (l \oplus n) + (s \oplus n))_{(a)} = (1, 1, 0, \delta_1, \tilde{\epsilon}_1),$$

ahol $\delta_1, \tilde{\epsilon}_1 \in \{0, 1\}$. Azaz, ebben az esetben $(k \oplus n) - (l \oplus n) + (s \oplus n)$ és $(k - l + s) + \oplus n$ a-adik blokkja nem egyezik meg, így nem egyenlők, és ezért $B_{k,l,s,t,n} = 0$ ezekben az esetekben. Következésképp, ha azt akarjuk, hogy $B_{k,l,s,t,n} = 4\pi^2$ legyen és nem nulla, akkor teljesülnie kell, hogy $t = k - l + s$. Továbbá, k, l, s, n $\lfloor A/5 \rfloor$ számú blokkja között nem fordulhat elő

$$k_{(a)} = (1, 0, 0, 0, 1), l_{(a)} = (0, 0, 1, 0, 0), s_{(a)} = (0, 0, 0, 0, 0), n_{(a)} = (0, 0, 1, 0, 0).$$

Adott a esetén az ilyen tulajdonságú blokkok száma $2^{20} - 1$. Ez bármelyik legalább $A/5 - 1$ számú blokk esetében elmondható, így a lehetséges k, l, s, n négyesek számára a következő felső becslés adódik:

$$\left(2^{20} - 1\right)^{A/5-1} \cdot 2^{20} \le C \left(2^{20} - 1\right)^{A/5}.$$

Használva, hogy $|c_k \bar{c}_l c_s \bar{c}_t| \le 1$ adódik, hogy

$$\left| \frac{1}{2^{4A}} \sum_{n=0}^{2^A-1} \sum_{k=0}^{2^A-1} \sum_{l=0}^{2^A-1} \sum_{s=0}^{2^A-1} \sum_{t=0}^{2^A-1} c_k \bar{c}_l c_s \bar{c}_t B_{k,l,s,t,n} \right|^{1/4}$$
$$\le C \left(\frac{1}{2^{4A}} \left(2^{20} - 1\right)^{A/5} \right)^{1/4} = C \left(\left(1 - 2^{-20}\right)^{1/20} \right)^A.$$

Tehát (például) $\delta = \frac{1}{20} \log_2(1/(1 - 2^{-20}))$ egy megfelelő választás. □

8. feladat (Vincze Csaba). Igazoljuk, hogy egy 2-dimenziós Riemann-sokaságon pontosan akkor létezik zérus görbületű metrikus lineáris konnexió, ha a Riemann-sokaság Gauss-görbülete felírható egy vektormező divergenciájaként.

Megoldás. (Vincze Csaba) Jelölje a Riemann-metrikát $\gamma(X, Y) = \langle X, Y \rangle$.

1. lépés: Ismert, hogy egy metrikus lineáris konnexiót egyértelműen meghatároz a torziótenzora. Alkalmazva a Christoffel-féle eljárást, a Koszul-formula általános alakja egy ∇ metrikus lineáris konnexióra:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= 1/2 \cdot (X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &\quad - \langle X, T(Y, Z) \rangle + \langle Y, T(Z, X) \rangle + \langle Z, T(X, Y) \rangle \\ &\quad - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle). \end{aligned} \tag{4}$$

2. lépés: Vegyük észre, hogy egy 2-dimenziós sokaságon minden lineáris konnexió szemiszimmetrikus, azaz torziója a

$$T(X, Y) = \rho(Y)X - \rho(X)Y \tag{5}$$

alakba írható valamilyen alkalmasan választott ρ 1-forma segítségével. Valóban,

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= T(X^i \partial_i, Y^j \partial_j) = X^i Y^j T_{ij}^k \partial_k = X^1 Y^2 T_{12}^k \partial_k + X^2 Y^1 T_{21}^k \partial_k \\ &= (X^1 Y^2 - X^2 Y^1) T_{12}^k \partial_k = (X^1 Y^2 - X^2 Y^1) \left(T_{12}^1 \partial_1 + T_{12}^2 \partial_2 \right), \end{aligned}$$

míg

$$\begin{aligned}\rho(Y)X-\rho(X)Y &= \rho(Y^i\partial_i)X^k\partial_k-\rho(X^i\partial_i)Y^k\partial_k=\left(\rho_iY^iX^k-\rho_iX^iY^k\right)\partial_k\\ &= (X^2Y^1-X^1Y^2)\rho_1\partial_2+(X^1Y^2-X^2Y^1)\rho_2\partial_1\\ &= (X^1Y^2-X^2Y^1)\,(\rho_2\partial_1-\rho_1\partial_2)\end{aligned}$$

ahonnan $\rho_1=-T^2_{12}=T^2_{21}$ és $\rho_2=T^1_{12}$.

3. lépés: Vessük össze a ∇ metrikus lineáris konnexiót a metrika kitüntetett ∇^* Lévi-Civita konnexiójával. Ha ∇ torzióját az (5) alakba írjuk, akkor a két konnexió közötti kapcsolat:

$$\nabla_XY=\nabla^*_XY+\rho(Y)X-\gamma(X,Y)\rho^\sharp, \tag{6}$$

ahol $\rho^\sharp$ a $\gamma\left(\rho^\sharp,X\right)=\rho(X)$ formulával értelmezett duális vektormező. A (4) formula szerint ugyanis

$$\langle\nabla^*_XY,Z\rangle=1/2\cdot(X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle+\langle Y,[Z,X]\rangle+\langle Z,[X,Y]\rangle),$$

ahonnan

$$\langle\nabla_XY,Z\rangle-\langle\nabla^*_XY,Z\rangle=\frac{1}{2}(-\langle X,T(Y,Z)\rangle+\langle Y,T(Z,X)\rangle+\langle Z,T(X,Y)\rangle).$$

Kihasználva, hogy ∇ torziója (5) alakú, egyszerű helyettesítéssel adódik a (6) formula.

4. lépés: További direkt számításokkal[1] hasonlítható össze a két lineáris konnexió görbülete:

$$\begin{aligned}&R(X,Y)Z-R^*(X,Y)Z=\\ &\left(\left(\nabla^*_X\rho\right)(Z)-\rho(X)\rho(Z)+\gamma(X,Z)\left\|\rho^\sharp\right\|^2\right)Y+\rho(X)\gamma(Y,Z)\rho^\sharp+\gamma(X,Z)\nabla^*_Y\rho^\sharp\\ &-\left(\left(\nabla^*_Y\rho\right)(Z)-\rho(Y)\rho(Z)+\gamma(Y,Z)\left\|\rho^\sharp\right\|^2\right)X-\rho(Y)\gamma(X,Z)\rho^\sharp-\gamma(Y,Z)\nabla^*_X\rho^\sharp.\end{aligned} \tag{7}$$

5. lépés: Rögzítsünk egy p pontot a sokaságon és válasszuk meg úgy az X,Y vektormezőket, hogy ortonormált bázist alkossanak a p pontbeli érintőtérben. Elvégezve a $Z=Y$ helyettesítést a (7) formulában és véve mindkét oldal belső szorzatát X-szel,

$$\langle R(X,Y)Y,X\rangle-\langle R^*(X,Y)Y,X\rangle=\rho^2(X)-\left(\nabla^*_Y\rho\right)(Y)+\rho^2(Y)-\left\|\rho^\sharp\right\|^2-\left\langle\nabla^*_X\rho^\sharp,X\right\rangle,$$

azaz

$$-\langle R(X,Y)Y,X\rangle+\kappa^*=\left\langle\nabla^*_X\rho^\sharp,X\right\rangle+\left\langle\nabla^*_Y\rho^\sharp,Y\right\rangle,$$

ahol a jobb oldal éppen a $\rho^\sharp$ vektormező divergenciája:

$$-\langle R(X,Y)Y,X\rangle+\kappa^*=\mathrm{div}^*\rho^\sharp.$$

Innen pedig rögtön adódik az állítás. □

9. feladat (Totik Vilmos). Egy adott n természetes számra két játékos véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) választ egy közös $0\le j\le n$ számot, majd egymástól függetlenül mindegyikük véletlenszerűen kiválasztja $\{1,2,\dots,n\}$ egy j elemű részhalmazát. Legyen p_n annak a valószínűsége, hogy ugyanazt a halmazt választották. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=1}^n p_k=2\log n+2\gamma-1+\mathrm{o}(1),\qquad (n\to\infty),$$

ahol γ az Euler-féle konstans.

[1] Számolástechnikailag egyszerűsíti a helyzetet, ha olyan X és Y vektormezőket választunk, melyek Lie-zárójele zérus.

Megoldás. (Totik Vilmos) Mivel

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1), \qquad (n \to \infty),$$

az állítás következik, ha megmutatjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(p_n - \frac{2}{n+1} \right) = 1.$$

A j elemszám $(n+1)$-féleképpen választható, így nyilván

$$p_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^{-1},$$

ezért $n \geq 2$-re

$$p_n - \frac{2}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j}^{-1} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+1} \binom{n+1}{j+1}^{-1}.$$

$n = 1$-re ez a különbség 0. Így a kérdéses végtelen összeg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+1} \binom{n+1}{j+1}^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{1}{j+1} \binom{n+1}{j+1}^{-1}.$$

Írjunk n helyére $j+1+t$-t ($t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) és használjuk fel a

$$\binom{j+1+t+1}{j+1}^{-1} = \frac{j+1}{j} \binom{t+j+1}{j}^{-1} - \frac{j+1}{j} \binom{t+j+2}{j}^{-1}$$

azonosságot, amiből

$$\sum_{n=j+1}^{\infty} \binom{n+1}{j+1}^{-1} = \frac{j+1}{j} \binom{j+1}{j}^{-1} = \frac{1}{j}.$$

Így a kérdéses összeg

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 1.$$

9.1. Megjegyzés. *Viszonylag sok eredmény ismert a binomiális együtthatók reciprokösszegéről, például az alábbi azonosság:*

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^{-1} = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{n} \frac{2^r}{r+1}.$$

Ennek felhasználásával még könnyebben megoldható a feladat. Imolay András és Kovács Benedek is így járt el.

□

10. feladat (Fazekas István). Tekintsünk egy érmét, amelyen a fej dobás valószínűsége p, ahol $0 < p < 1$ rögzített. Dobjuk fel az érmét többször, a dobások legyenek egymástól függetlenek. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik, $(i+1)$-edik, …, $(i+m-1)$-edik dobások közül pontosan T az írás. $T = 1$ esetén számoljuk ki a $\mathbb{P}(\overline{A}_2 \overline{A}_3 \cdots \overline{A}_m | A_1)$ feltételes valószínűséget, $T = 2$ esetén pedig adjunk $\mathbb{P}(\overline{A}_2 \overline{A}_3 \cdots \overline{A}_m | A_1)$-re $a + \frac{b}{m} + \mathrm{O}(p^m)$ alakú közelítést, amint $m \to \infty$.

Megoldás. **(Gáspár Attila)** Jelöljük n_k-val azt, hogy a $k.,\dots,(k+m-1)$. dobások közül hány darab írás. Ekkor $A_k = \{n_k = T\}$.

Ha $T = 1$, akkor az $m = 1$ esetben triviális, hogy a válasz 1. A továbbiakban feltesszük, hogy $m \ge 2$. Az A_1 feltétel mellett van olyan i, hogy az első m dobás közül csak az i. írás. Világos, hogy i diszkrét egyenletes eloszlású. A továbbiakban azt is feltesszük, hogy az i-t ismerjük, ekkor az első m dobást is tudjuk, a többinek pedig nem változik az együttes eloszlása.

Ha $i = 1$, akkor $n_2 \le 1$, ezért ha $\overline{A}_2$ bekövetkezik, akkor $n_2 = 0$. Mivel az n_k legfeljebb 1-gyel változhat, ha a k-t növeljük, az $\overline{A}_2 \cdots \overline{A}_m$ pontosan akkor következik be, ha $n_2 = \cdots = n_m = 0$, ami ekvivalens azzal, hogy az $(m+1).,\dots,(2m-1)$. dobás fej. Ennek p^m a valószínűsége.

Ha $2 \le i \le m-1$, akkor $1 \le n_2 \le 2$, ezért az $\overline{A}_2$ bekövetkezésekor az $n_2 = 2$, vagyis az $(m+1)$. dobás írás. Ennek $1-p$ a valószínűsége. A továbbiakban feltesszük, hogy az $(m+1)$. dobás írás. Ekkor $2 \le n_2 \le \ldots \le n_i$, ezért $\overline{A}_2 \cdots \overline{A}_i$ bekövetkezik. Ahhoz, hogy az $\overline{A}_{i+1}$ is bekövetkezzen, szükséges, hogy $n_{i+1} \ge 2$ legyen, ebben az esetben $2 \le n_{i+1} \le \ldots \le n_m$, így az $\overline{A}_{i+1} \cdots \overline{A}_m$ bekövetkezik. Az $n_{i+1} \le 1$ pontosan akkor áll fenn, ha az $(m+2).,\dots,(m+i)$. dobás fej, ennek p^{i-1} a valószínűsége.

Ha $i = m$, akkor is szükséges, hogy az $(m+1)$. dobás írás legyen, de elégséges is, mert ekkor $2 \le n_2 \le \ldots \le n_m$.

Ezzel megmutattuk, hogy

$$\mathbb{P}(\overline{A}_2 \cdots \overline{A}_m \mid A_1, i) = \begin{cases} p^{m-1}, & \text{ha } i = 1 \\ (1-p)(1-p^{i-1}), & \text{ha } 2 \le i \le m-1 \\ (1-p), & \text{ha } i = m, \end{cases}$$

ahol A_1, i az az esemény, hogy az $i., (i+1).,\dots,(i+m-1)$. dobások közül pontosan az i. írás. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A}_2 \cdots \overline{A}_m \mid A_1) &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(\overline{A}_2 \cdots \overline{A}_m \mid A_1, i) = \\ &= \frac{1}{m}\left(p^{m-1} + \sum_{i=2}^{m-1}(1-p)(1-p^{i-1}) + (1-p)\right) = \\ &= \frac{1}{m}\left(p^{m-1} + \sum_{i=2}^{m-1}(p^i - p^{i-1}) + (m-1)(1-p)\right) = \\ &= \frac{1}{m}(2p^{m-1} - p + (m-1)(1-p)) = 1 - p + \frac{2p^{m-1}-1}{m}.\end{aligned}$$

Tehát a $T = 1$ esetben

$$\mathbb{P}(\overline{A}_2 \cdots \overline{A}_m \mid A_1) = \begin{cases} 1, & \text{ha } m = 1, \\ 1 - p + \frac{2p^{m-1}-1}{m}, & \text{ha } m \ge 2. \end{cases}$$

A $T = 2$ esetben az A_1 feltétel mellett az első m dobás közül az i. és j. írás, ahol $i < j$. Az $\{i, j\}$ most is diszkrét egyenletes eloszlású. Feltesszük, hogy i-t és j-t ismerjük.

Ha $i = 1$, akkor $1 \le n_2 \le 2$, ezért az $\overline{A}_2$ bekövetkezésekor $n_2 = 1$. Az n_k legfeljebb 1-gyel változik, ezért most is teljesül, hogy $n_2,\dots,n_m \le 1$. Az $n_j \le 1$ feltétel miatt az $(m+1).,\dots,(m+j-1)$. dobás fej, ennek p^{j-1} a valószínűsége. Ha $j < m$, akkor az $n_m \le 1$ feltétel miatt az $(m+j).,\dots,(2m-1)$. dobások között legfeljebb 1 írás van. Ennek $p^{m-j} + (m-j)p^{m-j-1}(1-p)$ a valószínűsége. Ellenőrizhető, hogy ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor az $\overline{A}_2 \cdots \overline{A}_m$ bekövetkezik. Ha $j = m$, akkor nincs további feltétel, de vegyük észre, hogy az előző képlet ebben az esetben is helyes eredményt ad.

Ha $2 \le i \le m-1$, akkor $2 \le n_2 \le 3$, ezért csak $n_2 = 3$ lehet, vagyis az $(m+1)$. dobás írás, ennek $(1-p)$ a valószínűsége. Ekkor $3 \le n_2 \le \ldots \le n_i, n_{i+1} \ge 2$, ezért az $(m+2).,\dots,(m+i)$. dobások között legalább 1 írásnak kell lennie. Ennek $1 - p^{i-1}$ a valószínűsége. Ekkor $2 \le n_{i+1} \le \ldots \le n_j$. Ha $j = m$, akkor ellenőrizhető, hogy ez már elég ahhoz, hogy $\overline{A}_2 \cdots \overline{A}_m$ bekövetkezzen. Ha $j \le m - 1$, akkor teljesülnie kell annak is, hogy $n_{j+1} \ge 3$, és ez elég, mert $3 \le n_{j+1} \le \ldots \le n_m$. Ez csak akkor nem teljesül, ha az $(m+2).,\ldots,(m+i)$. dobások között pontosan 1 írás van, és az $(m+i+1).,\ldots,(m+j)$. dobások mindegyike fej. Ennek $(i-1)p^{i-2}(1-p)p^{j-i}$ a valószínűsége.

Tehát

$$\mathbb{P}(\overline{A}_2 \cdots \overline{A}_m \mid A_1, i, j) = \begin{cases} p^{j-1}(p^{m-j} + (m-j)p^{m-j-1}(1-p)), & \text{ha } i = 1 \\ (1-p)(1-p^{i-1} - (i-1)p^{i-2}(1-p)p^{j-i}), & \text{ha } 2 \le i \text{ és } j < m \\ (1-p)(1-p^{i-1}), & \text{ha } 2 \le i \text{ és } j = m, \end{cases}$$

ahol A_1, i, j az az esemény, hogy az $i.$, $(i+1).$, …, $(i+m-1)$. dobások közül pontosan az $i.$ és a $j.$ írás. Az $i = 1$ esetben

$$\mathbb{P}(\overline{A}_2 \cdots \overline{A}_m \mid A_1, i, j) = p^{m-1} + (m-j)p^{m-2}(1-p) = \mathrm{O}(mp^m),$$

ezért

$$\sum_{j=i+1}^{m} \mathbb{P}(\overline{A}_2 \cdots \overline{A}_m \mid A_1, i, j) = \mathrm{O}(m^2 p^m).$$

Ha $2 \le i \le m - 1$, akkor

$$\begin{aligned} \sum_{j=i+1}^{m} \mathbb{P}(\overline{A}_2 \cdots \overline{A}_m \mid A_1, i, j) &= \\ = (m-i)(1-p)(1-p^{i-1}) - (1-p)\sum_{j=i+1}^{m-1}(i-1)(1-p)p^{j-2} &= \\ = (m-i)(1-p)(1-p^{i-1}) - (1-p)(i-1)\sum_{j=i+1}^{m-1}(p^{j-2} - p^{j-1}) &= \\ = (m-i)(1-p)(1-p^{i-1}) - (1-p)(i-1)(p^{i-1} - p^{m-1}) &= \\ = (1-p)((m-i) - (m-1)p^{i-1}) + \mathrm{O}(mp^m). \end{aligned}$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\overline{A}_2 \cdots \overline{A}_m \mid A_1) = \\ &= \frac{2}{m(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} \mathbb{P}(\overline{A}_2 \cdots \overline{A}_m \mid A_1, i, j) = \\ &= \frac{2}{m(m-1)} \left(\mathrm{O}(m^2 p^m) + \sum_{i=2}^{m-1} \Big((1-p)\Big((m-i) - (m-1)p^{i-1}\Big) + \mathrm{O}(mp^m) \Big) \right) = \\ &= \frac{2}{m(m-1)} \left(\mathrm{O}(m^2 p^m) + (1-p) \sum_{i=2}^{m-1} (m-i) - (m-1) \sum_{i=2}^{m-1} (p^{i-1} - p^i) \right) = \\ &= \frac{2}{m(m-1)} \left(\mathrm{O}(m^2 p^m) + (1-p)\frac{(m-2)(m-1)}{2} - (m-1)(p - p^{m-1}) \right) = \\ &= 1 - p - \frac{2}{m} + \mathrm{O}(p^m). \end{aligned}$$

□