A 2020. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

2020. október 22. – 2020. november 2.

1. Az $x, y\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sorozatokat *teljesen különbözőnek* nevezzük, ha $x(n) \neq y(n)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Legyen F olyan függvény, amely minden természetes számokból álló sorozathoz egy természetes számot rendel úgy, hogy teljesen különböző x, y sorozatok esetén $F(x) \neq F(y)$, valamint a konstans sorozatok esetén $F((k, k, \dots)) = k$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $F(x) = x(n)$ minden x sorozatra.

2. Igazoljuk, hogy ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos periodikus függvény, és $\alpha \in \mathbb{R}$ irracionális, akkor az $\{n\alpha + f(n\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat modulo 1 sűrű $[0, 1]$-ben.

3. Egy egész számokból álló $n \times n$-es A mátrixot *reprezentatívnak* nevezünk, ha minden egész számokból álló $\mathbf{v}$ vektorra található vektoroknak egy véges $0 = \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell = \mathbf{v}$ sorozata úgy, hogy minden $0 \leq i < \ell$ esetén fennáll, hogy $\mathbf{v}_{i+1} = A\mathbf{v}_i$, vagy $\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i$ a standard bázis egyik eleme (azaz egyetlen nemnulla koordinátája van, és az 1). Mutassuk meg, hogy A pontosan akkor nem reprezentatív, ha $A^\top$-nak van egy nemnegatív sajátértékhez tartozó, nemnegatív valós számokból álló sajátvektora.

4. Adott n szakasz a síkban, mindegyik függőleges vagy vízszintes. (A szakaszok metszhetik egymást.) Továbbá adott m darab origóból induló görbe, melyek a végpontjuktól eltekintve páronként diszjunktak, és mindegyik pontosan két szakaszt metsz, különböző görbék különböző szakaszpárokat. Bizonyítsuk be, hogy $m = O(n)$.

5. Igazoljuk, hogy egy K sehol sem sűrű síkbeli kompakt halmazra az alábbi két állítás ekvivalens.

(i) $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, ahol minden n-re K_n olyan kompakt halmaz, amelynek komplementere összefüggő.

(ii) Nincs K-ban olyan nemüres S zárt halmaz, amelyre teljesül, hogy S bármely pontjának bármely környezete tartalmazza $\mathbb{R}^2 \setminus S$ egy összefüggő komponensét.

6. Létezik-e olyan, az egész komplex síkon reguláris, nem azonosan eltűnő $F(z)$ függvény, melyre $|F(z)| \leq e^{|z|}$ minden komplex z-re, $|F(iy)| \leq 1$ minden valós y-ra, és melynek végtelen sok valós gyöke van?

7. Legyen $p(n) \geq 0$ minden n pozitív egészre. Legyenek továbbá $x(0) = 0$, $v(0) = 1$, valamint

$$x(n) = x(n-1) + v(n-1), \qquad v(n) = v(n-1) - p(n)x(n) \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Tegyük fel, hogy $v(n)$ monoton csökkenő módon tart 0-hoz, ha $n \to \infty$. Mutassuk meg, hogy az $x(n)$ sorozat akkor és csak akkor felülről korlátos, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot p(n) < \infty$.

8. Legyen $\mathbb{F}_p$ a p elemű test valamely $p > 3$ prímszámra, és jelölje S az $\mathbb{F}_p$-ből $\mathbb{F}_p$-be képező függvények halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $D\colon S \to S$ leképezést, melyre

$$D(f \circ g) = \big(D(f) \circ g\big) \cdot D(g)$$

teljesül minden $f, g \in S$ esetén. Itt $\circ$ a függvénykompozíció, azaz $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, és $\cdot$ a pontonkénti szorzás, azaz $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.

9. Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ legalább kételemű kompakt halmaz, és tekintsük az $\Omega = \bigtimes\limits_{n=0}^{\infty} D$ szorzatteret a szorzattopológiával. Tetszőleges $(d_n)_{n=0}^{\infty} \in \Omega$ sorozat esetén legyen $f_{(d_n)}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n z^n$. Adott

$\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$ esetén jelölje $S = S(\zeta, (d_n))$ azon w komplex számok halmazát, melyekhez létezik olyan (z_k) sorozat, melyre $|z_k| < 1$, $z_k \to \zeta$, és $f_{(d_n)}(z_k) \to w$. Igazoljuk, hogy Ω egy reziduális halmazán S független ζ választásától.

10. Legyen f egész együtthatós n-edfokú polinom és p prím, melyre f modulo p egy k-adfokú irreducibilis polinom (nyilván $k \leq n$). Lássuk be, hogy k osztja az f polinom $\mathbb{Q}$ feletti felbontási testének a fokát.

11. Legyen $p > 1$ valós szám, $h\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ folytonos függvény és $Y\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy sima vektormező, melyre $\operatorname{div} Y = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(|x|)|x|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} h(|x|)|x + Y(x)|^p.$$

* * *

A Schweitzer Miklós Emlékversenyen részt vehetnek mindazok, akik a verseny megrendezésekor Magyarországon vagy magyar állampolgárként külföldön valamely egyetem, főiskola hallgatói, vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny megrendezésének évében szereztek egyetemi, főiskolai oklevelet. PhD-hallgatók csak akkor vehetnek részt, ha egyetemi, főiskolai diplomájukat a verseny megrendezésének évében szerezték. A versenyből ki vannak zárva azok, akik a verseny megrendezésének événél korábban MSc-szintű oklevelet szereztek matematikus, alkalmazott matematikus, informatikus, programtervező matematikus vagy matematika tanári szakon akár itthon, akár külföldön.

A feladatok megoldására a versenyzők idén 11 napot fordíthatnak. A megoldásokat idén kizárólag elektronikusan lehet benyújtani a schweitzer.miklos@gmail.com címre **2020. november 2-án (hétfőn) magyar idő szerint 12.00 óráig**, a versenyző nevének, évfolyamának, végzettségének, pontos lakcímének és e-mail címének feltüntetésével. Lehetőség szerint egy levélben, **feladatonként külön fájlban** várjuk a megoldásokat, PDF vagy JPG formátumban (szkennelt dokumentum esetén jól olvashatóan) és magyar nyelven. Más módon illetve később beadott megoldásokat a versenybizottság nem vesz figyelembe.

A versenyzők tetszés szerinti számú kitűzött feladat megoldását nyújthatják be. A verseny nyertesei között a Társulat Schweitzer Miklós díjakat oszt ki.

A feladatokat a versenyzőknek önállóan kell megoldaniuk. Több versenyző együttműködése nincs megengedve. Az internet használata csak passzív módon engedélyezett, azaz keresni szabad, de bármilyen fórumon bármilyen kérdést feltenni tilos. Ha a versenybizottság tudomására jut, hogy valamelyik versenyző ezt a követelményt megszegte, az illetőt a versenyből kizárja.

Arra kérünk mindenkit, hogy a versenyzőknek semmilyen segítséget ne nyújtson a matematikai feladatok megoldásához, s velük semmiféle eszmecserét se folytassanak a feladatok megoldásával kapcsolatban a beadási határidő lejártáig. Kérjük továbbá, hogy amennyiben ilyen természetű szabálytalanság elkövetése jut bárki tudomására, haladéktalanul jelezze ezt a versenybizottságnak a fenti címen.

Idén a megoldások közös megbeszélése elmarad, és az eredményhirdetés idejéről és módjáról is később fogunk tájékoztatást adni az alábbi linken.

`http://www.bolyai.hu/schweitzer.htm`

Ugyanitt tesszük közzé a verseny vége után a nem hivatalos, előzetes megoldásvázlatokat.

Jó feladatmegoldást kívánunk!

a Versenybizottság