Jelentés a 2019. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

Eredmények

A Bolyai János Matematikai Társulat 2019-ben október 25. és november 4. között rendezte meg a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A BJMT elnöksége a verseny megrendezésére a következő bizottságot jelölte ki: Pap Gyula (elnök), Kevei Péter (titkár), Barczy Mátyás, B. Szendrei Mária, Czédli Gábor, Fodor Ferenc, Gyenizse Gergő, Hajnal Péter, Hatvani László, Kérchy László, Kincses János, Krisztin Tibor, Maróti Miklós, Makay Géza, Molnár Lajos, Nagy Gábor Péter, Röst Gergely, Totik Vilmos, Vígh Viktor, Waldhauser Tamás, Zádori László.

A versenybizottság 10 feladatot tűzött ki. Ezekre 9 versenyző összesen 49 megoldást nyújtott be. A bizottság az alábbi döntést hozta.

- I. díjat a bizottság nem ad ki.
- II. díjat kap 6 feladat helyes megoldásáért
  - *Csernák Tamás* az ELTE 2019-ben végzett matematika mesterszakos hallgatója és
  - *Gáspár Attila* az ELTE másodéves matematika alapszakos hallgatója.
- III. díjat kap 5 feladat helyes megoldásáért
  - *Fehér Zsombor* a University of Oxford elsőéves matematika doktorandusza és
  - *Matolcsi Dávid* az ELTE elsőéves matematika alapszakos hallgatója.

Feladatok és megoldások

1. feladat. *Kitűző: Juhász István.* Bizonyítandó, hogy ha egy X Hausdorff-tér minden altere σ-kompakt, akkor X megszámlálható.

Megoldotta Borbényi Márton, Csernák Tamás, Gáspár Attila és Luo Haoran.

Totik Vilmos megoldása. Jelölje $\mathcal{T}$ a nyílt halmazok rendszerét X-en, és tetszőleges $A \subset X$ esetén legyen $\mathcal{T}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$ az A által generált altértopológia. Felhasználjuk, hogy $B \subset A$ pontosan akkor kompakt a $\mathcal{T}_A$ altértopológiában, ha kompakt az eredeti topológiában is.

A feltevés szerint X σ-kompakt. Mivel megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható, ezért feltehetjük, hogy X kompakt.

Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel, hogy X nem megszámlálható. Ekkor van olyan $x \in X$ amelynek bármely környezete nem megszámlálható. Ez világos, mert ha minden pontnak lenne megszámlálható környezete, akkor ezekből a környezetekből vett nyílt fedés egy véges részfedése (a kompaktság miatt ilyen van) mutatná, hogy X megszámlálható.

Vegyük észre, hogy létezik egy x-től különböző y pont is ezzel a tulajdonsággal. Ugyanis a feltétel szerint $X \setminus \{x\} = \cup_{i \in I} K_i$, ahol a K_i-k kompaktak és I megszámlálható indexhalmaz. Ezért van olyan $i_0 \in I$, hogy K_{i_0} nem megszámlálható. A K_{i_0} halmazra alkalmazva az előző gondolatmenetet, kapjuk y létezését.

Mivel X Hausdorff-tér, x-nek és y-nak léteznek diszjunkt U_x, U_y környezetei. Ezek is σ-kompaktak, így van bennük nem megszámlálható $X_1 \subset U_x$, $X_2 \subset U_y$ kompakt részhalmaz. Ekkor $U_1 = U_x$ az X_1, míg $U_2 = U_y$ az X_2 diszjunkt környezetei.

Az előzőkben eljutottunk X-ből az X_1, X_2 halmazokhoz, amelyknek van diszjunkt U_1, U_2 környezete, és itt X_1 és X_2 is nem megszámlálható kompakt halmazok. Ezt iterálhatjuk egy Cantor-séma szerint, és kapunk egy végtelen bináris fát. A fa ágain csökkenő nemüres kompakt halmazok vannak, melyek metszete nemüres. Vegyünk ki minden ilyen metszetből egy pontot. Így kapjuk az Y alteret, amelynek számossága $\mathfrak{c}$, mert a fának $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ ága van.

Legyen $\mathcal{S}$ az a topológia Y-on, amit a Cantor-konstrukcióban szereplő U környezetek generálnak. Ekkor $\mathcal{S}$ durvább $\mathcal{T}_Y$-nál, azaz $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_Y$. Ezért ha $H \subset Y$ kompakt $\mathcal{T}_Y$-ban, akkor $\mathcal{S}$-ben is az. Az $\mathcal{S}$ topológiának az U halmazok egy megszámlálható környezetbázisát adják. Ezért $\mathcal{S}$ számossága legfeljebb $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Tehát a zárt halmazok, és mivel Hausdorff-téren minden kompakt halmaz zárt, ezért a kompakt halmazok számossága is legfeljebb $\mathfrak{c}$. Következésképp $\mathcal{T}_Y$ kompakt halmazainak számossága is legfeljebb $\mathfrak{c}$, és így a σ-kompakt halmazok számossága is legfeljebb $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Ugyanakkor Y-nak $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$ különböző altere van, így nem lehet mind σ-kompakt.

Ez az ellentmondás igazolja az állítást. $\square$

2. feladat. *Kitűző: Waldhauser Tamás.* Legyen R nemkommutatív egységelemes véges gyűrű. Mutassuk meg, hogy ha R minden nemnulla I ideálja esetén az $I \cup \{1\}$ halmaz által generált részgyűrű maga R, akkor R egyszerű gyűrű.

Megoldotta Borbényi Márton és Csernák Tamás. Részeredményt ért el Gáspár Attila, Luo Haoran és Markó Ádám.

Borbényi Márton megoldása. A feladat feltétele szerint minden nemnulla $I \lhd R$ esetén $[I \cup \{1\}] = I + [1] = R$. Ebből rögtön következik, hogy I nem lehet kommutatív, mert akkor R is az lenne. Legyen M minimális ideálja R-nek; ekkor tehát $R = M + [1]$, és azt kell belátnunk, hogy $M = R$.

Megmutatjuk, hogy M egyszerű gyűrű. Ha $I \lhd M$, akkor $I \lhd R$ is teljesül, mert $IR = I(M+[1]) = IM+I[1] \subseteq I+I = I$, és hasonlóan $RI \subseteq I$. Mivel M minimális ideál, ezért $I = \{0\}$ vagy $I = M$, azaz M valóban egyszerű gyűrű. A véges egyszerű gyűrűk leírása ismert (Wedderburn–Artin-tétel): minden egyszerű (nem feltétlenül egységelemes) véges gyűrű vagy véges test feletti mátrixgyűrű, vagy pedig prímrendű zérógyűrű. Láttuk, hogy R-ben a nemzéró ideálok nem lehetnek kommutatívak, ezért M csak mátrixgyűrű lehet. Ekkor M-nek van egységeleme, jelölje ezt 1_M. Valójában M-ről ennél többet nem is fogunk felhasználni.

Legyen $J = \{k(1 - 1_M) : k \in [1]\}$, ekkor $JM = \{0\}$, mert minden $k \in [1]$ és $m \in M$ esetén $k(1 - 1_M)m = k\,(m - m) = 0$. Ebből következik, hogy $JR = J(M + [1]) = JM + J[1] \subseteq \{0\} + J = J$, és hasonlóan $RJ \subseteq J$. Tehát $J \lhd R$, és mivel J szemlátomást kommutatív, szükségképpen $J = \{0\}$. Ez azt jelenti, hogy $1 = 1_M$, azaz R egységeleme benne van az M ideálban, ez pedig csak $M = R$ esetén lehetséges. $\square$

3. feladat. *Kitűző: Ruzsa Z. Imre.* Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan egész számokból álló m, n számpár van, hogy $1 < m < n$ és az (m, n), $(m, n + 1)$, $(m + 1, n)$, és $(m + 1, n + 1)$ legnagyobb közös osztók mindegyike nagyobb, mint $\sqrt{n}/999$.

Megoldotta Csernák Tamás, Fehér Zsombor és Gáspár Attila. Kisebb hiányosságokkal megoldotta Tran Hoang Anh.

Gáspár Attila és Fehér Zsombor megoldása. Tekintsük az $a^2 - 2b^2 = 1$ Pell-egyenlet egy megoldását, melyre $a, b \geq 1$. Legyen $m = ab + 2b^2$ és $n = 2ab + 2b^2$. Ekkor $b < a$, $1 < m < n$, és

$$n = 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 = 6b^2 + 2 < 9b^2.$$

A legnagyobb közös osztókra kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(m, n) &= (ab + 2b^2, 2ab + 2b^2) = b \cdot (a + 2b, 2a + 3b) \geq b,\\
(m, n + 1) &= (ab + 2b^2, 2ab + a^2) = (a + 2b) \cdot (b, a) \geq a + 2b,\\
(m + 1, n) &= (a^2 + ab, 2ab + 2b^2) = (a + b) \cdot (a, 2b) \geq a + b,\\
(m + 1, n + 1) &= (a^2 + ab, 2ab + a^2) = a \cdot (a + b, a + 2b) \geq a.
\end{aligned}$$

Ezek mindegyike legalább $b > \sqrt{n}/3$. Mivel az $a^2 - 2b^2 = 1$ Pell-egyenletnek végtelen sok megoldása van, az állítást beláttuk. $\square$

A kitűző megoldása. Belátjuk, hogy az

$$n(n+1) = 2m(m+1), \quad 1 < m < n, \tag{1}$$

egyenlet megoldásai teljesítik a feladat feltételeit, és végtelen sok megoldás van.

Nyomban látható, hogy $n \sim \sqrt{2}m$ amint $n \to \infty$, pontosabban

$$\sqrt{2}m < n < \sqrt{2}m + 1.$$

Az (1) egyenletből leolvasható, hogy

$$m = (m,n)(m,n+1),\ m+1 = (m+1,n)(m+1,n+1),$$

így az alsó becslésekhez elegendő felső becslést találni.

Világos, hogy (1) miatt

$$(m,n)^2 | n^2 - 2m^2 = 2m - n < 2m,$$

tehát $(n,m) < \sqrt{2m}$. Hasonlóan

$$\begin{aligned}
(m,n+1)^2 &| (n+1)^2 - 2m^2 = 2m + n + 1 < (2+\sqrt{2})m + 2,\\
(m+1,n)^2 &| 2(m+1)^2 - n^2 = 2m + n + 2 < (2+\sqrt{2})m + 3,\\
(m+1,n+1)^2 &| 2(m+1)^2 - (n+1)^2 = 2m - n + 1 < 2m.
\end{aligned}$$

Így mindegyik legnagyobb közös osztó kisebb, mint $\sqrt{(2+\sqrt{2})m+3}$, és ezért mindegyik nagyobb, mint

$$\frac{m}{\sqrt{(2+\sqrt{2})m+3}} \sim \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2+\sqrt{8}}},$$

a nevező kb. 2,2.

Belátjuk, hogy az (1) egyenletnek végtelen sok megoldása van.

Az $x = 2m+1$, $y = 2n+1$ változók bevezetésével (1) a

$$2x^2 - y^2 = 1 \tag{2}$$

Pell-szerű egyenletté változik. Modulo 4 megnézve láthatjuk, hogy (2) megoldásaiban x, y szükségképpen páratlanok, vagyis a két egyenlet ekvivalens. A (2) egyenlet végtelen sok megoldása megkapható az $x_0 = 5, y_0 = 7$ alapmegoldásból az

$$x_{k+1} = 3x_k + 2y_k,\ y_{k+1} = 4x_k + 3y_k, \quad k \geq 0,$$

rekurzióval. $\square$

Megjegyzés. 1. A fenti példában a lnko-k kis erőfeszítéssel pontosan kiszámíthatók, a becslés aszimptotikusan pontos. A tényezők maguk is kielégítenek egy Pell-szerű egyenletet, ebből kiindulva megkapható a versenyzők fenti megoldása.

2. A feladat feltételeiből következik, hogy $n(n+1)/(m(m+1))$ nevezője és számlálója korlátos, tehát a megoldásnak szükségszerűen a fentihez hasonlónak kell lennie. Jobb arányt kapunk az $n(n+1) = 3m(m+1)$ egyenlettel kezdve, ez egyszersmind az optimális konstans, értéke $\sqrt{(\sqrt{3}-1)/3}$.

4. feladat. *Kitűzők: Pach János és Tardos Gábor.* Egy $n \times m$-es mátrixot szépnek mondunk, ha minden egész számot 1-től nm-ig pontosan egyszer tartalmaz, és az 1 az egyetlen olyan elem, ami mind a sorában, mind az oszlopában a legkisebb. Mutassuk meg, hogy a szép $n \times m$-es mátrixok száma $(nm)!n!m!/(n+m-1)!$.

Megoldotta Fehér Zsombor, Gáspár Attila és Matolcsi Dávid.

Gáspár Attila megoldása alapján. Legyen $1 \leq a \leq n$ és $1 \leq b \leq m$ és rögzítsünk egy szép $a \times b$-es mátrixot. Az alábbiakból látszik, hogy mindegy melyiket rögzítjük. Legyen $g(n,m,a,b)$ annak a valószínűsége, hogy ha a bal felső $a \times b$-s részmátrixba a rögzített szép mátrixot írjuk, a többi helyre meg $ab+1$-től nm-ig a számokat véletlen sorrendben, akkor szép mátrixot kapunk.

Mivel mindegy, hogy hova kerül az 1-es, ezért $g(n,m,1,1)$ éppen annak a valószínűsége, hogy egy $n \times m$-es mátrix mezőit véletlenszerűen kitöltve az $1, 2, \ldots, nm$ számokkal egy szép mátrixot kapunk. Vagyis az $n \times m$-es szép mátrixok száma $g(n,m,1,1)\,(nm)!$.

Ha $a = n$ vagy $b = m$, akkor $g(n,m,a,b) = 1$, mert nem lehet elrontani a mátrix szépségét. Legyen $a < n$, $b < m$. Világos, hogy az $ab+1$-es számnak vagy az első a sorban, vagy az első b oszlopban kell lennie. Az első a sorban $a(m-b)/(nm-ab)$ eséllyel van. Ha ott van, akkor mindegy, hogy azon belül hol, és az is mindegy, hogy a többi $a-1$ elem az ő oszlopában és az első a sorban micsoda. Ezért annak a feltételes valószínűsége, hogy szép mátrixot kapunk éppen $g(n,m,a,b+1)$. Ebből adódik a

$$g(n,m,a,b) = \frac{a(m-b)}{nm-ab}\, g(n,m,a,b+1) + \frac{(n-a)b}{nm-ab}\, g(n,m,a+1,b)$$

rekurzió. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy a rekurzió megoldása

$$g(n,m,a,b) = \frac{(a+m-1)!(n+b-1)!}{(n+m-1)!(a+b-1)!}.$$

Tehát az $n \times m$-es szép mátrixok száma

$$(nm)!\, g(n, m, 1, 1) = \frac{(nm)!\, n!\, m!}{(n + m - 1)!},$$

amint állítottuk. $\square$

Fehér Zsombor megoldása alapján. Legyen S azon $n \times m$ méretű mátrixok halmaza, amelyek minden egész számot 1-től nm-ig pontosan egyszer tartalmaznak. Nyilván $|S| = (nm)!$.

Legyen $A_{s,t} \subset S$ ($1 \le s \le n$, $1 \le t \le m$) azon $M = (m_{i,j}) \in S$ mátrixok halmaza, amelyben az $m_{s,t}$ elem sorában és oszlopában is a legkisebb elem. A feladat az S halmaz azon elemeinek számára ad formulát, amelyek pontosan egy $A_{s,t}$ halmazban vannak benne. Ezen számot szitálással meghatározhatjuk. Ehhez szükségünk lesz az $A_{s,t}$ halmazokból képezhető metszetek elemszámaira, pontosabban k különböző A-halmaz metszetének elemszámainak σ_k összegére.

Az összes $A_{s,t}$ halmaznak ugyanaz az elemszáma, $\frac{(nm)!}{n+m-1}$. Valóban, hogy egy $M = (m_{i,j}) \in A_{s,t}$ mátrixot kapjunk ahhoz az s-edik sor és t-edik oszlopon kívüli $(n-1)(m-1)$ pozícióba tetszőlegesen írhatunk különböző $[nm] = \{1, 2, \ldots, nm\}$-beli elemeket, a fel nem használt $n+m-1$ elemből a minimális lesz $m_{s,t}$, míg a maradék pozíciókat tetszőlegesen tölthetjük fel az eddig fel nem használt számokkal. Ebből adódik, hogy $\sigma_1 = \sum_{s,t} |A_{s,t}| = nm \cdot \frac{(nm)!}{n+m-1}$.

Nézzük két különböző $A_{s,t}$ és $A_{s',t'}$ halmaz metszetét. Nyilván, a metszet pontosan akkor üres, ha $s = s'$ vagy $t = t'$. (Így $2\binom{n}{2}\binom{m}{2}$ két tagú metszet lesz nem üres.) A nem üres metszetek elemszáma ugyanaz, $(nm)!/(2n+2m-4)(n+m-1)$. Valóban: Az $M = (m_{i,j})_{i=1,j=1}^{i=n,j=m} \in A_{s,t} \cap A_{s',t'}$ mátrixokat az $m_{s,t}$ és $m_{s',t'}$ elemek nagyságrendi viszonya alapján két csoportba oszthatjuk. Mi csak az $m_{s,t} < m_{s',t'}$ esetet vizsgáljuk. Az ilyen M mátrixokat listázhatjuk úgy, hogy az s-edik, s'-edik sor és a t-edik, t'-edik oszlopon kívüli pozíciókat kitöltjük ahogy korábban (az ismétlődés elkerülésével, egymástól függetlenül), majd az $m_{s,t}$ elem értéke az eddig nem használt értékek minimuma lesz (determinált döntés), folytatjuk a s-edik sor és a t-edik oszlop szabályok szerinti kitöltésével, majd az $m_{s',t'}$ elem érték az eddig nem használt értékek minimuma lesz (determinált döntés), végül kitöltjük s'-edik sor és a t'-edik oszlop hátralévő pozícióit. A két determinált döntés miatt az első osztályba tartozó mátrixok száma $\frac{(nm)!}{(2n+2m-4)\cdot(n+m-1)}$. A kettős metszetek elemszámainak σ_2 összege

$$\left[2\binom{n}{2}\binom{m}{2}\right] \cdot 2 \cdot \frac{(nm)!}{(2n+2m-4)\cdot(n+m-1)},$$

ahol az első tényező a nem üres metszetekhez tartozó s, t, s', t'-re vonatkozó lehetőségek száma, a második tényező a két esetből jön.

A k-s metszetek elemszámainak meghatározása teljesen hasonlóan történhet. $A_{s_1,t_1} \cap A_{s_2,t_2} \cap \ldots \cap A_{s_k,t_k}$ pontosan akkor üres, ha valamely $i \neq j$ esetén $s_i = s_j$ vagy $t_i = t_j$. A $k!\binom{n}{k}\binom{m}{k}$ nem üres metszet elemszámai mind ugyanazok:

$$\begin{aligned} & k! \cdot \frac{(nm)!}{(kn + km - k^2) \cdot \ldots \cdot (2n + 2m - 4) \cdot (n + m - 1)} \\ &= \frac{(nm)!}{(n + m - k) \cdot \ldots \cdot (n + m - 2) \cdot (n + m - 1)}, \end{aligned}$$

ahol a $k!$ tényező abból jön, hogy most $k!$ osztályba soroljuk a mátrixainkat. Innen adódik, hogy

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \left[k!\binom{n}{k}\binom{m}{k}\right] \cdot \frac{(nm)!}{(n + m - k) \cdot \ldots \cdot (n + m - 2) \cdot (n + m - 1)} \\ &= \frac{n!m! \cdot (nm)!(n + m - k - 1)!}{(n - k)!(m - k)!k! \cdot (n + m - 1)!} \\ &= \frac{n!m!(nm)!}{(n + m - 1)!} \cdot \frac{(n + m - k - 1)!}{(n - k)!(m - k)!k!}, \end{aligned}$$

ahol az első tényező a nem üres metszetekhez tartozó $s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots$-re vonatkozó lehetőségek száma, a második tényező pedig a metszet elemszáma.

Megjegyezzük, hogy pontosan akkor létezik nem üres k-tagú metszet, ha $k \leq \min\{n, m\}$.

A szép mátrixok azok, amelyek pontosan egy $A_{s,t}$ halmazba esnek bele. Valóban: $M \in S$ mátrix esetén ha s az '1' elem sora és t az '1' elem oszlopa, akkor $M \in A_{s,t}$. Szép mátrix más A-halmazban nem lehet benne. Ezek száma a szita formula egy alakja szerint

$$\sum_{k=1}^{nm} (-1)^{k-1} k \sigma_k.$$

Tehát a szép mátrixok száma

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\min\{n,m\}} (-1)^{k-1} k \cdot \frac{n!m!(nm)!}{(n + m - 1)!} \cdot \frac{(n + m - k - 1)!}{(n - k)!(m - k)!k!} \\ &= \frac{n!m!(nm)!}{(n + m - 1)!} \cdot \sum_{k=1}^{\min\{n,m\}} (-1)^{k-1} \frac{(n + m - k - 1)!}{(n - k)!(m - k)!(k - 1)!}. \end{aligned}$$

A bizonyítás befejezéséhez azt kell be látni, hogy az utolsó szumma értéke 1:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}(-1)^{k-1}\frac{(n+m-k-1)!}{(n-k)!(m-k)!(k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}(-1)^{k-1}\binom{n+m-k-1}{n-k}\binom{m-1}{k-1} \\
&= \sum_{k=1}(-1)^{k-1}(-1)^{n-k}\binom{-m}{n-k}\binom{m-1}{k-1} \\
&= (-1)^{n-1}\sum_{k=1}\binom{-m}{n-k}\binom{m-1}{k-1} \\
&= (-1)^{n-1}\binom{-1}{n-1} = (-1)^{n-1}(-1)^{n-1} = 1.
\end{aligned}$$

□

5. feladat. *Kitűző: Totik Vilmos.* Igazoljuk, hogy minden $S \subset \mathbb{R}^d$ konvex (kompakt, belső ponttal rendelkező) testre van olyan pozitív α konstans, amelyre igaz az, hogy ha S-et előállítjuk félterek metszeteként, akkor $\mathbb{R}^d$ minden P pontjára P távolsága valamelyik féltértől legalább α-szorosa a P pont S-től vett távolságának.

Megoldotta Ágoston Péter, Gáspár Attila és Matolcsi Dávid. Részeredményt ért el Markó Ádám.

A kitűző megoldása. Legyen O az S egy belső pontja, és legyenek $0 < r < R < \infty$ olyanok, hogy az O középpontú r sugarú B_r gömb az S belsejében van, az O középpontú R sugarú B_R gömb pedig belsejében tartalmazza S-et. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\alpha < r/R$ szám megfelelő.

A következőkben az AB szakasz hosszát $\overline{AB}$ jelöli. Legyen $\alpha = \beta r/R$, ahol $\beta < 1$. Válasszunk egy tetszőleges S-en kívüli P pontot. Az OP szakasz metssze S határát a Q pontban. Mivel $\overline{PQ} \geq \operatorname{dist}(P,S)$ és $B_R \supset S$, ezért választhatunk egy Q_0 pontot a PQ szakaszon, melyre $\overline{PQ_0} \geq \beta \operatorname{dist}(P,S)$ és $\overline{OQ_0} < R$. Az S-et előállító félterek között van olyan K, ami nem tartalmazza a Q_0 pontot. Legyen H a K félteret határoló hipersík. Jelölje A a H hipersík és az OP szakasz metszéspontját. Az A pontot tartalmazó H-ra merőleges e egyenes és az OP szakasz által meghatározott egyenes kifeszít egy L síkot. Legyen $\ell = H \cap L$. Jelölje B, illetve C az ℓ egyenes O-hoz, illetve P-hez legközelebbi pontját. Ekkor $\overline{PC} = \operatorname{dist}(P,K)$. Továbbá $\overline{OB} \geq r$, hiszen $K \supset B_r$. Az L síkban levő ACP és ABO háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} > \frac{r}{R}.$$

Végül, a $\overline{PA} \geq \overline{PQ_0} \geq \beta\,\mathrm{dist}(P,S)$ egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathrm{dist}(P,K) = \overline{PC} > \frac{r}{R}\overline{PA} \geq \frac{r}{R}\beta\,\mathrm{dist}(P,S).$$

Tehát tetszőleges P-hez találtunk megfelelő K félteret.

Ha OP merőleges H-ra, akkor e és OP egyenese egybeesik (és így L nem meghatározott), de ekkor

$$\mathrm{dist}(P,K) = \overline{PA} \geq \overline{PQ_0} \geq \beta\mathrm{dist}(P,S).$$

□

6. feladat. *Kitűző: Krisztin Tibor.* Legyen d pozitív egész és $1 < a \leq (d+2)/(d+1)$. Adott $x_0, x_1, \ldots, x_d \in (0, a-1)$ esetén definiáljuk az $\{x_k\}_{k\geq 0}$ sorozatot az $x_{k+1} = x_k(a - x_{k-d})$, $k \geq d$, rekurzióval. Mutassuk meg, hogy $\lim_{k\to\infty} x_k = a - 1$.

Megoldotta Csernák Tamás és Fehér Zsombor. Kisebb hiányosságokkal megoldotta Matolcsi Dávid. Részeredményt ért el Ágoston Péter, Borbényi Márton és Luo Haoran.

Csernák Tamás és Fehér Zsombor megoldása alapján. Könnyű megmutatni, hogy $1 < a \leq \frac{d+2}{d+1}$ esetén

$$a^{d+1} - a^d < 1. \tag{3}$$

A rekurzióból következik, hogy ha $x_k > 0$, akkor $x_{k-d} \leq a-1$ pontosan akkor, ha $x_{k+1} \geq x_k$. Innen kapjuk, hogy

(A1) ha $n \geq d$ és $x_{n-d}, \ldots, x_n \in (0, a-1]$, akkor $x_n \leq x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq \ldots \leq x_{n+d+1}$, és $x_{n+d+1} = x_n(a-x_n)\ldots(a-x_{n-d}) \leq (a-1)a^{d+1} < a$;

(A2) ha $n \geq d$ és $x_{n-d}, \ldots, x_n \in [a-1, a)$, akkor $x_n \geq x_{n+1} \geq x_{n+2} \geq \ldots \geq x_{n+d+1}$, és $x_{n+d+1} = x_n(a-x_n)\ldots(a-x_{n-d}) > 0$.

Ebből adódik, hogy $x_k \in (0,a)$ minden k-ra.

Ha a sorozat valamilyen indextől kezdve monoton, akkor az $x^* \in [0,a]$ határérték létezik, és megoldása az $x = x(a-x)$ egyenletnek. Vegyük észre, hogy 0 nem lehet a határérték, mert ekkor (A1) szerint valahonnan kezdve monoton nő a sorozat, ami ellentmondás. Ezért ekkor $x^* = a-1$ a határérték.

Tehát feltehetjük, hogy a sorozat nem monoton. Ekkor (A1) és (A2) szerint a sorozat végtelen sok eleme nagyobb, mint $a-1$, és végtelen sok eleme kisebb, mint $a-1$.

Legyen N_1+1 az első olyan index, amire $x_{N_1+1} > a-1$. Nyilván $N_1 \geq d$. Mivel $x_{N_1-d}, \ldots, x_{N_1} \in (0, a-1]$ ezért (A1) szerint $x_{N_1} \leq x_{N_1+1} \leq \ldots \leq$

x_{N_1+d+1}. Tehát N_1+1 után van legalább d elem, melyek mindegyike nagyobb, mint $a-1$. Ugyanakkor az (N_1+d+1)-edik tag után a sorozat csökkenni kezd. N_1 után végtelen sok $(a-1)$-nél kisebb tagja van a sorozatnak, legyen L_1+1 az első ilyen index. Ekkor $x_{L_1} \geq a-1 > x_{L_1+1}$, és a megelőző legalább d elem nagyobb, mint $a-1$, ezért (A2) szerint $x_{L_1} \geq x_{L_1+1} \geq \ldots \geq x_{L_1+d+1}$. Most (A1) szerint, a sorozat megint nőni kezd. Ezt folytatva látjuk, hogy vannak olyan

$$d \leq N_1 < N_1+d+1 \leq L_1 < L_1+d+1 \leq N_2 < N_2+d+1 \leq L_2 < \ldots$$

indexek, hogy az $[N_k+1, L_k]$ indexintervallumban a sorozat tagjai $(a-1)$-nél nagyobbak, míg az $[L_k+1, N_{k+1}]$ intervallumban $(a-1)$-nél kisebbek. Az is adódik az (A1) és (A2) észrevételekből, hogy a sorozat monoton csökken az $[N_k+d+1, L_k+d+1]$, és monoton nő az $[L_k+d+1, N_{k+1}+d+1]$ indexintervallumban.

Definiáljuk az (m_k, M_k) sorozatot a következőképpen: $(m_0, M_0) = (0, a)$, és minden $k \geq 0$-ra legyen

$$M_{k+1} = (a-1)(a-m_k)^d, \qquad m_{k+1} = (a-1)(a-M_{k+1})^d.$$

Az (3) egyenlőtlenség szerint $M_1 \leq M_0$, és így $m_1 \geq m_0$. Innen indukcióval kapjuk, hogy M_k monoton csökken, m_k pedig monoton nő. Az is indukcióval adódik, hogy $m_k \leq a-1 \leq M_k$ minden k-ra. Legyen $m = \lim_{k\to\infty} m_k$, $M = \lim_{k\to\infty} M_k$, amelyekre $m \leq a-1 \leq M$.

Állítjuk, hogy az $[N_s, L_s]$ indexintervallumban legnagyobb elem, azaz x_{N_s+d+1} és az $[L_s, N_{s+1}]$ indexintervallumban legkisebb elem, azaz x_{L_s+d+1} kielégítik az

$$m_s \leq x_{L_s+d+1} \leq x_{N_s+d+1} \leq M_s \tag{4}$$

egyenlőtlenségeket. Ezt s szerinti indukcióval igazoljuk – $s=1$-re könnyen látható az állítás. A fent mondottak alapján

$$x_{N_{s+1}+d+1} \leq x_{N_{s+1}}(a-x_{N_{s+1}-d})(a-x_{N_{s+1}+1-d})\ldots(a-x_{N_{s+1}-1})(a-x_{N_{s+1}}). \tag{5}$$

Itt használjuk fel, hogy –mivel $x(a-x)$ növő a $(0, a-1)$ intervallumon–

$$x_{N_{s+1}}(a-x_{N_{s+1}}) \leq (a-1)(a-(a-1)) \leq a-1 \tag{6}$$

és más indexekre a szorzatban $m_s \leq x_k \leq a-1$, amivel adódik, hogy

$$x_{N_{s+1}+d+1} \leq M_{s+1}.$$

Innen az

$$m_{s+1} \leq x_{L_{s+1}+d+1}$$

egyenlőtlenség ugyanígy igazolható m_s definíciója és a rekurzió alapján.

Mivel (4) mutatja, hogy az $[N_s, N_{s+1})$ indexintervallumban x_k az $[m_s, M_s]$ intervallumba esik, az állításhoz elegendő megmutatni, hogy $M_s \to a-1$ és $m_s \to a-1$, azaz $m = M = a-1$.

A definíció alapján világos, hogy

$$M = (a-1)(a-m)^d, \qquad m = (a-1)(a-M)^d, \tag{7}$$

azaz

$$M = (a-1)\left(a-(a-1)(a-M)^d\right)^d. \tag{8}$$

Állítjuk, hogy az

$$f(x) = (a-1)\left(a-(a-1)(a-x)^d\right)^d$$

függvény szigorúan kisebb x-nél az $(a-1, a)$ intervallumon. Mivel $x = (a-1)$-re $f(x) = x$, elegendő igazolni, hogy $f'(x) < 1$, azaz

$$d^2(a-1)^2\left(a-(a-1)(a-x)^d\right)^{d-1}(a-x)^{d-1} < 1.$$

Ez igaz $x = (a-1)$-re mert $d(a-1) \le d/(d+1) < 1$, és mivel

$$\left(a-(a-1)(a-x)^d\right)(a-x)$$

csökkenő függvény (a deriváltja $(a-1)(d+1)(a-x)^d - a \le (a-x)^d - a < 0$), az állítás igaz marad minden $a-1 < x < a$-re.

Mivel $f(x) < x$ az $(a-1, a)$ intervallumon, (8) miatt M nem lehet eleme ennek az intervallumnak, amiből $M = a-1$ adódik. Innen (7) miatt $m = a-1$, és ezt akartuk igazolni. □

7. feladat. *Kitűző: Totik Vilmos.* Legyen P polinom, és tegyük fel, hogy $L = \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| = 1\}$ Jordan-görbe (körrel homeomorf). Igazoljuk, hogy P' minden zérushelye L belsejében van.

Megoldotta Fehér Zsombor, Gáspár Attila és Matolcsi Dávid.

Gáspár Attila megoldása alapján. Feltehető, hogy P nem konstans. Először is vegyük észre, hogy L belsejében $|P(z)| < 1$, külsejében pedig $|P(z)| > 1$. Valóban, ha lenne olyan z_0 az L külsejében, melyre $|P(z_0)| < 1$, akkor véve egy, a z_0-ből végtelenbe tartó γ görbét, mely elkerüli L-et, ellentmondásra jutnánk, hiszen $|P(z)| \to \infty$ amint $|z| \to \infty$. A maximumtételből azonnal adódik, hogy L belsejében $|P(z)| < 1$.

Innen kapjuk, hogy P minden zérushelye L belsejében van.

Megmutatjuk, hogy ha σ egy zárt görbe, melyen $|P(z)| \equiv c > 0$, akkor σ belsejében P-nek van zérushelye. Jelölje G a σ görbe belsejét. A maximumtétel szerint $\sup_{z\in G} |P(z)| \le c$. Tegyük fel, hogy nincs gyöke P-nek G-ben. Ekkor $1/P$ is holomorf, így a maximumtétel szerint $\sup_{z\in G} |P(z)|^{-1} \le c^{-1}$, azaz $\inf_{z\in G} |P(z)| \ge c$. Mivel P nem konstans, ellentmondásra jutottunk.

Ezek után rátérünk a bizonyításra. Jelölje M az L görbe belsejét. Indirekten tegyük fel, hogy $z_0 \notin M$ és $P'(z_0) = 0$. Tekintsük a $\sigma = \{z : |P(z)| = |P(z_0)|\}$ szintvonalat. Itt $|P(z_0)| \ge 1$. Mivel $P'(z_0) = 0$, σ önmagát átmetszi a z_0 pontban. Valóban, ha a P polinom z_0 körüli alakja $P(z) = P(z_0) + c_k(z - z_0)^k + \cdots$, $k \ge 2$, akkor z_0 egy környezetében a σ lemniszkáta k analitikus ívből áll, amelyek egyenlő szögű szektorokra osztják a környezetét. Azaz σ átmetszi önmagát a z_0 pontban. Innen azonnal adódik, hogy $z_0 \notin L$, hiszen L Jordan-görbe.

Ezért a $\mathbb{C}\backslash\sigma$ halmaznak legalább két korlátos összefüggő komponense van, és a fentiek miatt minden ilyen komponens tartalmazza P legalább egy zérushelyét. De a maximumtétel miatt L minden pontja ezekben a korlátos komponensekben van, így L összefüggősége miatt L ezen komponensek egyikében van. Mivel P összes zérushelye L belsejében van, ez ellentmond annak, hogy a többi komponensben is van P-nek zérushelye.

Ez az ellentmondás igazolja az állítást. □

Fehér Zsombor megoldása. Mint az előző bizonyításban, vegyük észre, hogy P' nem lehet 0 L-en, mivel egy ilyen pont az L-nek többszörös pontja lenne, így L nem lehetne Jordan-görbe.

Jelölje M az L belsejének és L-nek az unióját. Tekintsük a $v(z) = P(z)\overline{P'(z)}$ függvényt. Legyen $z_0 \in L$ tetszőleges. Mivel $P'(z_0) \neq 0$, ezért P szögtartó leképezés a z_0 kis környezetében. Továbbá az L görbe P melletti képe az egységkör, tehát az L görbe z_0 pontbeli érintőjének iránya $\mathrm{i}P(z_0)/P'(z_0)$. Ebből következik, hogy v iránya L-en éppen a külső normális iránya. Ezek szerint alkalmazhatjuk a Poincaré–Hopf-tételt M-re, miszerint $\sum_i \mathrm{index}_{x_i}(v) = 1$, ahol az összegzést a v függvény M-beli zérushelyeire vesszük. A $v = P\overline{P'}$ zérushelyei éppen P és P' zérushelyeinek uniója. Ha x_i zérushely P-nek k-szoros, P'-nek pedig ℓ-szeres zérushelye, $(k + \ell > 0)$, akkor $\mathrm{index}_{x_i}(v) = k - \ell$. Tehát a $\sum_i \mathrm{index}_{x_i}(v)$ összeg éppen a P és a P' multiplicitásokkal számolt M-beli zérushelyei számának a különbsége. Mivel P minden zérushelye M-beli, így azt kaptuk, hogy P'-nek $n - 1$ zérushelye van M-ben. Vagyis P' minden zérushelye M-ben van. □

Megjegyzés. 1. Az előző megoldásban a Poincaré–Hopf-tétel helyett az argumentum elvet is használhatjuk a következőképpen.

Legyen $z_0 \in L$. A Taylor-formula alapján

$$\frac{P(z)}{P'(z_0)} = \frac{P(z_0)}{P'(z_0)} + (z - z_0) + \text{magasabb fokú tagok},$$

és itt z_0-hoz nagyon közeli $z \in L$-re csak úgy lehet

$$\left|\frac{P(z)}{P'(z_0)}\right| = \left|\frac{P(z_0)}{P'(z_0)}\right|,$$

ha a $\frac{P(z_0)}{P'(z_0)}$ vektor merőleges az L görbe z_0 pontbeli érintő-vektorára.

Azt kaptuk tehát, hogy $P(z)/P'(z)$ minden $z \in L$ pontban merőleges az érintővektorra (ezt az előző megoldás is adta), és ebből következik, hogy $P(z)/P'(z)$ körülfordulási száma 1 amint z végigfut L-en pozitív irányban. Az argumentum elv miatt ez a körülfordulási szám ugyanaz, mint a $g(z) = P(z)/P'(z)$ meromorf függvényre az L-en belüli zérushelyek száma mínusz a pólusok száma. Mivel P-nek n zérushelye van L-en belül ha a P polinom n-ed fokú, azt kapjuk, hogy P'-nek $n-1$ zérushelye kell, hogy legyen L-en belül, és ezt kellett igazolni.

Kicsit precízebben: ha P-nek $k_1, \ldots, k_m$-szeres zérushelye van a $z_1, \ldots, z_m$ pontokban (azaz $n = k_1 + \ldots + k_m$), akkor g-nek összesen m zérushelye van, így $m-1$ pólusa kell, hogy legyen L-n belül (és ezek mind különböznek a z_j pontoktól). Ez adja $m-1$ zérushelyét P'-nek, amelyekhez hozzávéve még a $k_j - 1$ zérushelyet a z_j, $j = 1, \ldots, m$, pontokban, kapjuk $k_1 + \cdots + k_m - m + (m-1) = n-1$ zérushelyét P'-nek L-en belül.

2. A második megoldásból az is következik, hogy ha f analitikus függvény az L Jordan-görbén és belsejében úgy, hogy $|f(z)| = 1$ ha $z \in L$ (azaz L a $\{z : |f(z)| = 1\}$ szinthalmaz egy komponense), akkor f'-nek pontosan 1-gyel kevesebb zérushelye van L-en belül mint f-nek.

3. Mindkét megoldás adja a következőt: ha az $L = \{z : |P(z)| = 1\}$ szinthalmaz k diszjunkt komponensből áll, amelyek határa Jordan-görbe, akkor P'-nek ezeken kívül (azaz $\mathbb{C} \setminus L$ végtelen komponensében) pontosan $k-1$ zérushelye van.

8. feladat. *Kitűzők: Totik Vilmos és Varjú Péter.* Bizonyítsuk be, hogy ha egy mérhető valós $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $f(x+t) - f(x)$ mint x függvénye lokálisan integrálható minden t esetén, akkor f is lokálisan integrálható.

Megoldotta Csernák Tamás.

A kitűzők megoldása. Mivel $||f(x+t)| - |f(x)|| \le |f(x+t) - f(x)|$, feltehető, hogy f nemnegatív. Legyen T_n azon t-k halmaza, amelyekre

$$\int_0^2 |f(x+t) - f(x)| \mathrm{d}x < n.$$

Ekkor van olyan N, hogy a $T_N \cap [0, 1/2]$ halmaz (Lebesgue) mértéke pozitív, hiszen $\cup_{n=1}^{\infty} T_n = \mathbb{R}$. Ha $t, s \in T_N \cap [0, 1/2]$, akkor

$$\int_0^1 |f(x+t+s) - f(x)|\mathrm{d}x \leq$$
$$\leq \int_0^1 |f(x+t+s) - f(x+s)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f(x+s) - f(x)|\mathrm{d}x \leq 2N.$$

Mivel pozitív mértékű halmazok összege tartalmaz nem üres nyílt intervallumot, ezért a $\{t+s : t, s \in T_N \cap [0, 1/2]\} = (T_N \cap [0, 1/2]) + (T_N \cap [0, 1/2])$ halmaz tartalmaz egy I nem üres nyílt intervallumot. Tehát minden $u \in I$ esetén

$$\int_0^1 |f(x+u) - f(x)|\mathrm{d}x \leq 2N,$$

és így

$$\int_I \int_0^1 |f(x+u) - f(x)|\mathrm{d}x\mathrm{d}u \leq 2N|I|.$$

Azaz

$$\int_0^1 \left(\int_I |f(x+u) - f(x)|\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}x \leq 2N|I|.$$

Speciálisan, valamilyen $x_0 \in [0, 1]$ számra

$$\int_I |f(x_0+u) - f(x_0)|\mathrm{d}u < \infty,$$

amiből következik, hogy

$$\int_{I+x_0} f(t)\mathrm{d}t = \int_I f(x_0+u)\mathrm{d}u < \infty.$$

Tehát f integrálható az $I + x_0$ intervallumon. Ekkor a feltevés szerint ennek bármely eltoltján is integrálható, ami adja az állítást. □

9. feladat. *Carl Schildkrauttól ered.* Van-e olyan függvényegyenlet[1], amelynek van megoldása, és minden megoldásának értékkészlete az egész számok halmaza?

[1]Egy függvényegyenlet $E = 0$ alakú, ahol E függvényforma. A függvényformák halmaza a legszűkebb olyan véges jelsorozatokból álló $\mathcal{F}$ halmaz, amely tartalmazza az összes x_i, $i = 1, 2, \ldots$ változót, az összes $r \in \mathbb{R}$ valós konstanst, és amely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy ha $E, E_1, E_2 \in \mathcal{F}$, akkor $E_1 + E_2, E_1 \cdot E_2$ és $f(E)$ is $\mathcal{F}$-beliek (itt f előre rögzített függvényszimbólum). Az $E = 0$ függvényegyenlet megoldása olyan valós f függvény, amelyre $E = 0$ a változók minden valós értékére fennáll. Pl. $f\left(x_1 + f(\sqrt{2} \cdot x_2 \cdot x_2)\right) + (-\pi) + (-1) \cdot x_1 \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$ függvényegyenlet.

Megoldotta Ágoston Péter, Csernák Tamás, Fehér Zsombor, Gáspár Attila és Matolcsi Dávid.

A feladat alapjául a 2019-es ELMO matematikaverseny 6. feladata szolgál, melynek kitűzője Carl Schildkraut. Az ELMO verseny hivatalos weboldala: `https://web.evanchen.cc/elmo/problems.html`.

Totik Vilmos megoldása. A válasz igen. Legyen $f_0(x) = [x]$ az egészrész függvény. Az alábbiakban konstruálunk egy olyan függvényegyenletet, amelynek az egyetlen megoldása f_0.

A következőkben felhasználjuk, hogy véges sok $E_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, függvényegyenletet egyetlen $E = 0$ egyenletté írhatunk át (abban az értelemben, hogy pontosan akkor van olyan f ami megoldása minden E_i-nek, ha f megoldása E-nek), ahol $E = \sum_{i=1}^{N} E_i^2$ (vagy csak $\sum_{i=1}^{N} E_i$ ha az E_i egyenletek megoldásai szükségképpen nemnegatívak).

Tekintsük az

$$x^2\, g(x)^2 + (g(0) - 1)^2 = 0 \tag{9}$$

függvényegyenletet. Világos, hogy ennek egyetlen megoldása az a g_0 függvény, melyre $g_0(x) = 0$ ha $x \neq 0$, $g_0(0) = 1$.

Vegyük észre, hogy $h_0(x) = f_0(x) + f_0(1-x)$ értéke 1, ha $x \in \mathbb{Z}$, különben 0. Tehát $g_0(x) = h_0(x)\, h_0(\sqrt{2}x)$. A (9) függvényegyenletben helyettesítsük g helyére a

$$g(x) = (f(x) + f(1-x)) \left(f\left(\sqrt{2}x\right) + f\left(1 - \sqrt{2}x\right)\right) \tag{10}$$

kifejezést. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$x^2 \left[(f(x) + f(1-x))(f(\sqrt{2}x) + f(1-\sqrt{2}x))\right]^2 + \left((f(0) + f(1))^2 - 1\right)^2 = 0.$$

Az utolsó tag helyett az $f(0)^2 + (f(1) - 1)^2$ kifejezést írva, egy f megoldásra $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$ adódik. Ezek szerint f_0 megoldása az

$$x^2 \left[(f(x) + f(1-x))(f(\sqrt{2}x) + f(1-\sqrt{2}x))\right]^2 + f(0)^2 + (f(1) - 1)^2 = 0 \tag{11}$$

egyenletnek.

Azt, hogy az $f(x + 1) = f(x) + 1$ teljesüljön, elérhetjük az

$$(f(x+1) - f(x) - 1)^2 = 0 \tag{12}$$

függvényegyenlettel.

Végül elérjük, hogy $f(x) = 0$ teljesüljön minden $0 < x < 1$ esetén. Ehhez tekintsük a

$$g_0\left(x(1-x) - y^2\right)\, y^2\, f(x)^2 = 0$$

egyenletet, ahol g_0 (az egyetlen) megoldása (9) egyenletnek. Ha $x \notin [0,1]$, akkor $x(1-x) < 0$, így $g_0(x(1-x)-y^2) = 0$, tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ esetén. A $g_0(x(1-x)-y^2)\, y^2 \neq 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x \in (0,1)$ és $y = \sqrt{x(1-x)}$. Ekkor szükségképpen $f(x) = 0$. A fenti egyenletben g_0-t kiküszöbölhetjük a (10) formulával, és kapjuk, hogy f_0 megoldása az

$$\begin{aligned} &\left[f\left(x(1-x)-y^2\right) + f\left(1-\left(x(1-x)-y^2\right)\right)\right] \times \\ &\times \left[f\left(\sqrt{2}\left(x(1-x)-y^2\right)\right) + f\left(1-\sqrt{2}\left(x(1-x)-y^2\right)\right)\right] y^2\, f(x)^2 = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

egyenletnek.

Összegezve, azt kaptuk, hogy f_0 megoldása a (11), (12), (13) egyenleteknek. Ezeket a feladat elején említett módon egyetlen egyenletként írva az

$$\begin{aligned} &x^2\left[(f(x)+f(1-x))\left(f\left(\sqrt{2}x\right)+f\left(1-\sqrt{2}x\right)\right)\right]^2 + f(0)^2 + (f(1)-1)^2 \\ &+ (f(x+1)-f(x)-1)^2 \\ &+ \left[f\left(x(1-x)-y^2\right) + f\left(1-\left(x(1-x)-y^2\right)\right)\right] \times \\ &\times \left[f\left(\sqrt{2}\left(x(1-x)-y^2\right)\right) + f\left(1-\sqrt{2}\left(x(1-x)-y^2\right)\right)\right] y^2\, f(x)^2 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

függvényegyenletet kapjuk.

Állítjuk, hogy ez a függvényegyenlet megfelelő, azaz egyetlen megoldása f_0. Az, hogy f_0 megoldás, az eddigiekből következik. Megmutatjuk, hogy nincs más megoldás.

Legyen f megoldása (14) egyenletnek. Az első sorból világos, hogy $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, és

$$(f(x)+f(1-x))\left(f\left(\sqrt{2}x\right)+f\left(1-\sqrt{2}x\right)\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \neq 0, \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Legyen $x \in (0,1)$, és írjunk a (14) egyenlet utolsó két sorában $y = \sqrt{x(1-x)}$-et. Ekkor szükségképpen $f(x) = 0$. Tehát $f(x) = [x] = f_0(x)$ minden $x \in [0,1]$ esetén. Az $f(x+1) = f(x)+1$ egyenlőségből következik, hogy $f = f_0$, azaz a megoldás egyértelmű. □

Matolcsi Dávid megoldása. Azt állítjuk, hogy az

$$\begin{aligned}
&f(4x(1-x))^2\,(4x(1-x)-1)^2\\
&+(f(1)+1)^2\\
&+\big(f(x^2+1)-f(x^2)-1\big)^2\,\big(f(x^2)+x^2\big)^2\\
&+\big(f(x^2+1)-f(x^2)-1\big)^2\,\big(f(x^2+2)-f(x^2+1)+1\big)^2=0
\end{aligned} \tag{15}$$

függvényegyenlet teljesíti a feladat feltételeit.

Mivel f valós értékű, f pontosan akkor megoldása a (15) függvényegyenletnek, ha a baloldali összeg minden tagja azonosan 0. A $4x(1-x)$ függvény minden 1-nél kisebb valós értéket felvesz, ezért az

$$f(4x(1-x))\,(4x(1-x)-1)=0$$

egyenletből következik, hogy $f(y)=0$ minden $y<1$ esetén.

Továbbá, az $(f(x^2+1)-f(x^2)-1)\,(f(x^2)+x^2)=0$ egyenlőségből következik, hogy

$$\text{tetszőleges } y\geq 0 \text{ esetén } f(y)=-y \text{ vagy } f(y+1)=f(y)+1. \tag{16}$$

Ebből teljes indukcióval adódik, hogy ha k nemnegatív egész és $y\in(k,k+1)$, akkor $f(y)=k$. Valóban, $k=0$-ra beláttuk, hogy $f(y)=0$. Legyen $k\geq 1$, $y\in(k,k+1)$ és tegyük fel, hogy $k-1$-ig igaz az állítás. Ekkor az indukciós feltevés szerint $f(y-1)=k-1$ tehát $f(y-1)\neq -(y-1)$. Ekkor szükségképpen $f(y)=f(y-1)+1=k$, amint állítottuk.

A (15) egyenlet bal oldalán szereplő második tagból világos, hogy $f(1)=-1$. A negyedik tagot megvizsgálva látjuk, hogy

$$f(y+1)=f(y)+1 \text{ vagy } f(y+2)=f(y+1)-1 \text{ minden } y\geq 0 \text{ számra.} \tag{17}$$

Ebből teljes indukcióval következik, hogy $f(k)=-k$ minden $k\geq 0$ egészre. Valóban, $k=0,1$ esetén igaz az állítás. Legyen $k\geq 2$ és tegyük fel, hogy $k-1$-re igaz az állítás. A (17) formulába $y=k-2\geq 0$ értéket beírva $f(k-1)=f(k-2)+1$ vagy $f(k)=f(k-1)-1$ adódik. Ezek közül az indukciós feltevés szerint az első nem teljesülhet, ezért a második teljesül, ami éppen az állításunk.

Összegezve, azt kaptuk, hogy ha f megoldása a (15) egyenletnek, akkor

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x<1,\\ k, & \text{ha } x\in(k,k+1), k\geq 1 \text{ egész},\\ -k, & \text{ha } x=k,\ k\geq 1 \text{ egész.}\end{cases}$$

Világos, hogy f értékkészlete éppen az egész számok halmaza. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy f valóban kielégíti a (15) egyenletet. $\square$

Fehér Zsombor megoldása. Van ilyen függvényegyenlet, például az

$$\begin{aligned}
&f(0)^2 + (f(1)-1)^2 + (f(2)+1)^2 + (f(3)-2)^2 \\
&+ \big(f(4-x^2)\big(f(4-x^2)^2-1\big)\big(f(4-x^2)^2-4\big)\big)^2 \\
&+ \Big(\big(f(4+x^2)-f(2+x^2)\big)^2-1\Big)^2 \\
&+ \Big(\big(f(4+x^2)-f(x^2)\big)^2-4\Big)^2 = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Szorzás helyett négyzetre emelést, és x_1 helyett x-et írtunk. Mivel az egyenletben valós számok négyzetösszege 0, ezért f pontosan akkor megoldása a függvényegyenletnek, ha megoldása a következő egyenletrendszernek:

$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(2)=-1,\ f(3)=2, \tag{19}$$
$$f(4-x^2)\in\{-2,-1,0,1,2\}, \tag{20}$$
$$f(4+x^2)-f(2+x^2)\in\{-1,1\}, \tag{21}$$
$$f(4+x^2)-f(x^2)\in\{-2,2\}. \tag{22}$$

Megmutatjuk, hogy az egyenletrendszer minden megoldásának értékkészlete $\mathbb{Z}$. Valóban, (20) alapján minden $y \le 4$ esetén $f(y)$ egész, és (21) alapján minden $y \ge 4$ esetén $f(y) = f(y-2) \pm 1$, tehát ha $f(y-2)$ egész, akkor $f(y)$ is az. Így indukcióval adódik, hogy f mindenhol egész.

Ezután belátjuk k szerinti indukcióval, hogy $f(2k) = -k$ és $f(2k+1) = k+1$ minden $k \in \mathbb{N}$ természetes számra. A (19) egyenlet alapján $k = 0$ és $k = 1$ esetén ez teljesül. Ha $k \ge 2$, és már tudjuk, hogy $f(2k-4) = -k+2$ és $f(2k-2) = -k+1$, akkor (21) alapján $f(2k) \in \{-k, -k+2\}$, (22) alapján pedig $f(2k) \in \{-k, -k+4\}$, így $f(2k) = -k$. Ugyanígy, ha $f(2k-3) = k-1$ és $f(2k-1) = k$, akkor (21) és (22) alapján $f(2k+1) = k+1$. Ezzel beláttuk, hogy f minden egész számot felvesz legalább 1 helyen, így értékkészlete valóban $\mathbb{Z}$.

Végül pedig van megoldása az egyenletrendszernek, például:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le -1, \\ -k, & \text{ha } 2k-1 < x \le 2k,\ k \in \mathbb{N}, \\ k+1, & \text{ha } 2k < x \le 2k+1,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

□

Megjegyzés. Az utolsó megoldásban megadott függvényegyenlet megoldása nem egyértelmű. A (19)–(22) egyenletekből látjuk, hogy f értékeire a negatív félegyenesen az egyetlen megszorítás, hogy a $\{-2,-1,0,1,2\}$ halmazban legyenek. Vagyis a lehetséges megoldások száma $2^{\mathfrak{c}}$.

10. feladat. *Kitűző: Molnár Lajos.* Igazoljuk, hogy ha A és B pozitív önadjungált operátorok a H komplex Hilbert-téren, akkor

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n x\|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \|B^n x\|^{1/n}$$

pontosan akkor teljesül minden $x \in H$ esetén, ha $A^n \leq B^n$ minden pozitív egész n-re.

A kitűző megoldása. Tegyük fel, hogy $A^n \leq B^n$ minden n-re. Ez pontosan azt jelenti, hogy $\langle A^n x, x\rangle \leq \langle B^n x, x\rangle$ minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in H$ esetén. Ekkor, az önadjungáltság miatt (ami egyébként komplex tér esetén a pozitivitásból automatikusan következik)

$$\|A^n x\|^2 = \langle A^n x, A^n x\rangle = \langle A^{2n} x, x\rangle \leq \langle B^{2n} x, x\rangle = \|B^n x\|^2.$$

Azaz pontonként $\|A^n x\| \leq \|B^n x\|$ fennáll minden n-re, amiből adódik az állítás.

Megfordítva, tegyük fel, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n x\|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \|B^n x\|^{1/n} \tag{23}$$

teljesül minden $x \in H$ vektorra.

Legyen T egy tetszőleges pozitív operátor H-n, és jelölje E_T a spektrálmértékét. Mivel T pozitív, spektruma a nemnegatív félegyenesen van, ezért $E_T : \mathcal{B}([0,\infty)) \to \mathcal{P}(H)$, ahol $\mathcal{B}([0,\infty))$ a Borel-halmazokat, $\mathcal{P}(H)$ pedig a H ortogonális projekcióinak összességét jelöli. Legyen $x \in H$ rögzített egységvektor. Ekkor $\langle E_T(\cdot)x, x\rangle = E_{T,x}(\cdot)$ valószínűségi mérték a $[0,\infty)$ Borel-halmazain. Mivel $T = \int_{[0,\infty)} u \mathrm{d}E_T(u)$, így a spektrálmérték tulajdonságai szerint

$$T^{2n} = \int_{[0,\infty)} u^{2n}\, \mathrm{d}E_T(u)$$

és

$$\|T^n x\|^2 = \langle T^n x, T^n x\rangle = \langle T^{2n} x, x\rangle = \int_{[0,\infty)} u^{2n}\, \mathrm{d}E_{T,x}(u).$$

Vagyis

$$\|T^n x\|^{1/n} = \left(\int_{[0,\infty)} u^{2n}\, \mathrm{d}E_{T,x}(u)\right)^{1/(2n)}.$$

A jobb oldalon éppen az $([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)), E_{T,x})$ valószínűségi mezőn definiált identikus függvény L^{2n}-normája szerepel. Ismert, hogy valószínűségi mezőn az L^p-normák határértéke $p \to \infty$ esetén éppen az L^∞-norma, azaz

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{1/n} &= \inf\{t \geq 0 :\, E_{T,x}((t,\infty)) = 0\} \\ &= \min\{t \geq 0 :\, E_{T,x}((t,\infty)) = 0\}.\end{aligned}$$

Ezzel azt is beláttuk, hogy a feladatban szereplő lim sup valójában lim. Mivel $E_{T,x}((t,\infty)) = \langle E_T((t,\infty))x, x\rangle$, a fenti határérték a legkisebb olyan $t \geq 0$ szám, melyre x az $E_T((t,\infty))$ képterének ortogonális komplementerében, azaz $E_T([0,t])$ képterében van. Ezért

$$\min\{t \geq 0 :\, E_{T,x}((t,\infty)) = 0\} = \min\{t \geq 0 :\, x \in \mathrm{ran} E_T([0,t])\}.$$

Összegezve, az (23) egyenlőtlenség azt jelenti, hogy tetszőleges $x \in H$ vektorra

$$\min\{t \geq 0 :\, x \in \mathrm{ran} E_A([0,t])\} \leq \min\{t \geq 0 :\, x \in \mathrm{ran} E_B([0,t])\}.$$

Azaz, ha valamely t esetén $x \in \mathrm{ran} E_B([0,t])$, akkor $x \in \mathrm{ran} E_A([0,t])$, vagyis $\mathrm{ran} E_A([0,t]) \supset \mathrm{ran} E_B([0,t])$. Tehát, tetszőleges x-re

$$E_{B,x}([0,t]) = \langle E_B([0,t])x, x\rangle \leq \langle E_A([0,t])x, x\rangle = E_{A,x}([0,t]).$$

A spektrálmérték tulajdonságai szerint tetszőleges $x \in H$ vektorra és n pozitív egészre

$$\begin{aligned}\langle A^n x, x\rangle &= \int_{[0,\infty)} u^n \,\mathrm{d}E_{A,x}(u) = \int_0^\infty n u^{n-1}[1 - E_{A,x}([0,u])]\,\mathrm{d}u \\ &\leq \int_0^\infty n u^{n-1}[1 - E_{B,x}([0,u])]\,\mathrm{d}u = \int_{[0,\infty)} u^n \,\mathrm{d}E_{B,x}(u) = \langle B^n x, x\rangle,\end{aligned}$$

ami éppen azt jelenti, hogy $A^n \leq B^n$ teljesül minden n-re. $\square$