A 2018. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

2018. október 26. – 2018. november 5.

1. Legyen $S \subset \mathbb{R}$ zárt halmaz és $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Definiáljunk egy G gráfot az alábbiak szerint. A gráf csúcsai azon $x \in \mathbb{R}^n$ pontok, amelyekre $f(x,x) \notin S$. Az $x, y \in \mathbb{R}^n$ csúcsokat akkor és csak akkor kötjük össze éllel, ha $f(x,y) \in S$ vagy $f(y,x) \in S$. Igazoljuk, hogy a G gráf kromatikus száma megszámlálható.

2. Egy $\mathcal{F}$ halmazcsaládot *igazán rendes*nek hívunk, ha tetszőleges $A, B \in \mathcal{F}$ esetén létezik olyan $C \in \mathcal{F}$ halmaz, melyre $A \cup B = A \cup C = B \cup C$. Legyen

$$f(n) = \min\left\{\max_{A\in\mathcal{F}} |A| \ : \ \mathcal{F} \text{ igazán rendes és } |\cup\mathcal{F}| = n\right\}.$$

Igazoljuk, hogy az $f(n)/n$ sorozat konvergens, és határozzuk meg a határértékét.

3. Egy $n \times n$-es mátrixot *jólfésültnek* hívunk, ha minden eleme 0 vagy 1, és nem tartalmazza az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot részmátrixként. Lássuk be, hogy van olyan $c > 0$ konstans, amelyre teljesül, hogy bármely $n \times n$-es jólfésült mátrixnak van olyan, legalább $cn \times cn$-es részmátrixa, melynek minden eleme egyforma. (Egy jólfésült mátrix tartalmazhatja a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixot részmátrixként.)

4. Legyen P egy véges ponthalmaz a síkon, melyre teljesül, hogy bármely két pontjának távolsága egész szám. Lássuk be, hogy P pontjai színezhetőek három színnel úgy, hogy bármely két azonos színű pont távolsága páros legyen.

5. Tetszőleges n természetes számra legyen

$$f(n) = \sum_{p|n} p^{k_p},$$

ahol p végigfut n prímosztóin, és k_p az az egész szám, amelyre

$$p^{k_p} \le n < p^{k_p+1}.$$

Mekkora

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)\log\log n}{n\log n}?$$

6. Bizonyítsuk be, hogy ha a egész szám, és d pozitív osztója az $a^4 + a^3 + 2a^2 - 4a + 3$ számnak, akkor d negyedik hatvány modulo 13.

7. Határozzuk meg azokat az $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ függvényeket, amelyek teljesítik az

$$\begin{aligned} &f(f(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), f(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, f(a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn})) \\ &\qquad = f(f(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}), f(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}), \ldots, f(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn})) \end{aligned}$$

egyenlőséget az $a_{ij} \in \{0,1\}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ elemek tetszőleges választása mellett.

8. Létezik-e olyan szakaszonként lineáris, folytonos, szürjektív $f : [0,1] \to [0,1]$ leképezés, amelyre $f(0) = f(1) = 0$, és minden pozitív egész n-re

$$2,0001^{(n-10)} < P_n(f) < 2,9999^{(n+10)}$$

teljesül, ahol $P_n(f)$ az olyan x pontok száma, amelyekre $\underbrace{f(\ldots f}_{n}(x)\ldots) = x$?

9. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ egészfüggvény, és tegyük fel, hogy a deriváltakból álló $f^{(n)}$ függvénysorozat pontonként konvergens. Bizonyítsuk be, hogy ekkor alkalmas C komplex számmal $f^{(n)}(z) \to Ce^z$ pontonként.

10. Adott a 3-dimenziós hiperbolikus térben a P sík és négy különböző egyenes: az a_1 és a_2 egyenesek merőlegesek P-re, az r_1 és r_2 egyenesek pedig nem metszik P-t, és távolságuk P-től ugyanakkora. Jelölje $i = 1, 2$ esetén S_i azt a forgásfelületet, melyet úgy kaphatunk, hogy r_i-t körbeforgatjuk a_i körül. Mutassuk meg, hogy S_1 és S_2 közös pontjai lefedhetők két síkkal.

11. Egy m-dimenziós sima sokaságot *parallelizálhatónak* nevezünk, ha van rajta m darab sima érintő vektormező, melyek minden pontban lineárisan függetlenek. Bizonyítsuk be, hogy ha M egy zárt, irányítható, $2n$-dimenziós, 0 Euler-karakterisztikájú sima sokaság, mely immertálható egy parallelizálható $(2n+1)$-dimenziós N sima sokaságba, akkor M maga is parallelizálható.

* * *

A Schweitzer Miklós Emlékversenyen részt vehetnek mindazok, akik a verseny megrendezésekor Magyarországon vagy magyar állampolgárként külföldön valamely egyetem, főiskola hallgatói, vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny megrendezésének évében szereztek egyetemi, főiskolai oklevelet. PhD-hallgatók csak akkor vehetnek részt, ha egyetemi, főiskolai diplomájukat a verseny megrendezésének évében szerezték. A versenyből ki vannak zárva azok, akik a verseny megrendezésének événél korábban MSc-szintű oklevelet szereztek matematikus, alkalmazott matematikus, informatikus, programtervező matematikus vagy matematika tanári szakon akár itthon, akár külföldön.

A feladatok megoldására a versenyzők idén 10 napot fordíthatnak. A megoldásokat magyar nyelven, jól olvashatóan, lehetőleg gépelve vagy tintával, feladatonként külön papírra írva, továbbá a versenyzők nevének, évfolyamának, végzettségének, pontos lakcímének és e-mail címének feltüntetésével 2018. november 5-én (hétfőn) magyar idő szerint 12.00 óráig

- *személyesen lehet benyújtani* (az átvétel időpontját igazolják) az ELTE Matematikai Intézetének titkárságán (Budapest XI. kerület, Pázmány Péter sétány 1/C, 3-510-es szoba)

- vagy ugyanezen időpontig *ajánlottan postára kell adni* a versenybizottság címére:

  ELTE Matematikai Intézet, Keleti Tamás
  1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C

- vagy *elektronikusan PDF formátumban* a kiss.viktor@renyi.mta.hu címre.

Más úton, illetve később beadott megoldásokat a versenybizottság nem vesz figyelembe.

A versenyzők tetszés szerinti számú kitűzött feladat megoldását nyújthatják be. A verseny nyertesei között a Társulat Schweitzer Miklós díjakat oszt ki.

A feladatokat a versenyzőknek önállóan kell megoldaniuk. Több versenyző együttműködése nincs megengedve. Az internet használata csak passzív módon engedélyezett, azaz keresni szabad, de bármilyen fórumon bármilyen kérdést feltenni tilos. Ha a versenybizottság tudomására jut, hogy valamelyik versenyző ezt a követelményt megszegte, az illetőt a versenyből kizárja.

Arra kérünk mindenkit, hogy a versenyzőknek semmilyen segítséget ne nyújtson a matematikai feladatok megoldásához, s velük semmiféle eszmecserét se folytassanak a feladatok megoldásával kapcsolatban a beadási határidő lejártáig. Kérjük továbbá, hogy amennyiben ilyen természetű szabálytalanság elkövetése jut bárki tudomására, haladéktalanul jelezze ezt a versenybizottságnak a fenti címen.

A megoldásokat november 8-án, csütörtökön 16:00 órától az ELTE Déli Tömb 3-110 teremben megbeszéljük. A verseny eredményhirdetése várhatóan december 12-én 14:00 órakor a Rényi Intézet Nagytermében lesz (1053 Bp., Reáltanoda utca 13–15.). Mindenkit örömmel látunk!

További információ a `http://www.bolyai.hu/schweitzer.htm` oldalon található.

a Versenybizottság