Jelentés a 2018. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat 2018. október 26. és november 5. között rendezte meg a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, továbbá azok vehettek részt, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 2018-ban fejezték be.

A verseny lebonyolítására a Társulat a következő bizottságot kérte fel: Keleti Tamás (elnök), Kiss Viktor (titkár), Csikvári Péter, Elekes Márton, Frenkel Péter, Harangi Viktor, Károlyi Gyula, Kós Géza, Kun Gábor, Nagy János, Pálvölgyi Dömötör, Terpai Tamás.

A bizottság október 17-i ülésén kiválasztotta a 11 kitűzendő feladatot. A bizottság köszönetét fejezi ki mindazoknak, akik feladatot javasoltak a versenyre. A kitűzött feladatokat javasolták: 1. Solymosi József, 2. Károlyi Gyula, 3. Pach János, Korándi Dániel és Tomon István, 4. Damásdi Gábor, 5. Ruzsa Imre, 6. Kós Géza, 7. Pálfy Péter Pál, 8. Buczolich Zoltán, 9. Lempert László, 10. Kós Géza, 11. Szűcs András és Terpai Tamás.

A verseny eredményes volt, 22-en indultak rajta, összesen 79 megoldást nyújtottak be.

A versenybizottság november 28-i ülésén megállapította, hogy egyetlen versenyző oldott meg lényegében tíz feladatot (1., 2., 3., 4., 5., 8., 9., 11., apró pontatlanságtól eltekintve a 6. feladatot, illetve apró, javítható hibáktól eltekintve a 7. feladatot). Ennek alapján

*I. díj*ban és 100 000 forint pénzjutalomban részesül

Szőke Tamás, az ELTE elsőéves, matematikus mesterszakos hallgatója.

Egy versenyző oldott meg lényegében nyolc feladatot (1., 2., 3., 4., 5., 7., 9., valamint apró pontatlanságoktól eltekintve a 6. feladatot). Ennek alapján

*II. díj*ban és 60 000 forint pénzjutalomban részesül

Csernák Tamás, az ELTE másodéves, matematikus mesterszakos hallgatója.

Egy versenyző oldott meg hét feladatot (1., 2., 3., 4., 7., 8., 9., valamint részeredmény az 5. és 6. feladatban).

Ennek alapján

*III. díj*ban és 50 000 forint pénzjutalomban részesül

Maga Balázs, az ELTE másodéves, matematikus mesterszakos hallgatója.

Egy versenyző oldott meg öt feladatot (1., 2., 4., 7., 9.). Ennek alapján

*kiemelt dicséret*ben részesül

Gáspár Attila, az ELTE elsőéves, matematika alapszakos hallgatója.

További öt versenyző oldott meg három, vagy annál több feladatot. Ennek alapján

*dicséret*ben részesül

Borbényi Márton, az ELTE másodéves, matematika alapszakos hallgatója,

Imolay András, az ELTE elsőéves, matematika alapszakos hallgatója,

Markó Ádám, az ELTE harmadéves, matematika alapszakos hallgatója,

Matolcsi Dávid, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója és

Schweitzer Ádám, az ELTE elsőéves, matematika alapszakos hallgatója.

Közülük Borbényi Márton megoldotta a 1., 2. és 7., valamint apró pontatlanságtól eltekintve a 6. feladatot. Imolay András megoldotta az 1., 2. és 4., feladatot, valamint értékes részeredményt ért el a 7. feladatban. Markó Ádám megoldotta az 1. és 7. feladatot, javítható hibáktól eltekintve a

6. feladatot, és értékes részeredményt ért el a 2. feladatnál. Matolcsi Dávid megoldotta az 1., 3., 4. és 5. feladatot. Schweitzer Ádám megoldotta az 1. és 8. feladatot, apró pontatlanságoktól eltekintve a 7. és 9. feladatot.

A elsőéves alapszakos hallgatók közül legjobban szerepelt, ennek alapján
*a legjobb első évesnek járó díj*ban és 20 000 forint pénzjutalomban részesül
Gáspár Attila, az ELTE hallgatója.

Legalább egy feladatot helyesen megoldott
Ágoston Péter, az ELTE másodéves, matematikus mesterszakos hallgatója,
Csépai András, az ELTE elsőéves, matematikus mesterszakos hallgatója,
Daróczi Sándor, az ELTE elsőéves, matematika alapszakos hallgatója,
Kovács Benedek, a Cambridge-i Egyetem elsőéves, matematika alapszakos hallgatója,
Kubasch Alexander, az ELTE harmadéves, matematika alapszakos hallgatója,
Pálfy Máté, az ELTE harmadéves, matematika alapszakos hallgatója,
Porupsánszki István, az ELTE elsőéves, matematikus mesterszakos hallgatója,
Seress Dániel, az ELTE harmadéves, matematika alapszakos hallgatója.

A versenyen részt vevő bármelyik diák kérheti, hogy írjuk meg, melyik megoldásukat hogyan értékelte a bizottság. Ehhez írjanak egy emailt a bizottság titkárának a `kiss.viktor@renyi.mta.hu` címre.

A díjakat a Morgan Stanley Magyarország Elemző Kft. támogatta, ezért a versenybizottság köszönetét fejezi ki.

A 2018. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatainak megoldása

1. feladat. Legyen $S \subset \mathbb{R}$ zárt halmaz és $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Definiáljunk egy G gráfot az alábbiak szerint. A gráf csúcsai azon $x \in \mathbb{R}^n$ pontok, amelyekre $f(x,x) \notin S$. Az $x, y \in \mathbb{R}^n$ csúcsokat akkor és csak akkor kötjük össze éllel, ha $f(x,y) \in S$ vagy $f(y,x) \in S$. Igazoljuk, hogy a G gráf kromatikus száma megszámlálható.

(Solymosi József)

1. megoldás (Solymosi József). Mivel S zárt, ezért a gráf minden csúcsához van olyan nyílt környezet, amelyben nincs két csúcs ami össze lenne kötve éllel (itt használtuk hogy f folytonos és $f(x,x)$ nincs S-ben). Ezek a környezetek a csúcsok halmazának egy fedését adják nyílt halmazokkal, így belőlük kiválasztható egy megszámlálható részfedés. Rendeljünk ezen megszámlálható sok környezethez egy-egy különböző színt, majd a gráf minden csúcsát az egyik fedő környezet színével színezve jó színezést kapunk.

2. megoldás. Mivel (S zártságát és f folytonosságát használva) a csúcsok V halmaza nyílt, így felírható $V = \cup_{i=1}^{\infty} K_i$ növő unióként alkalmas K_i kompakt halmazokkal. Elegendő belátni, hogy minden i-re K_i pontjai jól színezhetőek véges sok színnel, hiszen ekkor nyilván ugyanez áll $K_{i+1} \setminus K_i$ pontjaira is, és ezen színezésekben különböző i-kre diszjunkt véges színhalmazokat választva adódik V egy jó színezése megszámlálható sok színnel. A K_i csúcshalmaz jó színezését a következőképpen kapjuk. Mivel az élek E halmaza (S zártságát és f folytonosságát használva) zárt, a K_i-n belül futó élek $(K_i \times K_i) \cap E$ halmaza kompakt, és V definícióját használva diszjunkt a $\{(x,x) : x \in K_i\}$ kompakt halmaztól. Így a két halmaz távolsága pozitív, amiből következik, hogy alkalmas $\varepsilon > 0$ számra K_i-n belül nem köt össze él ε-nál közelebbi pontokat. Ekkor viszont egy ε-nál kisebb átmérőjű kis kockákból álló rács kockáiból a K_i-t metsző véges sokat mind különböző színűre színezve kapjuk K_i egy jó színezését véges sok színnel.

2. feladat. Egy $\mathcal{F}$ halmazcsaládot *igazán rendes*nek hívunk, ha tetszőleges $A, B \in \mathcal{F}$ esetén létezik olyan $C \in \mathcal{F}$ halmaz, melyre $A \cup B = A \cup C = B \cup C$. Legyen

$$f(n) = \min \left\{ \max_{A \in \mathcal{F}} |A| \ : \ \mathcal{F} \text{ igazán rendes és } |\cup \mathcal{F}| = n \right\}.$$

Igazoljuk, hogy az $f(n)/n$ sorozat konvergens, és határozzuk meg a határértékét.

(Károlyi Gyula)

Megoldás (Csikvári Péter). A következő három észrevételből következni fog, hogy a sorozat konvergens és a határérték $\frac{1}{2}$:

- $f(n_1 + n_2) \leq f(n_1) + f(n_2)$
- $f(n) \geq \frac{n}{2}$
- $f(2^k - 1) = 2^{k-1}$

Az első észrevételből és a Fekete lemmából azonnal következik, hogy a sorozat konvergens. Sőt ilyenkor azt is tudjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \inf_n \frac{f(n)}{n}$. A második és harmadik észrevételből pedig következik, hogy ez az infimum éppen $\frac{1}{2}$.

Az $f(n_1 + n_2) \leq f(n_1) + f(n_2)$ egyenlőtlenség abból következik, hogy ha van egy $\mathcal{F}_1$ igazán rendes halmazcsaládunk az $\{1, 2, \ldots, n_1\}$ halmazon és egy $\mathcal{F}_2$ igazán rendes halmazcsaládunk az

$\{n_1+1, n_1+2, \ldots, n_1+n_2\}$ elemeken akkor $\mathcal{F} = \{A_1 \cup A_2 \mid A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}$ egy igazán rendes halmazcsalád n_1+n_2 elemen.

A második észrevételt indukcióval bizonyítjuk. A feladat feltétele úgy is megfogalmazható, hogy tetszőleges A, B esetén létezik egy C, melyre $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq C \subseteq A \cup B$. Legyen A egy legnagyobb méretű halmaz egy $\mathcal{F}$ igazán rendes halmazcsaládban. Ekkor tetszőleges $B \in \mathcal{F}$ esetén $|A \cap B| \geq |B \setminus A|$, különben az A, B halmazokhoz tartozó C halmaz mérete nagyobb lenne $|A|$-nál. Feltehető, hogy A nem egyezik meg az n elemű X alaphalmazzal, különben kész vagyunk. Tekintsük a következő $\mathcal{F}'$ családot az $X \setminus A$ halmazon:

$$\mathcal{F}' = \{B \setminus A \mid B \in \mathcal{F}\}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez is igazán rendes halmazcsalád, így az indukció szerint van olyan $B' \in \mathcal{F}'$ eleme, melyre $|B'| \geq (n-|A|)/2$. Ekkor létezik egy $B \in \mathcal{F}$, melyre $B' = B \setminus A$. Ekkor $|A \cap B| \geq |B \setminus A|$ miatt $|B| \geq 2|B'| \geq n-|A|$. Mivel $|A| \geq |B|$, ezért $|A| \geq n-|A|$ vagyis $|A| \geq n/2$.

Mivel $f(n) \geq n/2$, ezért azonnal kapjuk, hogy $f(2^k-1) \geq 2^{k-1}$ vagyis csak egy konstrukciót kell mutatnunk, ahol ez eléretik. Legyen az alaphalmaz $X = \mathbb{F}_2^k \setminus \{\underline{0}\}$. A halmazcsalád elemei pedig legyenek a következő halmazok: $H_a = \{x \in \mathbb{F}_2^k \mid (a,x) = 1\}$, ahol $a \in X$ és az (a,x) skalárszorzat $\mathbb{F}_2$-ben van kiszámolva; ezek a halmazok éppen az 1-kodimenziós alterek komplementerei. Ekkor minden $a \in X$ esetén $|H_a| = 2^{k-1}$. Továbbá $a \neq b$ esetén $H_a \cup H_b = H_a \cup H_{a+b} = H_b \cup H_{a+b}$, hiszen $(a+b,x) = (a,x)+(b,x)$ miatt a három halmaznak ugyanaz a komplementere. Végül a halmazcsalád elemeinek uniója a teljes X alaphalmaz, hiszen egyedül a nullvektor merőleges minden nemnulla vektorra.

3. feladat. Egy $n\times n$-es mátrixot *jólfésültnek* hívunk, ha minden eleme 0 vagy 1, és nem tartalmazza az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot részmátrixként. Lássuk be, hogy van olyan $c > 0$ konstans, amelyre teljesül, hogy bármely $n\times n$-es jólfésült mátrixnak van olyan, legalább $cn\times cn$-es részmátrixa, melynek minden eleme egyforma. (Egy jólfésült mátrix tartalmazhatja a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixot részmátrixként.)

(Pach János, Korándi Dániel és Tomon István)

Megoldás (Pálvölgyi Dömötör). A bizonyítás során megmutatjuk, hogy ha egy jólfésült mátrix nem tartalmazna $cn \times cn$-es, egyforma elemekből álló részmátrixot, akkor a középső néhány oszlop és sor mindegyikében vagy nagyon sok 0-s vagy nagyon sok 1-es van. Viszont sok sorban és oszlopban ugyanaz kell, hogy a domináns elem legyen, ebből pedig kihozzuk, hogy mégis csak lesz nagy részmátrix egyenlő elemekkel. $c = 1/20$-ra látjuk be a feladatot.

Ha $n < 20$, akkor egy 1×1-es részmátrix megteszi, ha pedig $n \geq 20$, akkor vehetünk olyan bal oldali, középső és jobb oldali oszlopokat (B, K, J), hogy a középsők az összes legalább felét, a bal és jobb oldaliak pedig az oszlopok legalább 1/5–1/5-ét kitegyék.

Tegyük fel, hogy a középső (K-ban lévő) oszlopok közül van olyan, aminek a (felülről) első néhány eleme között legalább $n/20$ db 0-s van, a későbbi (maradék alsó) elemei között meg legalább $n/20$ db 1-es van. Vegyünk egy ilyen oszlopot, és jelöljük ezen elemeinek megfelelő sorokat A_0-val és A_1-el.

Ekkor ha az $A_0 \times B$ részmátrix valamely oszlopában szerepel 1-es, akkor az $A_1 \times B$ részmátrix ugyanezen oszlopában csupa 1-es van. Emiatt vagy $A_0 \times B$-ben van $n/20 \times n/10$ méretű csupa 0 részmátrix, vagy $A_1 \times B$-ben van $n/20 \times n/10$ méretű csupa 1 részmátrix.

Ha a K-beli oszlopvektorok között olyan van, aminek az első néhány eleme között legalább $n/20$ db 1-es van, a maradék elemei között meg legalább $n/20$ db 0-s van, akkor ugyanígy készen vagyunk ha a J-beli oszlopokat vizsgáljuk.

Ha a K-beli oszlopvektorok között olyan van, amiben legalább $n/10$ db 0-s és $n/10$ db 1-es is van, akkor arra szükségszerűen teljesül a fenti két lehetőség valamelyike. Tehát a továbbiakban tegyük fel, hogy az összes K-beli oszlopvektorban az elemek legalább 9/10-e ugyanaz. Analóg módon a sorokat is szétosztjuk három részre, fenti, középső és lenti részekre (F, K', L), és ugyanígy gondolkodva feltehetjük, hogy K'-ben minden sor elemeinek legalább 9/10-e egyforma. Újra az oszlopokat vizsgálva, az általánosság megszorítása nélkül választhatunk legalább $n/4$, de legfeljebb $n/3$ K-beli oszlopot, amiben az elemek 9/10-e 1-es, jelöljük ezen oszlopokat E-vel. A $K' \times E$ részmátrixban legfeljebb $n^2/30$ db 0-s van, használva, hogy E az oszlopok legfeljebb 1/3-át teszi ki.

Mivel minden K'-beli sor domináns elemeinek legalább $9/10 - 3/4 = 3/20$ része ideesik, legfeljebb $(n^2/30)/(3n/20) = 2n/9$ darab sorvektorban lehet 0-s a domináns elem, azaz legalább $n/2 - 2n/9 = 5n/18$-ban az 1-es lesz az.

Ha minden 1 domináns oszlop- és sorvektor metszeténél 1-es van, akkor találtunk egy homogén részmátrixot. Különben lesz kettő, amiknek a metszete 0. De ekkor a sorvektorban a korábbi 1-esek oszlopai, és az oszlopvektorban a későbbi 1-esek sorai által meghatározott részmátrix csak 1-eseket tartalmazhat.

Megjegyzés. Ha adott a síkon n pont és n egyenes, amiket sorbarakunk x-koordinátájuk, illetve meredekségük szerint, és készítünk belőlük egy mátrixot, amibe aszerint írunk 0-t illetve 1-et, hogy az adott pont az egyenes fölött van-e, akkor $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$-mentes mátrixot kapunk. Tehát a feladatból következik, hogy lesz cn pont és cn egyenes, hogy vagy az összes pont az összes egyenes fölött lesz, vagy mind alatta.

4. feladat. Legyen P egy véges ponthalmaz a síkon, melyre teljesül, hogy bármely két pontjának távolsága egész szám. Lássuk be, hogy P pontjai színezhetőek három színnel úgy, hogy bármely két azonos színű pont távolsága páros legyen.

(Damásdi Gábor)

1. megoldás (Kun Gábor). A P halmaz pontjait komplex számokkal azonosítjuk. Feltehető, hogy $0 \in P$ és $n \in P$ is teljesül egy n páratlan egész számra. Legyen $a + ib \in P$ tetszőleges. Ekkor $(a^2 + b^2) + n^2 - ((a-n)^2 + b^2) = 2an$ páratlan. Ezért minden $x + iy \in nP$ elemre teljesül, hogy $2x$ egész szám. A továbbiakban az nP halmazt vizsgáljuk és jelöljük P-vel az egyszerűség kedvéért, hiszen ennek minden jó színezése az eredeti halmaznak is egy jó színezését adja.

$2x$ egész szám minden $x+iy \in P$-re, ezért $(2y)^2$ is egész kell, hogy legyen. Azaz alkalmas m egész számra és d négyzetmentes, pozitív egész számra $y = \frac{m}{2}\sqrt{d}$ teljesül. Belátjuk, hogy d ugyanaz kell, hogy legyen minden $x + iy \in P$-re, amikre $y \neq 0$:

Legyen $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2 \in P, y_1 = \frac{m_1}{2}\sqrt{d_1} \neq 0, y_2 = \frac{m_2}{2}\sqrt{d_2} \neq 0$. Ekkor $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + m_1^2 d_1/4 + m_2^2 d_2/4 - m_1 m_2 \sqrt{d_1 d_2}/2$. Ez a kifejezés négyzetszám kell, hogy legyen. Az összeg első három tagja racionális. Ezért a negyedik, utolsó tagnak is racionálisnak kell lennie, ami csak úgy teljesülhet, ha $d_1 = d_2$. Azaz létezik olyan d négyzetmentes, pozitív egész szám, hogy $P \subseteq \Lambda = \{a/2 + i\sqrt{d}b/2 : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Először Λ vagy egy P-t tartalmazó részrácsa pontjait fogjuk majd színezni kettő vagy négy színnel úgy, hogy az azonos színű pontok távolsága soha ne legyen páratlan egész szám.

Ha d páros akkor $d \equiv 2(4)$, ezért $|a/2 + i\sqrt{d}b/2|^2 = a^2/4 + db^2/4$ csak úgy lehet egész szám, ha a és b is páros, ezért $P \subseteq 2\Lambda$. Továbbá, ha $a^2/4 + db^2/4$ páratlan akkor $a \equiv 2(4)$. Így 2Λ pontjai már két színnel is színezhetőek $a/2$ paritásának megfelelően.

Ha d páratlan és $d \equiv 1(4)$ akkor $a^2/4 + db^2/4$ csak úgy lehet egész szám, ha a és b is páros, ezért $P \subseteq 2\Lambda$. És akkor lesz páratlan, ha $\frac{a+b}{2}$ páratlan. Ezért 2Λ pontjai ismét két színnel színezhetőek, ezúttal $\frac{a+b}{2}$ paritása szerint.

Ha $d \equiv -1(4)$ akkor $a^2/4 + db^2/4$ pontosan akkor egész szám, ha $a + b$ páros. Két alesetet különböztetünk meg:

Ha $d \equiv -1(8)$ és $a^2/4 + db^2/4$ páratlan akkor a és b is páros, és a kettő közül pontosan egy osztható néggyel. Ez esetben is $P \subseteq 2\Lambda$, és 2Λ pontjai két színnel színezhetőek $\frac{a+b}{2}$ paritása szerint.

Ha $d \equiv 3(8)$ akkor $a^2/4 + db^2/4$ pontosan akkor páratlan, ha a és b is páratlan vagy, ha mindkettő páros és pontosan az egyik osztható néggyel. Ez alapján Λ-nak azon $a + ib$ alakú elemeit, melyekre $(a + b)$ páros, négy színnel színezhetjük - a paritása és $\frac{a+b}{2}$ paritása szerint. Az azonos színű pontok távolsága nem lehet páratlan szám. Vegyük észre, hogy a különböző színű pontok távolságának négyzete viszont mindig páratlan. Meg kell még mutatnunk, hogy P nem tartalmazhat mind a négy színosztályból pontot, így P három színnel színezhető. Elég belátnunk, hogy nincs négy pont a síkon, melyek közül bármely kettő távolsága páratlan:

Indirektül bizonyítunk. A tetraéder térfogatát az élhosszakkal kifejező Cayley-Menger determináns ebben az elfajuló esetben, amikor a tetraéder pontjai egy síkba esnek, nulla. Jelölje a pontok közti távolságot $d_{i,j}$, ahol $1 \leq i, j \leq 4, i \neq j$. Számoljuk ki a determinánst modulo 8.

$$0 \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{1,2}^2 & d_{1,3}^2 & d_{1,4}^2 \\ 1 & d_{2,1}^2 & 0 & d_{2,3}^2 & d_{2,4}^2 \\ 1 & d_{3,1}^2 & d_{3,2}^2 & 0 & d_{3,4}^2 \\ 1 & d_{4,1}^2 & d_{4,2}^2 & d_{4,3}^2 & 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \equiv 4$$

A második egyenlőségnél felhasználtuk, hogy a távolságok páratlanok, a harmadik egyenlőségnél pedig az első oszlopot kivontuk a többiből. Ellentmondásra jutottunk, tehát nem létezik négy olyan pont a síkon, hogy bármely kettő távolsága páratlan. Ezzel a feladat bizonyítását befejeztük.

2. megoldás (Harangi Viktor). Tekintsük azt a G gráfot, amelynek csúcsai P pontjai, és két csúcs akkor van összekötve éllel, ha a megfelelő távolság páratlan. Azt kell belátnunk, hogy G csúcsai jól-színezhetők 3 színnel. Ez a következő állításból könnyen következik majd.

Lemma. G nem tartalmazhatja a következő gráfokat feszített részgráfként:

- K_4: teljes gráf 4 csúcson;
- P_3: 3 hosszú út (azaz 4 csúcs és 3 él);
- H: az a négy csúcsú gráf, amit egy három ágú csillagból kapunk egy további él hozzávételével.

Először tegyük fel, hogy adott egy G gráf, mely nem tartalmazza a fenti feszített részgráfokat. Megmutatjak, hogy 3-színezhető. Feltehetjük, hogy G összefüggő, hiszen elég komponensenként megadni a színezést. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: G nem tartalmaz K_3-at. Azt állítjuk, hogy ekkor semmilyen páratlan kört nem tartalmaz, azaz páros gráf, azaz két színnel is jól-színezhető. Indirekten vegyünk egy minimális hosszú páratlan kört. Vegyük észre, hogy nem lehet egyetlen „átló” sem behúzva a körben, mert akkor találnánk rövidebb páratlan kört is. Tehát ez a kör egy feszített részgráfja G-nek, ráadásul legalább öt hosszú, mert G nem tartalmaz K_3-at a feltevésünk szerint. Ekkor viszont találunk feszített P_3-at is a gráfban, ami ellentmondás.

2. eset: G tartalmaz K_3-at. Legyen $v_1v_2v_3$ egy három hosszú kör. Mivel nincs feszített K_4 és H a gráfban, ezért minden további u csúcsra igaz, hogy v_1, v_2, v_3 közül vagy eggyel se, vagy pontosan kettővel van összekötve. Ez alapján négy osztályba sorolhatjuk a többi csúcsot: $U_\emptyset$, $U_{1,2}$, $U_{1,3}$, $U_{2,3}$. Az $U_{i,j}$ osztályban lévő csúcsok össze vannak kötve v_i-vel és v_j-vel is, így az osztályon belül már nem mehet él, különben találnánk K_4-et. Egy $U_\emptyset$ osztályban lévő pont v_1, v_2, v_3 csúcsok semelyikével nincs összekötve. Ekkor viszont $U_{i,j}$ osztálybeli szomszédja sem lehet, különben könnyen találnánk feszített P_3-at. Azonban feltevésünk szerint G összefüggő, így $U_\emptyset$ valójában nem tartalmazhat csúcsot. Ekkor viszont készen vagyunk, hiszen a $\{v_1\} \cup U_{2,3}$; $\{v_2\} \cup U_{1,3}$; $\{v_3\} \cup U_{1,2}$ három független halmazra bontja G csúcsait.

Be kell még bizonyítanunk a Lemma állítását. Ez azonnal következik abból, hogy tetszőleges négy pontot választva P-ből a távolságnégyzetekből álló Cayley–Menger determináns 0 (lásd előző megoldás). Ha modulo 8 nézzük a determinánst, akkor látjuk, hogy nem lehet K_4 a gráfban:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv 4 \pmod 8.$$

Ha pedig modulo 4, akkor kizárhatjuk a feszített P_3 illetve a feszített H előfordulását:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv 2 \pmod 4 \text{ illetve } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv 2 \pmod 4.$$

5. feladat. Tetszőleges n természetes számra legyen

$$f(n) = \sum_{p|n} p^{k_p},$$

ahol p végigfut n prímosztóin, és k_p az az egész szám, amelyre

$$p^{k_p} \leq n < p^{k_p+1}.$$

Mekkora

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)\log\log n}{n\log n}?$$

(Ruzsa Imre)

Megoldás (Ruzsa Imre). A válasz 1. Mivel $f(n) \leq n\omega(n)$, a felső becslés nyilvánvaló. Készítünk olyan n számot, amelyre közel éles. Evégett válasszunk egy $c > 1$ számot (kb. a cél $1/c$ -szerese lesz $f(n)$), majd k és x számokat (ezek összefüggése majd kiderül).

Tekintsük a (p^j, cp^j) intervallumokat, ahol p az első k prímszám valamelyike és j-t pedig az $x \leq p^j < px$ feltétel definiálja. Ezen intervallumok logaritmusának a hossza $\log c$, és mind részei az $[x, cp_k x]$ intervallumnak, amely logaritmusának hossza $\log(cp_k)$, ahol p_k a k-ik prím. Így van olyan szám, amely közülük legalábbis

$$r = \left\lceil \frac{k\log c}{\log(cp_k)} \right\rceil$$

darabban benne van. Legyen m ilyen szám, és legyenek $q_1, \dots, q_r$ az intervallumokat meghatározó prímek (ha $> r$ van, csak r-et tartunk meg). Legyen n olyan szám, hogy

$$q_1 \dots q_r | n, \ m \leq n \leq m + q_1 \dots q_r.$$

Ekkor

$$f(n) \geq \frac{rm}{c} \geq \frac{r(n - q_1 \dots q_r)}{c} > \frac{r(n - p_k^r)}{c}.$$

Az x-et úgy érdemes választani, hogy p_k^r-nél némileg nagyobb legyen, mondjuk $x = kp_k^r$. Ekkor

$$\frac{f(n)}{n} > \frac{r}{c}\left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Megbecsüljük a szereplő számokat:

$$\log n \sim \log x = \log k + r \log p_k \sim r \log k \sim k \log c,$$

$$k \sim \frac{\log n}{\log c}, \; r \sim \frac{\log n}{\log k} \sim \frac{\log n}{\log\log n},$$

$$f(n) \sim \frac{n \log n}{c \log\log n}.$$

6. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha a egész szám, és d pozitív osztója az $a^4 + a^3 + 2a^2 - 4a + 3$ számnak, akkor d negyedik hatvány modulo 13.

(Kós Géza)

Megoldás (Seress Dániel megoldása alapján). Mivel d pozitív, előáll prímszámok szorzataként; ezért az állítást elég a d (pozitív) prímosztóira igazolni. Legyen $d = p$ prím.

Legyen ε primitív 13-adik egységgyök $\mathbb{F}_p$ fölött. (A $p = 13$ esetben $x^{13} - 1 = (x-1)^{13}$ miatt az 1 az egyetlen 13-adik egységgyök; ha viszont $p \neq 13$, akkor a $x^{13} - 1$ polinomnak nincsenek többszörös gyökei, így 13 különböző 13-adik egységgyök létezik.)

A kalapból nyuszi: legyen

$$A = \varepsilon + \varepsilon^3 + \varepsilon^9, \quad B = \varepsilon^2 + \varepsilon^6 + \varepsilon^5, \quad C = \varepsilon^4 + \varepsilon^{12} + \varepsilon^{10} \quad \text{és} \quad D = \varepsilon^8 + \varepsilon^{11} + \varepsilon^7$$

($\mathbb{Q}(\varepsilon)$-ban az $\varepsilon \mapsto \varepsilon^2$ automorfizmus hatása $A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto A$ lenne), és vegyük észre, hogy

$$X^4 + X^3 + 2X^2 - 4X + 3 = (X - A)(X - B)(X - C)(X - D).$$

Feltehető, hogy $A = a \in \mathbb{F}_p$. Ekkor minden nemnegatív egész k-ra — a kis Fermat-tételt k-szor alkalmazva —

$$A = A^{p^k} = \varepsilon^{p^k} + \varepsilon^{3p^k} + \varepsilon^{9p^k}.$$

Ha p nem negyedik hatvány modulo 13, akkor $k = 1$ vagy $k = 2$ választással $A = C$ adódik.

Ekkor az ε, ε^3 és ε^9 elemek a következő, $\mathbb{F}_p$ fölötti polinom gyökei:

$$(X - \varepsilon)(X - \varepsilon^3)(X - \varepsilon^9) = X^3 - AX^2 + CX - 1, \tag{$*$}$$

amely $C = A$ miatt szorzattá bomlik: $(X-1)(X^2+X+1-AX)$. Így az ε, ε^3 és ε^9 elemek valamelyike 1, ahonnan $p = 13$, ami negyedik hatvány modulo 13, ellentmondás.

1. megjegyzés. Más módon, indirekt feltevés nélkül is belátható, hogy ha $A \in \mathbb{F}_p$, akkor $C \in \mathbb{F}_p$. Ha $p \neq 3$, akkor ez a $3C = 3 - 2A - A^3$ azonosságból következik, ha pedig $p = 3$, akkor az

$$\begin{aligned}(X - A)(X - B)(X - C)(X - D) &= X^4 + X^3 + 2X^2 - 4X + 3 = \\ &= X^4 + X^3 - X^2 - X = X(X-1)(X+1)^2\end{aligned}$$

azonosságból. Sőt, $B = A^2 - 2C$ és $D = C^2 - 2A$ is $\mathbb{F}_p$-beli.

A megoldás egy másik lehetséges befejezése a következő. Az ε, ε^3 és ε^9 elemek ciklikusan egymás köbei, így ha valamelyikük $\mathbb{F}_p$-beli, akkor a másik kettő is. Ellenkező esetben ($*$) irreducibilis $\mathbb{F}_p$ fölött, és a gyökök $\mathbb{F}_{p^3}$-ben vannak. Mindegyik esetben igaz, hogy $\varepsilon \in \mathbb{F}_{p^3}$, így ε rendje osztja az $\mathbb{F}_{p^3}$ test multiplikatív csoportjának rendjét: $13 \big| p^3 - 1$, más szóval $p^3 \equiv 1 \pmod{13}$, avagy p negyedik hatvány modulo 13.

2. megjegyzés. A $p \equiv 0, 1, 3, 9 \pmod{13}$ esetek mind lehetségesek. Például a $(p = 13, a = 3)$, $(p = 521 = 13 \cdot 20 + 1, a = 7)$, $(p = 3, a = 0)$, $(p = 113 = 13 \cdot 8 + 9, a = 4)$ párok mind teljesítik a feltételt.

Ezeket a példákat egy közös esetbe is belesűríthetjük: például $a = 250$ esetén $a^4+a^3+2a^2-4a+3 = 3921999003 = 3^2 \cdot 13 \cdot 79 \cdot 211 \cdot 2011$; itt $13 \equiv 0 \pmod{13}$, $79 \equiv 1 \pmod{13}$, $211 \equiv 3 \pmod{13}$ és $2011 \equiv 9 \pmod{13}$.

Kicsit általánosabban, minden olyan p prímhez, amelyre $p \equiv 0, 1, 3, 9 \pmod{13}$, létezik olyan a, amire $p \big| a^4 + a^3 + 2a^2 - 4a + 3$. Ha $p \neq 13$, tehát $13 \big| p^3 - 1$, akkor a $\mathbb{F}_{p^3}{}^*$ ciklikus csoport rendje osztható 13-mal, ezért a 13-adik egységgyökök $\mathbb{F}_{p^3}$-beliek, az A, B, C, D elemek pedig $\mathbb{F}_p$-beliek.

7. feladat. Határozzuk meg azokat az $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ függvényeket, amelyek teljesítik az

$$f(f(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), f(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, f(a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn})) \\ = f(f(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}), f(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}), \ldots, f(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}))$$

egyenlőséget az $a_{ij} \in \{0, 1\}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ elemek tetszőleges választása mellett.

(Pálfy Péter Pál)

Megoldás (Kun Gábor). Nevezzük az f függvény i-edik koordinátáját semlegesnek, ha tetszőleges $x_1, \ldots, x_n$ elemekre $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \ldots x_n)$, lineárisnak, ha tetszőleges $x_1, \ldots, x_n$ elemekre $f(x_1, \ldots, x_n) \neq f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \ldots x_n)$, és (a, b)-döntőnek, ahol $a, b \in \{0, 1\}$, ha $f(x_1, \ldots, x_n) = b$ amennyiben $x_i = a$.

Lemma. f minden koordinátája vagy semleges, vagy lineáris, vagy alkalmas (a, b) pár(ok)ra (a, b)-döntő.

Bizonyítás. Indirektül bizonyítunk: Tegyük fel, hogy az első koordináta egyik feltételt sem teljesíti. Mivel nem semleges és nem lineáris, vannak olyan elemek, $x_2, \ldots, x_n$ és $y_2, \ldots, y_n$, hogy $f(0, x_2, \ldots, x_n) \neq f(1, x_2, \ldots, x_n)$, viszont $f(0, y_2, \ldots, y_n) = f(1, y_2, \ldots, y_n)$. Mivel x_1 nem döntő koordináta, ezért minden $2 \leq k \leq n$-re vannak olyan $a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}$ elemek, hogy $f(y_i, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}) = x_i$. Legyen $a_{i,1} = y_i$ és $a_{1,i} = x_i$ minden $2 \leq i \leq n$ esetén. Nézzük meg az egyenlőség mindkét oldalát, mint egy változós függvényt $a_{1,1}$-ben, hogy hogyan függ $a_{1,1}$-től! A jobb oldal nem függ tőle, hiszen $f(0, a_{2,1}, \ldots, a_{n,1}) = f(0, y_2, \ldots, y_n) = f(1, y_2, \ldots, y_n) = f(1, a_{2,1}, \ldots, a_{n,1})$. A bal oldal viszont $f(f(a_{1,1}, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$, ami $a_{1,1}$ választásától függően mindkét értéket felveheti. Az egyenlőség nem teljesül $a_{1,1}$ egyik választására, ami bizonyítja a lemmát.

Milyen tulajdonságú koordinátái lehetnek egyszerre f-nek a felsoroltakból?

Világos, hogy f-nek nem lehet egyszerre egy lineáris és egy másik, (a, b)-döntő koordinátája semmilyen (a, b) párra.

Tegyük fel, hogy ha van (a, b)-döntő koordinátája és $a \neq b$. Megmutatjuk, hogy a többi változó semleges, azaz f konstans vagy egy változós (affin) lineáris függvény. Az egyszerűség kedvéért legyen ez az első koordináta, továbbá legyen $a = 0, b = 1$. Ha $f(1, \ldots, 1) = 0$ akkor legyen $a_{1,i} = 1$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Ezek miatt az egyenlet bal oldala mindenképpen 1. A függvény többi változója semleges, különben a többi $a_{i,j}$ választható úgy, hogy a jobb oldal viszont 0 legyen. Ha pedig $f(1, \ldots, 1) = 1$ akkor legyen ismét $a_{1,i} = 0$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Ezek miatt az egyenlet bal oldala mindenképpen 1. A függvény többi változója az első kivételével pedig semleges, különben a többi $a_{i,j}$ választható úgy, hogy a jobb oldal viszont 0 legyen.

Az is egyértelmű, hogy f-nek nem lehet egyszerre $(0, 0)$-döntő és $(1, 1)$-döntő koordinátája. Így minden alkalmas f koordinátái - a semlegesek kivételével - vagy mind lineárisak, vagy mind $(0, 0)$-döntők, vagy mind $(1, 1)$-döntők. Most már karakterizálhatjuk az egyenletet teljesítő függvényeket.

Ha minden koordinátája semleges akkor f konstans.

Ha minden koordinátája lineáris vagy semleges akkor alkalmas $H \subseteq \{1, \ldots, n\}$ halmazra vagy $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \in H} x_i$, vagy $f(x_1, \ldots, x_n) = 1 + \sum_{i \in H} x_i$, ahol modulo 2 adunk össze.

Ha minden koordináta semleges vagy $(0,0)$-döntő akkor alkalmas $H \subseteq \{1,\ldots,n\}$-re $f(x_1,\ldots,x_n) = \bigwedge_{i\in H} x_i$.

Ha pedig minden koordináta semleges vagy $(1,1)$-döntő akkor alkalmas $H \subseteq \{1,\ldots,n\}$-re $f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{i\in H} x_i$.

Ezek valóban teljesítik a feladat egyenlőségét, más függvényre pedig nem teljesül.

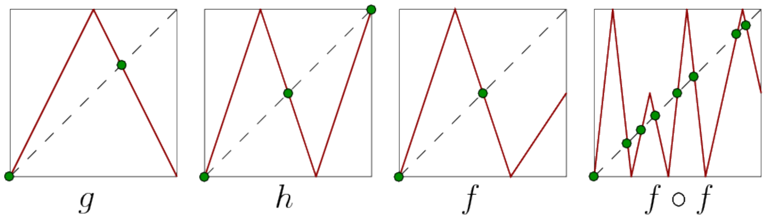
8. feladat. Létezik-e olyan szakaszonként lineáris, folytonos, szürjektív $f : [0,1] \to [0,1]$ leképezés, amelyre $f(0) = f(1) = 0$, és minden pozitív egész n-re

$$2,0001^{(n-10)} < P_n(f) < 2,9999^{(n+10)}$$

teljesül, ahol $P_n(f)$ az olyan x pontok száma, amelyekre $\underbrace{f(\ldots f}_{n}(x)\ldots) = x$?

(Buczolich Zoltán)

1. megoldás (Kós Géza). Először az $f(1) = 0$ feltételt elfelejtve egy megoldás: Az ábrán a g függvény nem jó, mert g^n-nek 2^n, vagyis túl kevés fixpontja van. A h függvény meg azért nem jó, mert h^n-nek 3^n, vagyis túl sok fixpontja van.



Próbáljunk ki valamit a kettő között, mondjuk az f-et:

$$f(0) = 0, \quad f(\tfrac{1}{3}) = 1, \quad f(\tfrac{2}{3}) = 0, \quad f(\tfrac{1}{2}) = f(1) = \tfrac{1}{2}.$$

Az $f \circ f$ függvény 8 lineáris szakaszból áll, ebből 5 "hosszú": a szakasz mentén a függvény mindent felvesz 0-tól 1-ig.

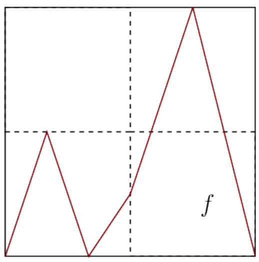
Indukcióval, az f^{2n} legfeljebb 8^n lineáris szakaszból áll, ezekből legalább 5^n hosszú. Minden lineáris szakaszon legfeljebb 1 fixpont van, mert a meredekségek csak 1-nél nagyobbak vagy (-1)-nél kisebbek lehetnek; a hosszú szakaszokon pontosan 1 fixpont van. Tehát

$$5^n \le P_{2n}(f) \le 8^n$$

Ugyanígy, az f^{2n+1} legfeljebb $3 \cdot 8^{2n}$ lineáris szakaszból áll, ebből legalább $2 \cdot 5^{2n}$ hosszú.

$$2 \cdot 5^n \le P_{2n+1}(f) \le 3 \cdot 8^n.$$

Ezek után jöjjön a konstrukció az eredeti feladatra:



$$f(0) = 0, \quad f(\tfrac{1}{6}) = \tfrac{1}{2}, \quad f(\tfrac{1}{3}) = 0, \quad f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}, \quad f(\tfrac{3}{4}) = 1, \quad f(1) = 0.$$

A bal alsó sarok a korábbi függvény, felére kicsinyítve.

A kis ($\frac{1}{2}$-nél nem nagyobb) fixpontok száma ugyanaz, mint fent. A nagy ($\frac{1}{2}$-nél nagyobb) fixpontok száma triviálisan 2^n. Tehát

$$5^n + 2^{2n} \le P_{2n}(f) \le 8^n + 2^{2n}$$

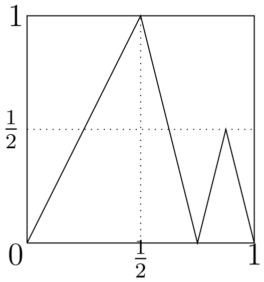
és

$$2 \cdot 5^n + 2^{2n} \le P_{2n+1}(f) \le 3 \cdot 8^n + 2^{2n}$$

amiből

$$\left(\sqrt{5}\right)^{n-1} < P_n(f) < \left(2\sqrt{2}\right)^{n+1}.$$

2. megoldás (Kiss Viktor). Legyen f a képen látható függvény, azt mutatjuk meg, hogy ez jó.



Könnyen meggondolható, hogy f^n grafikonja is néhány hosszú (azaz 0-tól 1-ig menő) illetve néhány rövid (azaz 0-tól $\frac{1}{2}$-ig menő) szakaszból áll. Sőt, $f^n(\frac{1}{2}) = 0$, ha $n > 1$, szóval ezek a szakaszok vagy a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallumban, vagy az $[\frac{1}{2}, 1]$ intervallumban vannak. Jelölje h_n^b az f^n bal oldalára, $[0, \frac{1}{2}]$-be eső hosszú szakaszok számát, r_n^b a rövidekét, h_n^j a jobb oldali hosszú szakaszok hosszát, r_n^j pedig a rövidekét. Könnyen meggondolható, hogy f^{n+1} grafikonja $[0, \frac{1}{2}]$-en azt csinálja, amit f^n $[0, 1]$-en, $[\frac{1}{2}, 1]$-en pedig egyszer bejárja f^n egészét (visszafele), kétszer pedig f^n $[0, \frac{1}{2}]$-be eső részét.

Így $h_{n+1}^b = h_n^b + h_n^j$, $r_{n+1}^b = r_n^b + r_n^j$, $h_{n+1}^j = 3 \cdot h_n^b + h_n^j$, $r_{n+1}^j = 3 \cdot r_n^b + r_n^j$. Az is világos, hogy $P_n(f) = h_n^b + h_n^j + r_n^b$, tehát csak ezeket a mennyiségeket kellene becsülni.

Most belátjuk, hogy $h_{n+2}^b = 2 \cdot h_{n+1}^b + 2 \cdot h_n^b$, valamint hasonlóan h_n^j-re.

$$h_{n+2}^b = h_{n+1}^b + h_{n+1}^j = h_{n+1}^b + 3 \cdot h_n^b + h_n^j = h_{n+1}^b + (2 \cdot h_n^b + h_{n+1}^b) = 2 \cdot h_{n+1}^b + 2 \cdot h_n^b.$$

Hasonlóan,

$$h_{n+2}^j = 3 \cdot h_{n+1}^b + h_{n+1}^j = 3 \cdot h_n^b + 3 \cdot h_n^j + h_{n+1}^j = h_{n+1}^j + 2 \cdot h_n^j + h_{n+1}^j = 2 \cdot h_{n+1}^j + 2 \cdot h_n^j.$$

Világos, hogy az analóg állítások elmondhatóak az r_n^b és r_n^j sorozatokra. A szokásos módszerekkel zárt formulát adva a sorozatokra kiszámolható, hogy f^n fixpontjainak száma $\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)^n$.

Ha nem akarjuk ezt használni, akkor észrevehetjük, hogy $2,1^n < h_{n+1}^b, h_n^j, r_{n+1}^b, r_{n+1}^j < 2.9^n$ teljesül $n = 3, 4$ esetén, és innen könnyű indukcióval belátni, használva a rekurziót, hogy minden nagyobb n-re is fog.

9. feladat. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ egészfüggvény, és tegyük fel, hogy a deriváltakból álló $f^{(n)}$ függvénysorozat pontonként konvergens. Bizonyítsuk be, hogy ekkor alkalmas C komplex számmal $f^{(n)}(z) \to Ce^z$ pontonként.

(Lempert László)

Megoldás (Kós Géza). A feltételből csak annyit használunk fel, hogy az $\left(f^{(n)}(0)\right)_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens. (Emellett a lenti bizonyításból valójában az is adódik, hogy a konvergencia lokálisan egyenletes.)

Legyen $C = \lim f^{(n)}(0)$ és $g(z) = f(z) - Ce^z$; ekkor $g^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) - C \to 0$. Legyen a $g(z)$ egészfüggvény 0 körüli hatványsora $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; a feltétel szerint $g^{(n)}(0) = n! \cdot a_n \to 0$.

Vegyünk egy tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ számot és egy tetszőleges $\varepsilon > 0$-t. Mivel $n! \cdot a_n \to 0$, van olyan n_0, hogy $n > n_0$ esetén $n! \cdot |a_n| < e^{-|z|}\varepsilon$ teljesül. Ekkor

$$\left|f^{(n)}(z) - Ce^z\right| = \left|g^{(n)}(z)\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)\cdots(k+n)a_{k+n}z^k\right| \leq$$
$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdots(k+n)\cdot\left|a_{k+n}\right|\cdot|z|^k < \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdots(k+n)\frac{e^{-|z|}\varepsilon}{(k+n)!}|z|^k =$$
$$= e^{-|z|}\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|}\cdot e^{-|z|}\varepsilon = \varepsilon.$$

Tehát minden z-hez és $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n_0, hogy minden $n \geq n_0$-ra $\left|f^{(n)}(z) - Ce^z\right| < \varepsilon$, vagyis $f^{(n)}(z) \to Ce^z$ pontonként.

10. feladat. Adott a 3-dimenziós hiperbolikus térben a P sík és négy különböző egyenes: az a_1 és a_2 egyenesek merőlegesek P-re, az r_1 és r_2 egyenesek pedig nem metszik P-t, és távolságuk P-től ugyanakkora. Jelölje $i = 1,2$ esetén S_i azt a forgásfelületet, melyet úgy kaphatunk, hogy r_i-t körbeforgatjuk a_i körül. Mutassuk meg, hogy S_1 és S_2 közös pontjai lefedhetők két síkkal.

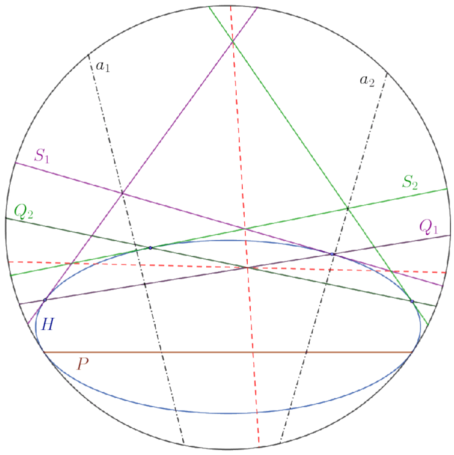
(Kós Géza)

1. megoldás (Frenkel Péter). Ha valamely i-re r_i egy a_i-re merőleges síkban van, akkor S_i is abban a síkban van, és készen vagyunk. A továbbiakban feltesszük, hogy egyik i-re sem történik ez.

A hiperbolikus tér Cayley–Klein–Beltrami-modelljében P egy $\mathbb{R}^3$-beli síknak, mindegyik a_i és r_i egy-egy $\mathbb{R}^3$-beli egyenesnek, az S_i pedig valamely másodrendű felületnek (hengernek, kúpnak vagy egyköpenyű hiperboloidnak) az egységgolyóba eső része.

I. eset: r_1 és r_2 távolsága P-től pozitív, azaz ultraparallelek P-hez.

Legyen H azon pontok mértani helye, amelyek olyan távol vannak P-től, mint r_1 és r_2 mindketteje. Ez a H egy hiperszféra, amely mindkét S_i-t egy-egy kör mentén érinti. A modellben H egy ellipszoid. Legyen Q_i annak a síknak a négyzete, amelyben S_i és H érintési pontjai vannak.



II. eset: r_1 és r_2 távolsága P-től nulla, azaz párhuzamosak P-vel.

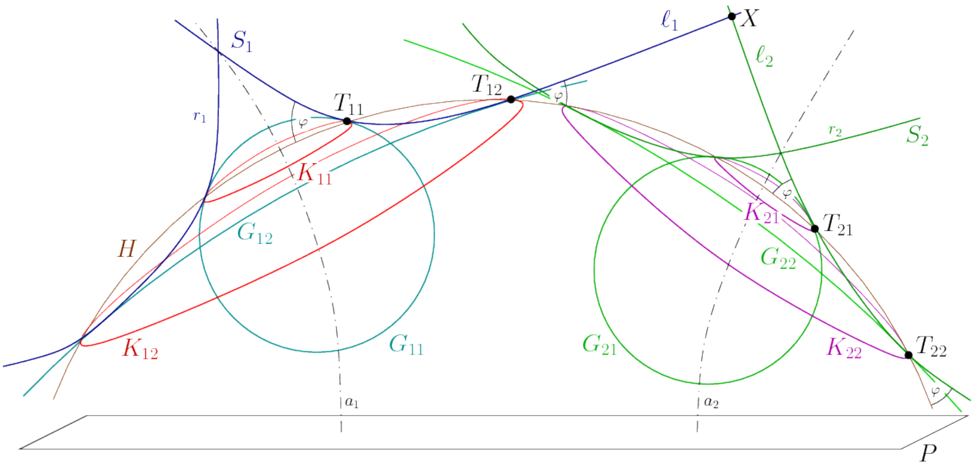
Legyen H a végtelen távoli gömb. A modellben H az egységgömb. Legyen Q_i annak a két síknak az uniója, amelyeken az S_i végtelen távoli pontjai vannak: az egyik sík P, a másik sík az r_i nem P-n lévő végtelen távoli pontjának a_i körüli elforgatottjaira illeszkedik — ha r_i párhuzamos a_i-vel is, akkor a közös végtelen távoli pontjukban vesszük H érintősíkját.

Mindkét eset: Az így definiált $Q_i \subset \mathbb{R}^3$ elfajuló másodrendű felület tagja az S_i-t H-val összekötő felületsornak. Így mindkét Q_i a H, S_1 és S_2 feszítette lineáris másodrendűfelület-sereg tagja, s emiatt a Q_1 és Q_2 által kifeszített (esetleg az egyetlen $Q_1 = Q_2$ felületből álló) felületsornak van egy Q közös tagja az S_1 és S_2 által kifeszített felületsorral. Ez a Q két (esetleg egybeeső) sík uniója, és az S_1 és S_2 összes közös pontja illeszkedik rá.

2. megoldás (Kós Géza). Feltételezzük, hogy S_1 és S_2 a P síknak ugyanazon az oldalán van (különben nem lehet közös pontjuk), és egyik sem esik bele egy síkba.

Vegyünk fel P-nek az S_i-ket tartalmazó oldalán egy H távolságfelületet, amelynek pontjai a P-től azonos távolságban vannak, és ezt a távolságot válasszuk olyan nagynak, hogy H elmesse az r_1 és r_2 egyeneseket, és velük együtt S_1-et és S_2-t is. A szimmetria miatt az r_i egyenesek ugyanakkora φ szögben, egyszer vagy kétszer döfik a H hiperszférát, ennek megfelelően mindkét S_i egy vagy két körvonalban metszi H-t; jelölje ezeket a körvonalakat K_{ij} $(i,j=1,2)$. Ha csak egy-egy körvonal van, akkor az egyszerűség kedvéért legyen $K_{i1}=K_{i2}$.

Illesszünk mindegyik K_{ij} körre egy olyan G_{ij} állandó görbületű felületet (gömböt, horoszférát vagy hiperszférát), amely a kör mentén érinti az S_i felületet.



Tekintsünk most egy tetszőleges $X\in S_1\cap S_2$ pontot. Ezen átmegy mindkét S_i-nek egy-egy ℓ_i alkotója (az r_i egyenes egy elforgatottja), amely érinti a G_{i1}, illetve a G_{i2} szférát.

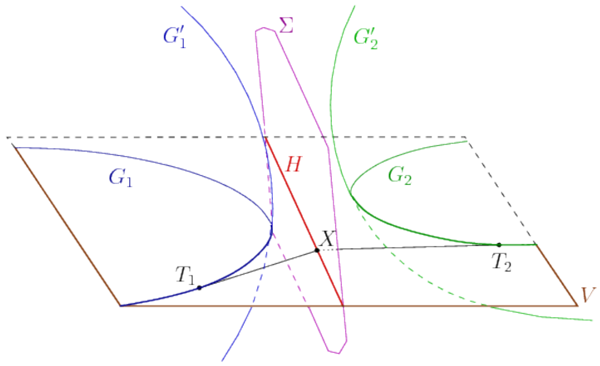
Legyen $T_{ij}=\ell_i\cap K_{ij}$ az ℓ_i alkotónak a K_{ij} körre eső pontja. Az ℓ_1 és ℓ_2 egyenesek ugyanakkora, φ szögben döfik H-t, ezért a két egyenes mentén mért XT_{11} és XT_{12} távolságok — valamilyen sorrendben — megegyeznek a XT_{11} és XT_{12} távolságokkal.

Ha $XT_{11}=XT_{21}$ (és egyúttal $XT_{12}=XT_{22}$), akkor az X pontból egyforma hosszú érintőt lehet húzni a G_{11} és G_{21} szférákhoz, ezért X illeszkedik G_{11} és G_{21} hatványsíkjára (egyben illeszkedik G_{12} és G_{22} hatványsíkjára is). Ha pedig $XT_{11}=XT_{22}$ (és egyúttal $XT_{12}=XT_{21}$), akkor az X pont illeszkedik G_{11} és G_{22} hatványsíkjára (egyben illeszkedik G_{12} és G_{21} hatványsíkjára is).

Tehát, G_{11} és G_{21} hatványsíkja, valamint G_{11} és G_{22} hatványsíkja együttesen lefedi a $S_1\cap S_2$ halmazt.

Megjegyzés. Ismert, hogy azok az X pontok, ahonnan két adott gömbhöz, horo- vagy hiperszférához egyenlő hosszúságú érintőt lehet húzni, egy síkban vannak. Legyen G_1 és G_2 a két felület és XT_1, XT_2 ezekhez húzott egyenlő érintő szakaszok.

Az objektumainkat helyezzük el a 4-dimeziós tér egy 3-dimenziós V hipersíkjában. Illesszünk a két felületre egybevágó, 4-dimenziós G_1' és G_2' hiperszférákat. Az XT_1, XT_2 szakaszok a G_1' és G_2' hiperszférákat is érintik, ezért X benne van G_1' és G_2' (3-dimenziós) Σ szimmetriahipersíkjában. A kérdéses X pontok (ha léteznek) a 2-dimenziós $V\cap\Sigma$ síkban vannak.



11. feladat. Egy m-dimenziós sima sokaságot *parallelizálhatónak* nevezünk, ha van rajta m darab sima érintő vektormező, melyek minden pontban lineárisan függetlenek. Bizonyítsuk be, hogy ha M egy zárt, irányítható, $2n$-dimenziós, 0 Euler-karakterisztikájú sima sokaság, mely immertálható egy parallelizálható $(2n+1)$-dimenziós N sima sokaságba, akkor M maga is parallelizálható.

(Szűcs András, Terpai Tamás)

Megoldás (Szűcs András, Terpai Tamás). Rögzítsünk egy $\langle , \rangle$ Riemann-metrikát N-en és válasszunk egy $v_1, \ldots, v_{2n+1} \in \Gamma(TN)$ trivializációját N érintőnyalábjának. Ez megad egy $\kappa : TN \to \mathbb{R}^{2n+1}$, $\kappa(v) = (\langle v, v_1\rangle, \ldots, \langle v, v_{2n+1}\rangle)$ fibrumonkénti lineáris izomorfizmust TN-ből a pont feletti triviális $2n+1$ rangú nyalábba. $\mathbb{R}^{2n+1}$-en válasszunk egy irányítást, ezt κ-val visszahúzva kapunk egy irányítást TN-en.

Legyen $f : M \looparrowright N$ egy immerzió, és rögzítsük M egy irányítását. Minden $p \in M$ pontban $df(T_pM)$ egy 1 kodimenziós irányított altere $T_{f(p)}N$-nek, így a két lehetséges egységnyi normálvektorból kanonikusan kiválaszthatjuk az egyiket; jelölje ezt $\widetilde{\nu}(p)$. Ezt a vektort κ-val előretolva és ($\mathbb{R}^{2n+1}$ szokásos Riemann-metrikájában) egységnyire visszanormálva kapjuk a $\nu(p) = \frac{\kappa(\widetilde{\nu}(p))}{\|\kappa(\widetilde{\nu}(p))\|} \in T_0\mathbb{R}^{2n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+1}$ vektort minden $p \in M$ esetén. A normálás miatt ν az S^{2n} egységgömbre képez, és azt állítjuk, hogy $TM \cong \nu^*TS^{2n}$. Valóban, a $T_pM \ni v \mapsto \kappa(df(v)) + \nu(p) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ leképezés egy fibrumonkénti izomorfizmus TM-ből TS^{2n}-be a $\nu : M \to S^{2n}$ leképezés felett.

Belátjuk, hogy a ν leképezés foka 0. Vegyünk ugyanis egy olyan $\uparrow \in S^{2n}$ vektort, melyre $\uparrow$ és $-\uparrow$ egyaránt reguláris értéke ν-nek (Sard tétele garantálja, hogy majdnem minden S^{2n}-beli vektor ilyen), és minden p-re vetítsük a $\uparrow$ vektort merőlegesen a $H_p = \kappa(df(T_pM))$ hipersíkra; ennek a vektornak a $\kappa \circ df_p$ leképezés inverzével vett képe legyen $w_p \in T_pM$. A w vektormező M-en izolált nullhelyekkel rendelkezik, mégpedig pontosan a $\uparrow$ és a $-\uparrow$ vektorok ν szerinti ősképei azok; most kiszámítjuk ezeknek az indexét.

Minden $p \in M$, $\nu(p) = \uparrow$ nullhely esetén azonosítsuk TM egy p körüli részének a fibrumait H_p-vel (ami a $\uparrow$-re merőleges $\mathbb{R}^{2n+1}$-beli vektorokból áll) úgy, hogy a T_qM érintőteret először a $\kappa \circ df_q$ leképezéssel azonosítjuk H_q-val, majd azt H_q-ra merőlegesen – $\nu(q)$-val párhuzamosan – vetítjük H_p-re. Ez a definíció mindaddig értelmes (és sima trivializációt ad), amíg H_q nem merőleges H_p-re, ami p kellően kicsinek választott környezetében már teljesül. Ezzel az azonosítással $\uparrow$ merőleges vetülete H_q-ra ugyanaz, mint $\uparrow$ vetülete H_p-re $\nu(q)$-val párhuzamosan, ami viszont p körül elsőrendben megegyezik $-\nu(q)$ merőleges vetületével H_p-re. Ha tehát a w vektormezőt az előbbi azonosítással T_pM-beli vektormezővé alakítjuk, akkor annak 0-beli indexe (ami w-nek a p-beli indexével egyenlő) ugyanaz, mint a vele elsőrendben megegyező $u \mapsto (\kappa \circ df_p)^{-1}(-d\nu_p(u))$, $u \in T_pM$ vektormezőé. Ez utóbbi vektormező lineáris, tehát 0-beli indexe megegyezik az őt megadó lineáris leképezés 0-beli (lokális) fokával, ami pedig a ν leképezés p-beli (lokális) fokának $(-1)^{2n} = 1$-szerese.

Ugyanezt a számolást elvégezve a $\nu^{-1}(-\uparrow)$-beli nullhelyeken, p-ben az $u \mapsto (\kappa \circ df_p)^{-1}(d\nu_p(u))$ vektormezőhöz jutunk, aminek ugyancsak megegyezik az indexe a ν leképezés p-beli (lokális) fokával. Összeadva a ν leképezés $\uparrow$ és $-\uparrow$ értékeken számolt fokszámát azt kapjuk, hogy ν fokszámának a kétszerese megegyezik a w vektormező nullhelyeinek algebrai számával, ami a Poincaré-Hopf tétel szerint $\chi(M) = 0$.

Mivel a ν leképezés foka 0, a Hopf-tétel szerint ν nullhomotóp és így az általa visszahúzott $\nu^* TS^{2n} \cong TM$ vektornyaláb triviális, azaz M parallelizálható.