A 2017. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

2017. október 20. – 2017. október 30.

1. Feladat. Fel lehet-e bontani egy négyzetet véges sok háromszögre úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös oldala? (A háromszögeknek nincs közös belső pontjuk, és uniójuk a négyzet.)

2. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy K test pontosan akkor rendezhető, ha minden $A \in M_n(K)$ szimmetrikus mátrix diagonalizálható K algebrai lezártja felett. (Azaz minden $n \in \mathbb{N}$-re és $A \in M_n(K)$ szimmetrikus mátrixra létezik olyan $S \in GL_n(\overline{K})$, amire $S^{-1}AS$ diagonális.)

3. Feladat. Egy α algebrai egészre definiáljuk α pozitív fokát: $\deg^+(\alpha)$ legyen az a minimális $k \in \mathbb{N}$, amelyre van olyan nemnegatív egészekből álló $k \times k$-as mátrix, melynek α sajátértéke. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén minden n-edfokú α algebrai egészre $\deg^+(\alpha) \leq 2n$.

4. Feladat. Legyen K egy, a racionális számtesttől és a másodfokú imaginárius számtestektől különböző algebrai számtest. Jelölje $\mathcal{L}(K)$ azon pozitív $n \geq 3$ egészek halmazát, melyekre találhatók olyan K-beli $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ egységek, hogy

$$\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = 0,$$

de $\sum\limits_{i \in I} \varepsilon_i \neq 0$ az $\{1, \dots, n\}$ bármely nemüres, valódi I részhalmaza esetén. Igazoljuk, hogy $\mathcal{L}(K)$ végtelen sok elemet tartalmaz, és legkisebb eleme K fokszáma és diszkriminánsa segítségével felülről korlátozható! Mutassuk meg továbbá, hogy végtelen sok K esetén $\mathcal{L}(K)$ végtelen sok páros és végtelen sok páratlan elemet tartalmaz!

5. Feladat. Egy legalább elsőfokú p polinomra legyen $H_p = \{z \in \mathbb{C} \mid |p(z)| = 1\}$. Igazoljuk, hogy ha $H_p = H_q$ valamely p, q polinomokra, akkor van olyan r polinom, hogy $p = r^m$ és $q = \xi \cdot r^n$ valamely m, n pozitív, egész számokkal és $|\xi| = 1$ konstanssal.

6. Feladat. Legyenek I és J intervallumok, $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növő és folytonos függvények, továbbá $\Phi, \Psi : J \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Tegyük fel, hogy $\varphi(x) + \psi(x) = x$ és $\Phi(u) + \Psi(u) = u$ teljesül minden $x \in I$, illetve $u \in J$ esetén. Legyen $f : I \to J$ folytonos megoldása a

$$f\big(\varphi(x) + \psi(y)\big) \leq \Phi(f(x)) + \Psi(f(y)) \qquad (x, y \in I)$$

függvényegyenlőtlenségnek. Mutassuk meg, hogy ekkor $\Phi \circ f \circ \varphi^{-1}$ és $\Psi \circ f \circ \psi^{-1}$ konvex függvények.

7. Feladat. Jellemezzük azokat a pozitív számokból álló növekvő (s_n) sorozatokat, amelyekhez létezik a valós számoknak olyan pozitív mértékű A részhalmaza, hogy minden $1/n$ hosszúságú I intervallum esetén $\lambda(A \cap I) < \frac{s_n}{n}$ teljesül, ahol λ a Lebesgue-mértéket jelöli.

8. Feladat. Legyen az $x \in [0,1)$ valós szám 2-es számrendszerbeli alakja: $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}}$. (Ha x diadikusan racionális, azaz $x \in \left\{\frac{k}{2^n} : k, n \in \mathbb{Z}\right\}$, akkor a véges felírást válasszuk.) Legyen az $f_n : [0,1) \to \mathbb{Z}$ függvény a következő módon megadva:

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{\sum_{i=0}^{j} x_i}.$$

Van-e olyan $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ függvény, amelyre $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$ és

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 \varphi(|f_n(x)|)dx < \infty?$$

9. Feladat. Legyen N lineáris normált tér és M az N egy sűrű lineáris altere. Igazoljuk, hogy ha $L_1, \dots, L_m$ folytonos lineáris funkcionálok N-en, akkor minden $x \in N$-re van olyan x-hez konvergáló M-beli (y_n) sorozat, amelyre $L_j(y_n) = L_j(x)$ teljesül minden $j = 1, \dots, m$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén.

10. Feladat. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású véletlen változók $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ eloszlással. Legyenek Y_1, Y_2, Y_3 és Y_4 független, azonos eloszlású véletlen változók, ahol $Y_1 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{16^k}$. Abszolút folytonos eloszlású-e az $Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3 + 8Y_4$, valamint az $Y_1 + 4Y_3$ véletlen változó?

A megoldásokat magyar nyelven, jól olvashatóan, lehetőleg gépelve, vagy tintával, és feladatonként külön papírra írva, továbbá a versenyzők nevének, évfolyamának, végzettségének, pontos lakcímének és e-mail címének feltüntetésével **2017. október 30-án 12.00 óráig** lehet benyújtani személyesen a Debreceni Egyetem Matematikai Intézetének titkárságán, vagy ugyanezen időpontig ajánlottan postára kell adni a versenybizottság címére

Dr. Páles Zsolt DE TTK Mat. Intézet, Analízis Tanszék
Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet 4002 Debrecen, Pf. 400

vagy elektronikusan, PDF formátumban az **abris.nagy@science.unideb.hu** és/vagy az **nvarga@science.unideb.hu** címre.