A 2015. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

2015. október 22. – 2015. november 2.

1. feladat. Legyen K az R^3 zárt egységgömbjének egy zárt részhalmaza úgy, hogy az egységgömb-felület húrjainak egy sűrű rendszere diszjunkt K-tól. Igazoljuk, hogy van az egységgömb-felületen egy olyan sűrű H halmaz, hogy H bármely két pontját összekötő húr diszjunkt K-tól.

2. feladat. Legyen $\{x_n\}$ a van der Korput sorozat, azaz ha a pozitív egész n bináris alakja $n = \sum_i a_i 2^i$ $(a_i \in \{0,1\})$, akkor $x_n = \sum_i a_i 2^{-i-1}$. Legyen V a síkbeli (n, x_n) pontok halmaza, ahol n pozitív egész. Legyen G az a gráf, melynek csúcshalmaza V, és amelyben két különböző csúcsot, p-t és q-t akkor és csak akkor kötjük össze éllel, ha van olyan – a koordinátatengelyekkel párhuzamos állású – R téglalap, melyre $R \cap V = \{p, q\}$. Igazoljuk, hogy G kromatikus száma véges.

3. feladat. Legyen A véges halmaz és $\to$ olyan binér reláció A-n, hogy bármely $a, b, c \in A$ esetén, ha $a \neq b$, $a \to c$ és $b \to c$, akkor $a \to b$ vagy $b \to a$. Legyen $B \subseteq A$ minimális arra a tulajdonságra nézve, hogy bármely $a \in A \setminus B$ elemhez létezik $b \in B$ úgy, hogy $a \to b$ vagy $b \to a$. Tegyük fel, hogy A-nak legfeljebb k olyan eleme van, hogy közülük semelyik kettő sincs $\to$ relációban. Bizonyítsuk be, hogy B legfeljebb k elemű.

4. feladat. Legyen $a_1, a_2, \ldots$ pozitív egész számok olyan sorozata, hogy $a_1 = 1$, és bármely p prímszámra $a_1, a_2, \ldots, a_p$ teljes maradékrendszert alkot modulo p. Bizonyítsuk be, hogy $\lim a_n/n = 1$.

5. feladat. Legyen $n \geq 1$ esetén $f(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1$. Mely n pozitív egész számokra találhatók olyan $g(x), h(x)$ valós együtthatós, n-nél alacsonyabb fokú polinomok, amelyekkel $f(x) = g(h(x))$?

6. feladat. Legyen G az Ω véges halmazon ható permutációcsoport. Legyen $S \subseteq G$ olyan, hogy $1 \in S$ és bármely $x, y \in \Omega$ elemekhez pontosan egy $\sigma \in S$ elem létezik, melyre $\sigma(x) = y$. Mutassuk meg, hogy ha az $S \setminus \{1\}$-beli elemek konjugáltak G-ben, akkor a G csoport 2-tranzitívan hat Ω-n.

7. feladat. A háromdimenziós, origó középpontú egységgömb S^2 határán egy w szélességű sávon egy w szélességű, origóra szimmetrikus gömbövet értünk. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $c > 0$ konstans, amelyre minden pozitív egész n esetén S^2 lefedhető n darab egyforma szélességű sávval úgy, hogy minden pontot legfeljebb $c \cdot \sqrt{n}$ sáv tartalmaz.

8. feladat. Igazoljuk, hogy az

$$[f(x) - f(y)] \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f\left(\sqrt{xy}\right) \right] \equiv 0, \qquad x, y \in (0, \infty),$$

függvényegyenlet minden folytonos megoldása konstans.

9. feladat. Egy $G \subseteq \mathbb{C}$ tartományon értelmezett u függvényre legyen $Z(u)$ az u zérushelyei halmazának 1 sugarú környezete. Igazoljuk, hogy minden $K \subset G$ kompakt halmazra van olyan C konstans, hogy ha u tetszőleges valós harmonikus függvény G-n, amely eltűnik a K valamelyik pontjában, akkor

$$\sup_{z \in K} |u(z)| \leq C \sup_{z \in Z(u) \cap G} |u(z)|.$$

10. feladat. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, szigorúan konvex függvény. Legyen továbbá H komplex Hilbert-tér, A és B pedig önadjungált korlátos lineáris operátorok H-n. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(A) - f(B) = f'(B)(A - B)$, akkor $A = B$.

11. feladat. Egy $[0, 1] \subseteq E \subset [0, \infty)$ véges sok zárt intervallumból álló halmazra indítsunk egy kétdimenziós Brown-mozgást valamely $x < 0$ pontból, amely akkor álljon meg, ha E egy pontjába ér. Legyen $p(x)$ annak a valószínűsége, hogy ez a megállás $[0, 1]$-en történik. Igazoljuk, hogy $p(x)$ növekszik a $[-1, 0)$ intervallumon.

A megoldásokat magyar nyelven, jól olvashatóan, feladatonként külön papírra írva, **2015. november 2. hétfőn 12:00 óráig** az SZTE TTIK Bolyai Intézet titkárságán (6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.) kell benyújtani (az átvétel időpontját igazolják), vagy ugyanezen időpontig ajánlottan postára kell adni a versenybizottság címére:

Dr. Nagy Gábor Péter
SZTE TTIK Bolyai Intézet
6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.

vagy elektronikusan, PDF formátumban kell elküldeni a `nagyg@math.u-szeged.hu` címre.

Minden lapon szerepeljen a versenyző neve, legalább az egyik lapon pedig az évfolyama, végzettsége, lakcíme és e-mail címe is.