A 2015. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny

Jelentés, feladatok, megoldások

2016. február 3.

Jelentés

A Bolyai János Matematikai Társulat 2015. október 22. és 2015. november 2. között rendezte meg a 2015. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, valamint 2015-ben egyetemet vagy főiskolát végzettek vehettek részt.

A Bolyai János Matematikai Társulat a verseny megrendezésére a következő bizottságot kérte fel: Kérchy László (elnök), Nagy Gábor Péter (titkár), B. Szendrei Mária, Czédli Gábor, Fodor Ferenc, Gehér György Pál, Hajnal Péter, Hatvani László, Kincses János, Krámli András, Krisztin Tibor, Maróti Miklós, Major Péter, Makay Géza, Molnár Lajos, Móricz Ferenc, Nagy-György Judit, Pap Gyula, Röst Gergely, Szabó László Imre, Totik Vilmos, Vas Gabriella, Vígh Viktor, Waldhauser Tamás, Zádori László.

A versenybizottság 11 feladatot tűzött ki, ezekre 18 versenyző összesen 102 megoldást nyújtott be, amik közül 86 volt lényegében hibátlan. Az alábbi összesítő táblázat jelzi az értékelhető megoldásokat.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ágoston Péter	ELTE		•	•				•				
Ágoston Tamás	ELTE	•	•	•		•	•	•	•	•		
Csizmadia Gábor	ELTE			•					•			
Damásdi Gábor	ELTE	•	•	•	•	•		•	•			
Dolecsek Máté	ELTE		•	•	•	•						
Fehér Zsombor	ELTE		•	•		•		•	•			
Frankl Nóra	ELTE	•	•	•	•	•			•			
Kaprinai Balázs	SZTE				•				•			
Kúsz Ágnes	ELTE								•			
Maga Balázs	ELTE	•		•	•	•			•			
Mészáros András	ELTE	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•
Nagy Donát	ELTE	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
Nagy János	ELTE	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
Poór Márk	ELTE	•	•	•		•	•	•	•	•		
Seress Dániel	ELTE		•		•		•					
Tardos Jakab	ELTE	•	•		•	•			•			
Williams Kada	RMG		•		•				•			
Zilahi Tamás	ELTE			•		•	•					

A versenybizottság a következő sorrendet állapította meg:

I. díjban és 80.000,-Ft pénzjutalomban részesült **Nagy János** (ELTE) az 1-10. feladatok hibátlan, valamint a 11. feladat lényegében helyes megoldásáért.

II. díjban és fejenként 40.000,-Ft pénzjutalomban részesült **Mészáros András** (ELTE) az 1-9. és a 11. feladatok helyes megoldásáért, valamint **Nagy Donát** (ELTE) az 1-9. feladatok hibátlan és a 11. feladat lényegében helyes megoldásáért.

III. díjban és fejenként 20.000,-Ft pénzjutalomban részesült **Poór Márk** (ELTE) az 1-3. és 5-9. feladatok helyes megoldásáért, valamint **Ágoston Tamás** (ELTE) az 1-3. és 5-8. feladatok hibátlan megoldásáért, továbbá a 9. feladat lényegében helyes, de több hibát tartalmazó megoldásáért.

Kiemelt dicséretben részesült **Damásdi Gábor** (ELTE) az 1-5. és 7. feladatok helyes megoldásáért, továbbá a 8. feladat lényegében helyes megoldásáért, illetve **Frankl Nóra** (ELTE) az 1-5. feladatok és a 8. feladat helyes megoldásáért

Dicséretben részesült **Fehér Zsombor** (ELTE) a 2., 3., 5., 7. és 8. feladatok helyes megoldásáért; **Maga Balázs** (ELTE) az 1., 3., 4., 5. és 8. feladatok helyes megoldásáért, illetve **Tardos Jakab** (ELTE) az 1., 2., 4., 5. és 8. feladat helyes megoldásáért.

A versenyt a Morgan Stanley Magyarország Elemző Kft. támogatta, ezért a versenybizottság köszönetét fejezi ki.

A feladatok és megoldásaik

1. feladat. (Kitűző: Totik Vilmos) *Legyen K az R^3 zárt egységgömbjének egy zárt részhalmaza úgy, hogy az egységgömb-felület húrjainak egy sűrű rendszere diszjunkt K-tól. Igazoljuk, hogy van az egységgömb-felületen egy olyan sűrű H halmaz, hogy H bármely két pontját összekötő húr diszjunkt K-tól.*

1. megoldás. Legyen S az egységgömb-felület, és legyen $I_0, I_1, \dots$ az S topológiájának egy bázisa.

A feltevésből következik, hogy ha $U, V \subset S$ nyíltak, akkor van olyan $P \in U$ pont és olyan $V_1 \subset V$ nyílt halmaz, hogy $\overline{V_1} \subset V$ és V_1 minden pontja látható P-ből abban az értelemben, hogy az őket összekötő húr diszjunkt K-tól. Ebből következik, hogy ha $V \subset S$ nyílt, akkor van olyan $Q \in V$, hogy Q-ból egy sűrű nyílt halmaz látszik. Valóban, alkalmazzuk az előzőt $U = I_0$-al és V-vel, majd $U = I_1$-gyel és V_1-el, stb. A V_j-k metszete nem üres, és ha Q a metszetben van, akkor Q-ból minden I_j valamelyik pontja látszik, tehát a Q-ból látható pontok halmaza sűrű és nyílt.

Ezek után egyesével válasszunk $Q_1, Q_2, \dots$ pontokat úgy, hogy minden N-re a $Q_1, \dots, Q_N$ pontok látszanak egymásból és egy G_N sűrű nyílt halmazból is. Ekkor az előzőt $V = G_N \cap I_N$-nel alkalmazva kapunk egy olyan $Q_{N+1} \in G_N \cap I_N$ pontot, amiből egy H_N sűrű nyílt halmaz látszik, és legyen a következő lépésben $G_{N+1} = G_N \cap H_N$.

A $H = \{Q_1, Q_2, \dots\}$ halmaz nyilván megfelel a feltételeknek.

Több versenyző megoldása alapján.

2. megoldás. Legyen S a gömbfelület. Az alábbiakban mindig S-en dolgozunk, így a „nyílt” jelző az S topológiájában értendő, és „gömb” alatt is az S egy gömbsüvegét értjük.

A feladat feltételéből következik, hogy ha U, V nyílt halmazok, akkor vannak olyan U', V' nyílt gömbök, hogy lezártjaikra $\overline{U'} \subset U$, $\overline{V'} \subset V$ igaz, és az U'-ből ill. V'-ból kiválasztott bármely pontpárra az őket összekötő húr diszjunkt K-tól. Ezt iterálva adódik, hogy ha $U_1, \ldots, U_n$ nyílt halmazok, akkor vannak olyan $U_1', \ldots, U_n'$ nyílt gömbök, hogy lezártjaikra $\overline{U_j'} \subset U_j$ igaz, és ha $j \neq k$, akkor az U_j'-ból ill. U_k'-ból kiválasztott bármely pontpárra az őket összekötő húr diszjunkt K-tól. Valóban, ha ezt már $(n-1)$ halmazra tudjuk, akkor alkalmazzuk az állítást az $U_1, \ldots, U_{n-1}$ halmazokra, így kapjuk az $U_1', \ldots, U_{n-1}'$ gömböket, de a jobb érthetőség kedvéért írjunk ezek helyett $V_1, \ldots, V_{n-1}$-et. Most alkalmazzuk a két halmaz esetét a V_1 és U_n választással, így kapjuk az V_1', $U_{n,1}'$ gömböket, Majd alkalmazzuk a két halmaz esetét a V_2 és $U_{n,1}'$ halmazokra, így kapjuk az V_2', $U_{n,2}'$ gömböket. Ezt folytatva, az utolsó lépésben a két halmaz esetét alkalmazzuk a V_{n-1} és $U_{n,n-1}'$ halmazokra, amivel kapjuk a V_n', $U_{n,n}'$ gömböket. A $V_1', V_2', \ldots V_{n-1}', U_{n,n}'$ rendszer (nevezzük ezeket $U_1', \ldots, U_n'$-nek) kielégíti a feltételeket.

Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ egy különböző pontokból álló, S-ben sűrű sorozat, és legyen B_j az a_j körüli $1/j$ sugarú gömb. n-szerinti rekurzióval konstruálunk olyan $B_{i,n}$, $1 \leq i \leq n$, gömböket, hogy $B_{i,n} \subseteq B_{i,n-1} \subseteq \cdots \subseteq B_{i,i} \subseteq B_i$, mindegyik $B_{i,k}$ lezártja is még benne van $B_{i,k-1}$-ben, és tetszőlegesen kiválasztva 1-1 pontot a $B_{i,n}$ halmazokból (azaz összesen n pontot felvéve) egy K-tól diszjunkt húrrendszert kapunk. Azt is megköveteljük, hogy $B_{i,n}$ lezártja nem tartalmazza a_{n+1}-et semelyik $1 \leq i \leq n$-re.

Ha $n = 1$, akkor legyen egyszerűen $B_{1,1} \subset B_1$ olyan gömb, amely nem tartalmazza az a_2 pontot, és amelynek még a lezártja is része B_1-nek. A rekurzióhoz tegyük most fel, hogy valamely n-re már minden $1 \leq i \leq (n-1)$ esetén ismerjük a $B_{i,n-1}$ halmazokat. Legyen B_n^* olyan gömb, hogy a lezártja része B_n-nek, és diszjunkt a $B_{i,n-1}$, $1 \leq i \leq n-1$, halmazoktól (ilyen van, hiszen a_n nincs a $B_{i,n-1}$, $1 \leq i \leq n-1$, halmazok lezártjában, és B_n középpontja a_n). Ekkor az $U_j = B_{j,n-1}$, $U_n = B_n^*$ választással alkalmazzuk a megoldás elején mondottakat, és legyen $B_{j,n} = U_j'$, $1 \leq j \leq n-1$, és $B_{n,n} = U_n'$. Tovább szűkítve a $B_{j,n}$ gömböket azt is el tudjuk érni, hogy a_{n+1} egyik lezártjának se legyen eleme.

Ezzel a $B_{i,n}$ halmazokat rekurzív módon definiáltuk, és legyen $h_i \in \cap_{n=i}^{\infty} B_{i,n}$. Ez a metszet, mint egymásba skatulyázott kompakt halmazok metszete, nem üres, így h_i létezik. Állítjuk, hogy a $H = \{h_1, h_2, \ldots\}$ halmaz sűrű, és a pontjait összekötő húrok diszjunktak K-tól. A H halmaz sűrűsége világos, hiszen minden n-re az a_n pont $1/n$-sugarú környezete (amely B_n) tartalmazza a h_n pontot. Másrészről, ha $j \neq k$ és $n > \max\{j, k\}$, akkor a $B_{j,n}$ és $B_{k,n}$ halmazok léteznek, és bármely két pontjukat összekötő húr diszjunkt K-tól, márpedig $h_j \in B_{j,n}$ és $h_k \in B_{k,n}$.

Maga Balázs megoldása.

2. feladat. (Kitűző: Tardos Gábor) *Legyen $\{x_n\}$ a van der Korput sorozat, azaz ha a pozitív egész n bináris alakja $n = \sum_i a_i 2^i$ $(a_i \in \{0, 1\})$, akkor $x_n = \sum_i a_i 2^{-i-1}$. Legyen V a síkbeli (n, x_n) pontok halmaza, ahol n pozitív egész. Legyen G az a gráf, melynek csúcshalmaza V, és amelyben két különböző csúcsot, p-t és q-t akkor és csak akkor kötjük össze éllel, ha van olyan — a koordinátatengelyekkel párhuzamos állású — R téglalap, melyre $R \cap V = \{p, q\}$. Igazoljuk, hogy G kromatikus száma véges.*

Megoldás. Néhány egyszerű megjegyzéssel kezdjük. A gráf egy (n, x_n) csúcsát azonosíthatjuk n bináris felírásában a számjegyek sorozatával, amelyet kezdő 0-kkal végtelen sorozattá egészítünk ki. Azaz gráfunk csúcsait kódoljuk azon $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ 0-1 sorozatokkal, amelyek véges sok 1-est tartalmaznak. A pozíciókat úgy képzeljük mint a helyi értékeket a bináris felírásban. Azaz a sorozat balra végtelen. Két pozíció közül az első a bal oldalibb, vagyis amelyik indexe nagyobb. Az (a_i) és (b_i) különböző sorozatoknak megfelelő pontok első koordinátájának nagyság szerinti rendezését az első eltérő bitjük dönti el (az olvasat balról jobbra történik, azaz az első eltérő bit pozíciója a legnagyobb i index, amelyre $a_i \neq b_i$). Annak a pontnak lesz nagyobb az első koordinátája, amelyik 1-est tartalmaz az első eltérés helyén. Hasonlóan egyszerű, hogy az (a_i) és (b_i) különböző sorozatoknak megfelelő pontok második koordinátájának nagyság szerinti rendezését az utolsó eltérő bitjük dönti el. Annak a pontnak lesz nagyobb a második koordinátája, amelyik 1-est tartalmaz az utolsó eltérés helyén.

Gráfunkban két csúcs ((a_i) és $(a_i{}')$) akkor és csak akkor nem összekötött, ha van olyan csúcs ((b_i)), amelyet (a_i)-val és $(a_i{}')$-vel első eltérésük szerint összevetve közéjük esik és hasonlóan közéjük esik az utolsó eltérés szerinti összevetésben. Ekkor azt mondjuk, hogy (b_i) bizonyítja (a_i) és $(a_i{}')$ nem összekötöttségét.

Vegyünk két tetszőleges csúcsát gráfunknak, illetve az őket leíró két balra végtelen sorozatot. Ennek lesz egy első és utolsó eltérése. Ez vagy egybeesik ($\alpha 0\omega$ és $\alpha 1\omega$, ahol α egy balra végtelen 0-1 sorozat, míg ω egy véges 0-1 sorozat) vagy nem esik egybe ($\alpha 0\kappa 0\omega$ és $\alpha 1\kappa' 1\omega$, illetve $\alpha 0\kappa 1\omega$ és $\alpha 1\kappa' 0\omega$, ahol κ és κ' hossza ugyanaz az ℓ természetes szám, esetleg 0).

A bizonyítás első lépéseként azonosítjuk gráfunk néhány „nem élét”:

- $\alpha 00\omega$ és $\alpha 11\omega$ nem összekötött. Valóban, $\alpha 01\omega$ bizonyítja ezt.
- $u = \alpha 0\kappa 0\omega$ és $v = \alpha 1\kappa' 1\omega$ nem összekötött, ha κ, κ' hossza ℓ és $\kappa \neq 1^\ell$. Valóban, $\alpha 01^\ell 0\omega$ bizonyítja ezt.
- $u = \alpha 0\kappa 0\omega$ és $v = \alpha 1\kappa' 1\omega$ nem összekötött, ha κ, κ' hossza ℓ és $\kappa' \neq 0^\ell$. Valóban, $\alpha 10^\ell 1\omega$ bizonyítja ezt.
- $u = \alpha 0\kappa 1\omega$ és $v = \alpha 1\kappa' 0\omega$ nem összekötött, ha κ, κ' hossza ℓ, és $\kappa, \kappa' \neq 0^\ell$. Valóban, $\alpha 10^\ell 1\omega$ bizonyítja ezt.
- $u = \alpha 0\kappa 1\omega$ és $v = \alpha 1\kappa' 0\omega$ nem összekötött, ha κ, κ' hossza ℓ, és $\kappa, \kappa' \neq 1^\ell$. Valóban, $\alpha 01^\ell 0\omega$ bizonyítja ezt.

A fenti megjegyzések után a lehetséges összekötött csúcspárok kódpárjaira a következő lehetőségek vannak:

- $\alpha 0\omega$ és $\alpha 1\omega$,
- $\alpha 01^\ell 0\omega$ és $\alpha 10^\ell 1\omega$ ($\ell > 0$),
- $\alpha 00^\ell 1\omega$ és $\alpha 11^\ell 0\omega$,
- $\alpha 01^\ell 1\omega$ és $\alpha 10^\ell 0\omega$.

Ezek valójában élei is gráfunknak, de ennek igazolására nincs szükség a bizonyítás befejezéséhez.

Vegyük észre, minden esetben a két csúcs első koordinátái közötti számszerű különbség a $\{2^n, 2^n(2^m - 3), 3 \cdot 2^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ halmazból kerül ki. Elemi számelmélet adja, hogy ez nem lehet 7-tel osztható. Tehát az (n, x_n) csúcsot $n \pmod 7$-tel színezve egy jó színezést kapunk hét színnel.

Több versenyző megoldása alapján.

3. feladat. (Kitűző: Zádori László) *Legyen A véges halmaz és $\to$ olyan binér reláció A-n, hogy bármely $a, b, c \in A$ esetén, ha $a \neq b$, $a \to c$ és $b \to c$, akkor $a \to b$ vagy $b \to a$. Legyen $B \subseteq A$ minimális arra a tulajdonságra nézve, hogy bármely $a \in A \setminus B$ elemhez létezik $b \in B$ úgy, hogy $a \to b$ vagy $b \to a$. Tegyük fel, hogy A-nak legfeljebb k olyan eleme van, hogy közülük semelyik kettő sincs $\to$ relációban. Bizonyítsuk be, hogy B legfeljebb k elemű.*

Megoldás. Bevezetjük a következő jelölést: $a \sim b$ akkor és csak akkor, ha $a \to b$ vagy $b \to a$. Legyen $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Belátjuk, hogy $m \leq k$. A B-re kirótt feltételek szerint tetszőleges $i \leq m$-re vagy létezik $b'_i \in A \setminus B$, amelyre $b_i \sim b'_i$ és $b'_i \not\sim b_j$ minden $j \neq i$-re, vagy különben $b_i \not\sim b_j$ minden $j \neq i$-re. Feltehető, hogy ha $i \leq l$, akkor b_i-hez van az előzőekben leírt b'_i, egyébként pedig nincs.

Minden $i \leq l$-re vegyünk egy a fenti feltételeket kielégítő b'_i-t. Tetszőleges $i \leq l$-re legyen b^*_i a b_i és b'_i közül az, amelyikbe megy a másikból él. (Ha $b_i \to b'_i$ és $b'_i \to b_i$ is teljesül, akkor $b^*_i = b_i$.) Világos, hogy bármely $i < j \leq l$-re $b^*_i \neq b^*_j$, hiszen $b_i, b_j \in B$, $b'_i, b'_j \in A \setminus B$, $b_i \neq b_j$ és $b'_i \neq b'_j$.

Megmutatjuk, hogy minden $i \neq j$, $i, j \leq l$ esetén $b^*_i \not\to b^*_j$. Tegyük fel, hogy $b^*_i \to b^*_j$. Legyen $\{b^\circ_j, b^*_j\} = \{b_j, b'_j\}$, ekkor persze $b^\circ_j \to b^*_j$. Hasonlóan világos, mint az előbb, hogy $b^*_i \neq b^\circ_j$. Tehát b^*_i, b^*_j és b°_j három páronként különböző eleme A-nek, melyekre a feladat első mondatában szereplő feltétel szerint $b^*_i \sim b^\circ_j$ is teljesül. Így a háromelemű $\{b^*_i, b^*_j, b^\circ_j\} \subseteq \{b_i, b'_i, b_j, b'_j\}$ halmaz bármely két eleme között van él, ami ellentmond annak, hogy $b_t \not\sim b'_s$ minden $s \neq t$-re, ha $s \leq l$.

Kaptuk tehát, hogy minden $i \neq j$, $i, j \leq l$-re $b^*_i \not\to b^*_j$. Világos, hogy az l-nél nagyobb indexű b_i-k között nem megy él. Mivel a $\{b_1, \ldots, b_l, b'_1, \ldots, b'_l\}$ és $\{b_{l+1}, \ldots, b_m\}$ halmazok diszjunktak és nincs közöttük él, ezért az m-elemű $\{b^*_1, \ldots, b^*_l, b_{l+1}, \ldots, b_m\}$ halmaz semelyik két eleme sincs $\to$ relációban, és így $m \leq k$.

Több versenyző megoldása alapján.

4. feladat. (Kitűző: Ruzsa Imre) *Legyen $a_1, a_2, \ldots$ pozitív egész számok olyan sorozata, hogy $a_1 = 1$, és bármely p prímszámra $a_1, a_2, \ldots, a_p$ teljes maradékrendszert alkot modulo p. Bizonyítsuk be, hogy $\lim a_n/n = 1$.*

Megoldás. Először belátjuk, hogy minden p prímszámra teljesül, hogy

$$\{a_1, \ldots, a_p\} = \{1, \ldots, p\}.$$

A feltétel miatt $a_i \neq a_j$ minden $i \neq j$ egész számpárra. Jelölje p_i az i-edik prímszámot.

Indirekt módon tegyük fel, hogy vannak olyan $m > 0$, $i > 0$ egészek, amelyekre $m \leq p_i < a_m$. Feltehető, hogy m a legkisebb egész, amely ezt teljesíti, valamint

$$p_{i-1} < m \leq p_i < a_m$$

valamely $i > 1$-re. Mivel minden $n \leq p_{i-1}$-re $a_n \leq p_{i-1}$, így $\{a_1, \ldots, a_{p_{i-1}}\} = \{1, \ldots, p_{i-1}\}$.

Ha $a_m \leq p_{i-1} + p_i$, akkor $p_i \in \{a_m - a_1, a_m - a_2, \ldots, a_m - a_{p_{i-1}}\} = D_m$, ami nem lehet, mivel $\{a_1, \ldots, a_{p_i}\}$ teljes maradékrendszer modulo p_i.
Tehát $a_m > p_{i-1} + p_i \geq 2p_{i-1} + 1$. Alkalmazzuk a következő tételt:

Tétel (Sylvester–Schur)**.** *Ha $n \geq k > 0$ egész számok, akkor az $n+1, \ldots, n+k$ számok valamelyikének van k-nál nagyobb prímosztója.*

Ez alapján, mivel $a_m - p_{i-1} > p_{i-1}$, létezik $j \geq i$, amelyre p_j osztja valamelyik D_m-beli számot, így $a_1, \ldots, a_{p_j}$ nem lehet teljes maradékrendszer modulo p_j, ami ellentmondás, tehát beláttuk, hogy $\{a_1, \ldots, a_p\} = \{1, \ldots, p\}$ minden p prímszámra.

Tehát azt kaptuk, hogy ha $i > 1$ és $p_{i-1} < n \leq p_i$, akkor $p_{i-1} < a_n \leq p_i$, és így

$$\frac{p_{i-1}}{p_i} < \frac{a_n}{n} < \frac{p_i}{p_{i-1}}.$$

A bizonyítás befejezéséhez elegendő belátni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1.$$

A prímszámtétel következménye a következő

Állítás. *Minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n_\varepsilon > 0$, hogy ha $n > n_\varepsilon$, akkor van prím n és $n(1+\varepsilon)$ között.*

Tehát minden $p_n > n_\varepsilon$ esetén $\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1 + \varepsilon$, amiből következik az állítás.

Több versenyző megoldása alapján.

5. feladat. (Kitűző: Pelikán József) *Legyen $n \geq 1$ esetén $f(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1$. Mely n pozitív egész számokra találhatók olyan $g(x), h(x)$ valós együtthatós, n-nél alacsonyabb fokú polinomok, amelyekkel $f(x) = g(h(x))$?*

Megoldás. Válasz: ilyen g, h polinomok semmilyen n-re sem léteznek. Tegyük fel ugyanis, hogy lenne megfelelő g, h, $\deg(g) = k$, $\deg(h) = \ell$ $(k, \ell < n)$. Legyenek g komplex gyökei $r_1, r_2, \ldots, r_k$. f gyökei a komplex $(n+1)$-edik egységgyökök, kivéve az 1-et. $f = g \circ h$ miatt ezek k darab ℓ-es csoportra oszlanak, a j-edik csoportban levő egységgyökökre h az r_j értéket veszi fel, más szóval ezek $h(x) - r_j$ gyökei. A $h(x) - r_j$ polinomok csak a konstans tagban különböznek, így $x^{\ell-1}$ együtthatója mindegyikben ugyanaz. Ez azt jelenti, hogy a j-edik csoportban levő ℓ darab egységgyök összege ugyanaz minden j-re. De mivel a szóban forgó n darab $(n+1)$-edik egységgyök összege -1, a k csoport mindegyikében az egységgyökök összege $-\frac{1}{k}$ lenne. Ez azonban lehetetlen, hiszen az egységgyökök algebrai egészek, $-\frac{1}{k}$ pedig $k > 1$ miatt nem az.

A kitűző megoldása.

6. feladat. (Kitűző: Peter Müller és Nagy Gábor Péter) *Legyen G az Ω véges halmazon ható permutációcsoport. Legyen $S \subseteq G$ olyan, hogy $1 \in S$ és bármely $x, y \in \Omega$ elemekhez pontosan egy $\sigma \in S$ elem létezik, melyre $\sigma(x) = y$. Mutassuk meg, hogy ha az $S \setminus \{1\}$-beli elemek konjugáltak G-ben, akkor a G csoport 2-tranzitívan hat Ω-n.*

Megoldás. A G csoport hat az $\Omega \times \Omega$ halmazon a $g(\alpha, \beta) = (g(\alpha), g(\beta))$ hatással, legyenek ennek pályái $R_0 = \{(\omega, \omega) \mid \omega \in \Omega\}$, $R_1, \ldots, R_r$. Belátjuk, hogy $n = |\Omega|$-ra $|R_1| = n(n-1)$ (és persze emiatt $r = 1$), ez éppen azt jelenti, hogy G kétszeresen tranzitív Ω-n.

Legyen $\alpha, \beta \in \Omega$ és $s \in S$ olyan, hogy $s(\alpha) = \beta$. Ekkor s bijekcióba állítja R_1 azon elemeit, amiknek első tagja α, R_1 azon elemeivel, amelyek első tagja β. R_1 elemeit n részhalmazba sorolhatjuk az első elemük szerint. Az előző megjegyzésünk szerint bármely két ilyen halmaz azonos elemszámú, és így n osztja R_1 elemszámát.

Legyen $s \in S$ egy rögzített elem és legyen s ciklusfelbontásában $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ egy ciklus. (Itt $2 \leq k \leq n$ a ciklus hossza, $s(a_i) = a_{i+1}$ az $i = 1, 2, \ldots, n$ egészekre az $a_{k+1} = a_1$ jelöléssel.) $S \setminus \{1\}$ elemei előállnak s-nek G-beli elemmel való konjugáltjaként; legyenek $c_1 = 1$, $c_2, \ldots, c_{n-1}$ olyan G-beli elemek, amikre $S = \{1\} \cup \{c_j s c_j^{-1} \mid 1 \leq j \leq n-1\}$. Ha $(a_1, a_2) \in R_m$ valamely $1 \leq m \leq r$-re, akkor $(a_i, a_{i+1}) \in R_m$ minden $1 \leq i \leq k$-ra, mert $s^{i-1}(a_1, a_2) = (a_i, a_{i+1})$. Mivel a c_j elemek is G-ben vannak, ezért minden $1 \leq i \leq k$-ra és $1 \leq j \leq n-1$-re $(c_j(a_i), c_j(a_{i+1})) \in R_m$. Ezek valóban $k(n-1)$ különböző elemét fogják R_m-nek adni, mivel ha $(c_j(a_i), c_j(a_{i+1})) = (c_{j'}(a_{i'}), c_{j'}(a_{i'+1}))$ lenne $(i,j) \neq (i', j')$ esetén, akkor a $c_j s c_j^{-1}$ és $c_{j'} s c_{j'}^{-1}$ S-beli permutációk értéke az $x = c_j(a_i) = c_{j'}(a_{i'})$ helyen $y = c_j(a_{i+1}) = c_{j'}(a_{i'+1})$ lenne, ami ellentmond a feladat feltételének.

Így s ciklusfelbontásának minden k hosszú C ciklusához hozzárendelhetjük $(\Omega \times \Omega) \setminus R_0$ egy $k(n-1)$ elemű H_C halmazát úgy, hogy létezzen olyan m, amelyre $H_C \subseteq R_m$. $(\Omega \times \Omega) \setminus R_0 = \bigcup_C H_C$, mert minden $\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha \neq \beta$ párra van olyan $t = c_j s c_j^{-1} \in S$, hogy $t(\alpha) = \beta$ és ekkor $(\alpha, \beta) \in H_C$ arra a C ciklusra, amiben $c_j^{-1}(\alpha)$ szerepel. Az elemszámok vizsgálatából adódik, hogy ez diszjunkt unió. Ebből viszont következik, hogy minden $1 \leq m \leq r$ esetén R_m előáll néhány H_C diszjunkt uniójaként. Speciálisan, R_1 elemszáma $n-1$ többszöröse.

Mivel n és $n-1$ relatív prímek és mindkettő osztója $|R_1|$-nek, ezért a szorzatuk is osztója $|R_1|$-nek. Következésképpen $|R_1| \geq n(n-1)$, viszont $|R_1| \leq n(n-1)$ triviális, így készen vagyunk.

Nagy Donát megoldása.

7. feladat. (Kitűző: Bezdek András, Fodor Ferenc, Vígh Viktor és Zarnócz Tamás) *A háromdimenziós, origó középpontú egységgömb S^2 határán egy w szélességű sávon egy w szélességű, origóra szimmetrikus gömbövet értünk. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $c > 0$ konstans, amelyre minden pozitív egész n esetén S^2 lefedhető n darab egyforma szélességű sávval úgy, hogy minden pontot legfeljebb $c \cdot \sqrt{n}$ sáv tartalmaz.*

1. megoldás.

Lemma. *Legyen $0 < \omega < \pi/2$, és $P_1, P_2, \ldots, P_m$ egy maximális (telített) pontrendszer S^2-n úgy, hogy bármely két pont (gömbi) távolsága legalább ω. Ekkor*

$$\frac{4}{\omega^2} \leq m \leq \frac{32}{\omega^2}. \tag{1}$$

Bizonyítás. Rajzoljunk minden P_i köré $\omega/2$ (gömbi) sugarú k_i (gömbi) kört, és ω (gömbi) sugarú K_i (gömbi) kört. A P_i-k választása miatt a k_i körök diszjunktak, a K_i körök pedig lefedik S^2-t. A k_i körök területe $t_\omega = 4\pi(1 - \cos(\omega/2))/2$, a K_i körök területe $T_\omega = 4\pi(1 - \cos\omega)/2$ (speciális gömbövek). Mivel a k_i körök diszjunktak, míg a K_i körök lefedik S^2-t, így

$$m \cdot t_\omega \leq 4\pi \leq m \cdot T_\omega,$$

ahonnan m-re rendezve

$$\frac{2}{1 - \cos\omega} \leq m \leq \frac{2}{1 - \cos\omega/2}.$$

Felhasználva, hogy $0 < x < 1$ esetén $x^2/4 < 1 - \cos x < x^2/2$, adódik a lemma állítása. □

Legyen most $n \geq 4$ adott, és legyen $\omega = 4\sqrt{2}/\sqrt{n}$. Tekintsünk egy a lemma feltételeinek eleget tevő maximális $P_1, P_2, \ldots, P_m$ pontrendszert, így $n/8 \leq m \leq n$. Most egészítsük ki a

$P_1, P_2, \dots, P_m$ pontrendszert $P_1, P_2, \dots, P_n$ pontrendszerré úgy, hogy a $P_1, P_2, \dots, P_m$ pontok mindegyikét legfeljebb még hétszer megismételjük. Ez $n/8 \le m$ miatt lehetséges. Végül tekintsük azt az n sávot, amelyek középfőkörének pólusa valamely P_i, és amelyek (gömbi) szélessége $2 \sin \omega$.

Ezek a sávok egyrészről lefedik a gömböt; ugyanis ha $X \in S^2$ nem lenne lefedve, akkor az X pólusú, $2 \sin \omega$ széles S_X sávban nem választottunk volna P_i pontot, ami ellentmond a $P_1, P_2, \dots, P_m$ pontrendszer maximalitásának.

Másrészről egy $X \in S^2$ pont pontosan annyi sávban van benne, ahány P_i $(1 \le i \le n)$ pontot tartalmaz S_X; jelölje ezt n_X, ezt szeretnénk felülről becsülni. Ehhez először becsüljük meg, hogy a $P_1, \dots, P_m$ pontok közül mennyit tartalmaz S_X; jelöljük ezt a számot m_X-szel. Vegyük észre, hogy ha $P_i \in S_X$, akkor a P_i középpontú, $\omega/2$ sugarú k_i körnek több, mint a fele is S_X-be esik. A konstrukció miatt ezek a körök diszjunktak $(1 \le i \le m)$, területük $t_\omega = 2\pi(1 - \cos(\omega/2))$.

Az eddigiek szerint, a körök diszjunktsága miatt $m_X \cdot t_\omega/2 \le 4\pi \sin \omega$, ahol a jobb oldalon S_X (gömbi) területe áll. Innen kapjuk, hogy $\omega \le \pi/2$ esetén

$$m_X \le \frac{4 \sin \omega}{1 - \cos(\omega/2)} \le \frac{4\omega}{\frac{\omega^2}{16}} = 256\sqrt{2} \cdot \sqrt{n}.$$

Világos, hogy $n_X \le 8m_X$, így a megadott konstrukció minden $n \ge 4$-re működik ($c = 2048\sqrt{2}$), amiből az állítás következik.

Több versenyző megoldása alapján.

2. megoldás. Vázolunk egy második megoldást, amely a kitűzöttnél jóval erősebb, $c \cdot \ln^3 n$ felső korlátot bizonyít. A becslések további finomításával az $\ln n$ tényező kitevője még tovább csökkenthető, ezt az érdeklődő olvasóra bízzuk.

Legyen n adott, elegendően nagy, $\alpha = \ln n/n$. Legyen $Q_1, \dots, Q_N \in S^2$ egy maximális pontrendszer úgy, hogy bármely kettő (euklideszi) távolsága legalább $\alpha/2$. Ekkor az első megoldás lemmájához hasonlóan $N \le 500/\alpha^2 = 500n^2/\ln^2 n$.

Válasszunk az S^2-ről a normalizált felszínmérték szerint egyenletesen, egymástól függetlenül $X_1, \dots, X_n$ véletlen pontokat, és tekintsük az X_i pólusú, $y = 100\alpha$ (euklideszi) félszélességű S_i sávokat $(1 \le i \le n)$. Megmutatjuk, hogy elég nagy n-re pozitív valószínűségű az az esemény, hogy ezek a sávok lefedik S^2-t és minden pont legfeljebb $\ln^3 n$-szer fedett. Ebből az állítás következik.

Ehhez először megbecsüljük, hogy mi annak a valószínűsége, hogy a választott sávok nem fedik le S^2-t. Jelölje S_i^- az X_i pólusú 99α (euklideszi) félszélességű sávot. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_i \text{ sávok nem fedik } S^2\text{-t}) &\le \mathbb{P}(\exists Q_j \text{ amit az } S_i^- \text{ sávok nem fednek le }) \\
&\le N \cdot \mathbb{P}(Q_1\text{-t nem fedik az } S_i^- \text{ sávok}) \\
&= N \cdot \mathbb{P}(Q_1 \notin S_1^-)^n \\
&= N(1 - 99\alpha)^n \\
&\le 500(1 - 99 \ln n/n)^n \cdot n^2/\ln^2 n \\
&\le n^{-97},
\end{aligned}$$

ha n elegendően nagy.

Másodszor azt becsüljük, hogy van k-szorosan fedett pont. Ehhez jelölje S_i^+ az X_i pólusú

101α (euklideszi) félszélességű sávot.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\exists P \in S^2 \text{ amit az } S_i \text{ sávok legalább } k\text{-szor fednek})\\
&\qquad\qquad \le \mathbb{P}(\exists Q_j \text{ amit az } S_i^+ \text{ sávok legalább } k\text{-szor fednek})\\
&\qquad\qquad \le N \cdot \mathbb{P}(Q_1\text{-t az } S_i^+ \text{ sávok legalább } k\text{-szor fedik})\\
&\qquad\qquad \le N \cdot \binom{n}{k} \left(\frac{101 \ln n}{n}\right)^k\\
&\qquad\qquad \le \frac{500n^2}{\ln^2 n} \cdot \frac{n^k}{k!} \left(\frac{101 \ln n}{n}\right)^k .
\end{aligned}$$

Most legyen $k = \ln^3 n$, és használjuk a $k! > (k/2)^{k/2}$ becslést.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\exists P \in S^2 \text{ amit az } S_i \text{ sávok legalább } \ln^3 n\text{-szer fednek})\\
&\qquad\qquad \le \frac{500n^2}{\ln^2 n} \cdot \frac{n^k}{k!} \left(\frac{101 \ln n}{n}\right)^k\\
&\qquad\qquad \le \frac{500n^2}{\ln^2 n} \cdot \frac{(101 \ln n)^{\ln^3 n}}{(\ln^3 n/2)^{\ln^3 n/2}}\\
&\qquad\qquad \le 500 \cdot (101\sqrt{2})^{\ln^3 n} \cdot n^2 \cdot (\ln n)^{-\ln^3 n/2}\\
&\qquad\qquad \le 500 \cdot \left(\frac{101\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\ln n}}\right)^{\ln^3 n} \cdot \frac{n^2}{\sqrt[4]{\ln n^{\ln n}}}.
\end{aligned}$$

Mivel mindkét valószínűségre adott felső becslés nyilvánvalóan 0-hoz tart, amint n tart végtelenbe, ezért elég nagy n-re pozitív valószínűséggel egyik sem következik be. Ezt akartuk igazolni.

Nagy János megoldása alapján.

8. feladat. (Kitűző: Daróczy Zoltán és Totik Vilmos) *Igazoljuk, hogy az*

$$[f(x) - f(y)] \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f\left(\sqrt{xy}\right)\right] \equiv 0, \qquad x, y \in (0, \infty), \tag{2}$$

függvényegyenlet minden folytonos megoldása konstans.

1. megoldás. Legyen $M(x,y) = \sqrt{xy}$, $N(x,y) = \frac{x+y}{2}$. Ezekre a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség miatt $M(x,y) < N(x,y)$ ha $x \neq y$.

Elegendő igazolni, hogy f konstans minden $[a,b] \subset (0,\infty)$ intervallumon. Tegyük fel, hogy nem ez a helyzet. Ekkor az f értékkészlete $[a,b]$-n egy nem elfajuló intervallum, és legyen A ennek egy olyan eleme, amely különbözik $f(a)$-tól is és $f(b)$-től is, és amely az f-nek nem lokális szélsőértéke. (Van ilyen A, mivel bármely valós függvény lokális szélsőértékeinek halmaza megszámlálható, ld. a [P. Komjáth and V. Totik, *Problems and Theorems from Classical Set Theory*, Problem Books in Mathematics, Springer, 2006.] könyv 5. fejezetének 9. problémáját). Tegyük fel pl., hogy $f(a) < A$. Akkor az

$$\{x \in [a,b] \mid f(x) \geq A\}$$

nem üres halmaz, és legyen x_0 ennek legkisebb eleme. Nyilvánvalóan $f(x_0) = A$ és $a < x_0 < b$ (az A választása miatt), továbbá $f(x) < A$ minden $a \leq x < x_0$-re.

Legyen $\delta > 0$ olyan kicsi, hogy $x_0 - \delta > a$ és $x_0 + \delta < b$ teljesülnek. Mivel $f(x) < A$, és ezért $f(x) \leq A$ az x_0 ponttól balra, ugyanez nem állhat fenn az x_0 egy jobb oldali környezetében (különben A lokális maximum-érték lenne), így vannak tetszőlegesen kicsi $0 < \varepsilon < \delta$ számok, amelyekre $f(x_0 + \varepsilon) > A$. Egy ilyen $0 < \varepsilon < \delta$-ra legyen $x = x_0 - \varepsilon$, $y = x_0 + \varepsilon$. Ezekre $f(x) < A < f(y)$, és mivel $M(x,y) < N(x,y) = x_0$ szintén igaz, $f(M(x,y)) < A = f(N(x,y))$ is teljesül. Tehát ezekre az x, y értékekre a (2) függvényegyenlet nem áll fenn, és ez az ellentmondás igazolja, hogy f valóban konstans kell, hogy legyen.

A kitűzők megoldása.

2. megoldás. Tegyük fel indirekt módon, hogy $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ folytonos és kielégíti a függvényegyenletet, de valamely $0 < u < v$-re $f(u) \neq f(v)$. Legyen $a = \sup\{x \mid 0 < x < v,\ f(x) = f(u)\}$. Erre $u \leq a$, f folytonossága miatt $f(a) = f(u)$, és $a < v$. Hasonlóan, a $b = \inf\{y \mid a < y,\ f(y) = f(v)\}$ számra igaz, hogy $b \leq v$, $f(b) = f(v)$ és $a < b$.

Ezek szerint találtunk egy $[a,b] \subset (0, \infty)$ zárt intervallumot, amire $f(a) \neq f(b)$ és (a,b)-n f nem veszi fel sem $f(a)$-t, sem $f(b)$-t. A függvényegyenletet a-ra és b-re felírva kapjuk, mivel $f(a) - f(b) \neq 0$, hogy $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(\sqrt{ab})$. Legyen ez a közös érték t. Az előzők szerint ez különbözik $f(a)$-tól és $f(b)$-től.

Legyen $b_0 = b$ és $b_{n+1} = 2\sqrt{a \cdot b_n} - a$ minden n nemnegatív egészre. Ekkor n szerinti teljes indukcióval triviálisan látható, hogy $b_n > a$; a b_n sorozat szigorúan monoton csökkenő (mert $b_{n+1} < b_n$ ekvivalens $\sqrt{a \cdot b_n} < \frac{a+b_n}{2}$-vel, ez pedig a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből következik, mivel $b_n > a$). Ha β ezen (monoton csökkenő, alulról korlátos) sorozat határértéke, akkor $\beta = 2\sqrt{a \cdot \beta} - a$, és innen kapjuk, hogy $\beta = a$.

Teljes indukcióval belátjuk, hogy $f\left(\frac{a+b_n}{2}\right) = t$. Ez $n = 0$-ra teljesül, és tegyük fel, hogy ezt az egyenlőséget valamilyen n-re már beláttuk. A b_{n+1} szám definíciója miatt $\frac{a+b_{n+1}}{2} = \sqrt{a \cdot b_n}$, és a függvényegyenlet szerint

$$[f(a) - f(b_n)]\left[f(\sqrt{a \cdot b_n}) - f\left(\frac{a+b_n}{2}\right)\right] = 0.$$

De itt $f(b_n) \neq f(a)$, hiszen $a < b_n < b$, tehát

$$t = f\left(\frac{a+b_n}{2}\right) = f(\sqrt{a \cdot b_n}) = f\left(\frac{a+b_{n+1}}{2}\right)$$

fenn kell, hogy álljon, amivel igazoltuk az indukciós lépést.

Azonban $f\left(\frac{a+b_n}{2}\right) = t$ minden n-re ellentmond f folytonosságának, hiszen $\lim_{n\to\infty} b_n = a$ miatt $\lim_{n\to\infty} \frac{a+b_n}{2} = a$, de

$$t = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{a+b_n}{2}\right) \neq f(a).$$

Több versenyző megoldása alapján.

9. feladat. (Kitűző: Totik Vilmos) *Egy $G \subseteq \mathbb{C}$ tartományon értelmezett u függvényre legyen $Z(u)$ az u zérushelyei halmazának 1 sugarú környezete. Igazoljuk, hogy minden $K \subset G$ kompakt halmazra van olyan C konstans, hogy ha u tetszőleges valós harmonikus függvény G-n, amely eltűnik a K valamelyik pontjában, akkor*

$$\sup_{z\in K} |u(z)| \leq C \sup_{z\in Z(u)\cap G} |u(z)|.$$

Megoldás. K kompaktsága miatt van olyan $1 > \delta > 0$ és T, hogy bármely $z, w \in K$ összeköthető legfeljebb T hosszú töröttvonallal, amelynek minden pontja legalább δ távolságra megy a G határától. Minden $z, w \in K$ párra rögzítsünk egy ilyen $L_{z,w}$ töröttvonalat.

Legyen $w \in K$ olyan, hogy $u(w) = 0$; legyen

$$q = \sup_{z \in Z(u) \cap G} |u(z)|,$$

és $z \in K$ tetszőleges. Ha $z \in \overline{Z(u)}$, akkor $|u(z)| \leq q$; egyébként $L_{z,w}$-n z-ből w felé haladva van egy legelső olyan z' pont amely $\overline{Z(u)}$-ban van. Ha t tetszőleges pont $L_{z,w}$-n, amely z és z' között van, akkor a t pont δ sugarú $D_\delta(t)$ környezetében u-nak nincs zérushelye (különben $t \in \overline{Z(u)}$ lenne $\delta < 1$ miatt), ezért u vagy pozitív, vagy negatív $D_\delta(t)$-ben. Pl. a pozitív esetben (a negatív eset (-1)-gyel való beszorzással kapható) a $\overline{\Delta_\delta(t)}$ zárt körlapon u-ra felírva a Poisson formulát kapjuk, hogy ha $t_1' = t + r_1 e^{i\theta_1}$, $|r_1| < \delta$, akkor

$$u(t_1') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta^2 - r_1^2}{\delta^2 - 2\delta r_1 \cos(\theta_1 - \xi) + r_1^2} u(t + \delta e^{i\xi}) d\xi,$$

és mivel az integrálban $|r_1| \leq \delta/2$ esetén

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\delta - r_1}{\delta + \rho_1} = \frac{\delta^2 - r_1^2}{\delta^2 + 2\delta r_1 + r_1^2} \leq \frac{\delta^2 - r_1^2}{\delta^2 - 2\delta r_1 \cos(\theta_1 - \xi) + r_1^2} \leq \frac{\delta^2 - r_1^2}{\delta^2 - 2\delta r_1 + r_1^2} = \frac{\delta + r_1}{\delta - \rho_1} \leq 3,$$

illetve ugyancsak a Poisson-formula miatt

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t + \delta e^{i\xi}) d\xi$$

is fennáll, az u pozitivitása adja, hogy

$$\frac{1}{3} u(t) \leq u(t_1') \leq 3u(t)$$

(itt lényegében a klasszikus Harnack-egyenlőtlenséget igazoltuk).

Következményként kapjuk, hogy

$$1/9 \leq u(t_1')/u(t_2') \leq 9$$

minden $t_1', t_2' \in D_{\delta/2}(t)$-re. Válasszunk $t_0 = z$, $t_1, \ldots, t_k$, $t_{k+1} = z'$ pontokat az $L_{z,w}$ görbén a z és z' között úgy, hogy t_j és t_{j+1} távolsága a görbén mérve $\delta/2$, kivéve esetleg a $\overline{t_k z'}$ távolságot, amely lehet ennél kisebb is. Ekkor egyrészt $|u(t_{j+1})/u(t_j)| \leq 9$ minden j-re, másrészt $|u(t_{k+1})| \leq q$, továbbá $k \leq T/(\delta/2)$, és ezekből

$$|u(z)| \leq q 9^{T/(\delta/2)+1}$$

adódik. Mivel ez bármely $z \in K$-ra igaz, ez az egyenlőtlenség igazolja az állítást.

Több versenyző megoldása alapján.

10. feladat. (Kitűző: Molnár Lajos) *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, szigorúan konvex függvény. Legyen továbbá H komplex Hilbert-tér, A és B pedig önadjungált korlátos lineáris operátorok H-n. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(A) - f(B) = f'(B)(A - B)$, akkor $A = B$.*

Megoldás. A feladat megoldásának fő eszköze a spektráltétel, a továbbiakban erre vonatkozó alapismereteket használunk.

Adjungálva az $f(A) - f(B) = f'(B)(A - B)$ egyenlőséget azonnal adódik, hogy $f'(B)A = Af'(B)$. Ismeretes, hogy felcserélhető önadjungált operátorok folytonos függvényei is felcserélhetőek. Ezért $g(f'(B))A = Ag(f'(B))$ teljesül minden folytonos g függvényre, így az f' szigorúan monoton növekvő folytonos függvény inverzére is, amiből adódik, hogy A és B felcserélhetőek.

Legyen az A spektrálmértéke az $\mathbb{R}$ Borel-halmazainak σ-algebráján E, a B-é pedig F. Az A, B felcserélhetősége miatt E, F értékei, mint projekciók is felcserélhetőek.

Tegyük fel, hogy λ, μ olyan valós számok, melyekkel

$$E\Big((\lambda - 1/n, \lambda + 1/n)\Big) \cdot F\Big((\mu - 1/n, \mu + 1/n)\Big) \neq 0 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Nyilvánvalóan ekkor $\lambda \in \sigma(A)$ és $\mu \in \sigma(B)$ teljesül ($\sigma(\cdot)$ jelöli a spektrumot). Legyen $E_n := E\Big((\lambda - 1/n, \lambda + 1/n)\Big), F_n := F\Big((\mu - 1/n, \mu + 1/n)\Big)$. A fentiek miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $x_n \in \operatorname{ran}(E_n) \cap \operatorname{ran}(F_n)$, $\|x_n\| = 1$ vektor. Könnyen látható, hogy $n \to \infty$ esetén $\|(A - \lambda I)E_n\| \to 0$ és $\|(B - \mu I)F_n\| \to 0$, s ezért $Ax_n - \lambda x_n \to 0$ és $Bx_n - \mu x_n \to 0$. Standard módon adódik, hogy $g(A)x_n - g(\lambda)x_n \to 0$ és $g(B)x_n - g(\mu)x_n \to 0$ igaz minden g folytonos valós függvényre (polinomokra egyszerű számolás, utána pedig g-t egyenletesen approximáljuk polinomokkal a spektrumokon). Mivel

$$f(A)x_n - f(B)x_n = f'(B)(Ax_n - Bx_n),$$

ezért

$$\Big[f(A)x_n - f(B)x_n - f(\lambda)x_n + f(\mu)x_n\Big] + (f(\lambda) - f(\mu))x_n =$$
$$= \Big[f'(B)(Ax_n - Bx_n - \lambda x_n + \mu x_n) + (\lambda - \mu)(f'(B) - f'(\mu))x_n\Big] + (\lambda - \mu)f'(\mu)x_n.$$

Tudjuk, hogy ez minden n-re teljesül, és a szögletes zárójelben levő tagok normában nullához tartanak. Mindkét oldal belső szorzatát véve x_n-nel és n-nel végtelenhez tartva kapjuk, hogy

$$f(\lambda) - f(\mu) = f'(\mu)(\lambda - \mu).$$

Ebből viszont a szigorú konvexitás miatt adódik a $\lambda = \mu$ egyenlőség. Tehát, ha $\lambda \neq \mu$ valós számok, akkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$E\Big((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)\Big) \cdot F\Big((\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)\Big) = 0,$$

azaz $E\Big((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)\Big)$ és $F\Big((\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)\Big)$ merőlegesek (pontosabban képtereik merőlegesek) egymásra.

Azt állítjuk, hogy $E((-\infty, t]) = F((-\infty, t])$ teljesül minden t valós számra. Ebből már következni fog, hogy $E = F$, s így $A = B$. Az állítás belátásához legyenek m, M olyan valós számok, hogy $\sigma(A) \cup \sigma(B) \subset (m, M)$. Nyilván elég megmutatni, hogy $E([m, t]) = F([m, t])$ teljesül minden $m < t < M$ esetén. Az egyenlőséghez pedig elég belátni a kapcsolódó kétirányú egyenlőtlenséget. Megmutatjuk, hogy $E([m, t]) \leq F([m, t])$ fennáll minden $m < t < M$ esetén. Ehhez tekintsünk egy tetszőleges $t < t' < M$ számot, és rögzítsünk egy $t' \leq \mu < M$ számot. Minden $\lambda \in [m, t]$ esetén létezik olyan $\varepsilon_\lambda > 0$, hogy $E\Big((\lambda - \varepsilon_\lambda, \lambda + \varepsilon_\lambda)\Big)$ és $F\Big((\mu - \varepsilon_\lambda, \mu + \varepsilon_\lambda)\Big)$ merőlegesek egymásra. Kompaktsági megfontolásból kapjuk, hogy találhatóak

$\lambda_1,\dots\lambda_k \in [m,t]$ számok úgy, hogy $[m,t] \subset \cup_{j=1}^k (\lambda_j - \varepsilon_{\lambda_j}, \lambda_j + \varepsilon_{\lambda_j})$, és $E\Big((\lambda_j - \varepsilon_{\lambda_j}, \lambda_j + \varepsilon_{\lambda_j})\Big)$ merőleges $F\Big((\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon)\Big)$-re ($j = 1,\dots k$), ahol $\varepsilon := \min(\varepsilon_1,\dots\varepsilon_k)$. Innen könnyen adódik, hogy $F\Big((\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon)\Big)$ merőleges $E([m,t])$-re. Mivel ez minden $\mu \in [t', M]$ számmal igaz, ezért egy újabb hasonló meggondolás adja, hogy $F([t', M])$ és $E([m,t])$ merőlegesek egymásra minden $t < t' < M$ esetén. Emiatt pedig $F((t, M])$ és $E([m,t])$ is merőlegesek egymásra, ami pontosan azt jelenti, hogy $E([m,t]) \le F([m,t])$ teljesül. Innen kapjuk az állítást.

Megjegyezzük, hogy a feladatban szereplő, az f függvény deriváltjának folytonosságára vonatkozó feltétel elhagyható, az következik f differenciálhatóságából és konvexitásából.

A kitűző megoldása.

11. feladat. (Kitűző: Nagy Béla, Totik Vilmos és Varga Tamás) *Egy* $[0,1] \subseteq E \subset [0,\infty)$ *véges sok zárt intervallumból álló halmazra indítsunk egy kétdimenziós Brown-mozgást valamely* $x < 0$ *pontból, amely akkor álljon meg, ha* E *egy pontjába ér. Legyen* $p(x)$ *annak a valószínűsége, hogy ez a megállás* $[0,1]$*-en történik. Igazoljuk, hogy* $p(x)$ *növekszik a* $[-1,0)$ *intervallumon.*

Megoldás. Legyen $E \subset \mathbb{R}$ véges sok intervallumból álló halmaz, és egy $x \in \mathbb{R} \setminus E$ pontból indítsunk egy Brown-mozgást, amely akkor álljon meg, ha E egy pontjába ér. Ismeretes Kakutani tétele, hogy E-n ennek a megállási valószínűségnek az eloszlása ugyanaz, mint az x pontnak a $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ halmazra vett harmonikus mértéke, és ez ugyanaz (ld. [E. B. Saff and V. Totik, *Logarithmic Potential with External Fields,* Springer Verlag, Appendix 3]), mint az x pontba helyezett egységnyi δ_x pontmérték E-re vett $\mathrm{Bal}(\delta_x, E)$ ún. balayage-mértéke. Ez utóbbi az egyetlen olyan valószínűségi μ mérték E-n, amelyre igaz, hogy valamilyen c konstanssal minden $z \in E$ pontra

$$\int_E \log|z-t|d\mu(t) = \log|z-t| + c.$$

Legyen a feladatbeli E halmaz a $[0,\beta]$ intervallumnak része. Ismeretes (ld. pl. a fenti könyvben a (4.47) formulát), hogy a δ_x balayage-mértéke a $[0,\beta]$ intervallumra (azaz az x pont harmonikus mértéke a $\overline{\mathbb{C}} \setminus [0,\beta]$ tartomány határán) a

$$\frac{d\mu_x(t)}{dt} = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{|x-t|}\,\frac{\sqrt{x(x-\beta)}}{\sqrt{t(t-\beta)}}$$

sűrűségmértékkel adott mérték. Egyszerű számolás adja, hogy itt a jobb oldal minden $t \in [1,\beta]$ esetén x-ben csökken ($t \in [1,\beta]$-ben egyenletesen), ha $x \in [-1,0)$.

A balayage-mérték definíciójából azonnal adódik, hogy

$$\mathrm{Bal}(\delta_x, E) = \mu_{x|E} + \int_{[0,\beta]\setminus E} \mathrm{Bal}(\delta_t, E)\, d\mu_x(t).$$

Itt a feltevés szerint $[0,\beta]\setminus E = (1,\beta]\setminus E$, ezért annak a valószínűsége, hogy a Brown-mozgás $[0,1]$-en kívül áll meg a következő:

$$\mathrm{Bal}(\delta_x, E)(E\setminus[0,1]) = \mu_x(E\cap(1,\beta]) + \int_{(1,\beta]\setminus E} \mathrm{Bal}(\delta_t, E)(E\cap(1,\beta])\, d\mu_x(t).$$

Az integrandus független x-től, és az a mérték, ami szerint integrálunk, az csökken x-ben a $[-1,0)$ intervallumon, így a második tag csökken x-ben, ugyanúgy, mint az első tag (az előbb mondottak alapján). Emiatt $p(x)$ $(= 1 - \mathrm{Bal}(\delta_x, E)(E \setminus [0,1]))$ növekszik a $[-1,0)$ intervallumon.

A kitűzők megoldása.

Problems of the 2015 Miklós Schweitzer Memorial Competition in Mathematics

Problem 1. Let K be a closed subset of the closed unit ball in $\mathbb{R}^3$ such that a dense system of chords of the unit sphere is disjoint from K. Verify that there exists a set H such that H is dense in the unit sphere, and the chords connecting any two points of H are disjoint from K.

Problem 2. Let $\{x_n\}$ be the van der Korput sequence, that is, if the binary form of the positive integer n is $n = \sum_i a_i 2^i$ $(a_i \in \{0,1\})$, then $x_n = \sum_i a_i 2^{-i-1}$. Let V be the set of points (n, x_n) in the plane, where n is a positive integer. Let G be the graph for which the set of vertices is V, and two different vertices p and q are connected by an edge if and only if there is an axis-parallel rectangle R satisfying $R \cap V = \{p, q\}$. Prove that the chromatic number of G is finite.

Problem 3. Let A be a finite set and let $\to$ be a binary relation on A such that for any $a, b, c \in A$, if $a \neq b$, $a \to c$ and $b \to c$, then $a \to b$ or $b \to a$. Let $B \subseteq A$ be minimal regarding the property that to each element $a \in A \setminus B$ there corresponds $b \in B$ with $a \to b$ or $b \to a$. Assume that A has at most k elements among which no two elements are related by $\to$. Prove that B has at most k elements.

Problem 4. Let $a_1, a_2, \ldots$ be a sequence of positive integers such that $a_1 = 1$, and for any prime p the numbers $a_1, a_2, \ldots, a_p$ form a complete residue system modulo p. Show that $\lim a_n/n = 1$.

Problem 5. For $n \geq 1$ write $f(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1$. For which positive integer n can one find polynomials $g(x), h(x)$ with real coefficients and degree less than n such that $f(x) = g(h(x))$ holds?

Problem 6. Let G be a permutation group acting on the finite set Ω. Let $S \subseteq G$ be such that $1 \in S$ and for any $x, y \in \Omega$ there is a unique $\sigma \in S$ with $\sigma(x) = y$. Show that if the elements of $S \setminus \{1\}$ are conjugated in G, then G acts doubly transitively on Ω.

Problem 7. Let S^2 denote the unit sphere centered at the origin in three-dimensional Euclidean space. A zone of width w on S^2 is an origin-symmetric spherical segment of width w. Show that there exists a constant $c > 0$ such that for any positive integer n the sphere S^2 can be covered by n zones of the same width in such a way that each point is contained in at most $c \cdot \sqrt{n}$ zones.

Problem 8. Prove that all continuous solutions of the functional equation

$$[f(x) - f(y)]\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f\left(\sqrt{xy}\right)\right] \equiv 0, \qquad x, y \in (0, \infty),$$

are constant.

Problem 9. Consider a harmonic function u defined on a domain $G \subset \mathbb{C}$ and denote the neighborhood of the zeros of u with radius 1 by $Z(u)$. Prove that for each compact set $K \subset G$ there exists a constant C such that if u is any harmonic function on G which vanishes at a point of K, then

$$\sup_{z \in K} |u(z)| \le C \sup_{z \in Z(u) \cap G} |u(z)|.$$

Problem 10. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuously differentiable, strictly convex function. Further, let H be a complex Hilbert space and A, B be bounded, selfadjoint linear operators on H. Prove that if $f(A) - f(B) = f'(B)(A - B)$, then $A = B$.

Problem 11. Consider a two-dimensional Brownian motion starting from $x < 0$ inside $\mathbb{C} \setminus E$ where $[0, 1] \subset E \subset [0, \infty)$ consists of finitely many intervals and stop it if it hits E. Denote by $p(x)$ the probability that it stops at a point of $[0, 1]$. Prove that $p(x)$ is increasing on $[-1, 0)$.