Jelentés a 2014. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat 2014. október 22. és november 3. között rendezte meg a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, továbbá azok vehettek részt, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 2014-ben fejezték be.

A verseny lebonyolítására a Társulat a következő bizottságot kérte fel: Rónyai Lajos (elnök), Csikós Balázs, Keleti Tamás, Móri Tamás, Simonovits Miklós, Stipsicz András, Szegedy Balázs, Tóth Bálint, Frenkel Péter (titkár).

A bizottság október 14-i ülésén kiválasztotta a 11 kitűzendő feladatot. A bizottság köszönetét fejezi ki mindazoknak, akik feladatot javasoltak a versenyre. A kitűzött feladatok szerzői: 1. Lángi Zsolt, Naszódi Márton, Pach János, Tardos Gábor és Tóth Géza, 2. Pach János és Tardos Gábor, 3. Károlyi Gyula, 4. Ruzsa Imre, 5. Kós Géza, 6. Zábrádi Gergely, 7. Keleti Tamás és Laczkovich Miklós, 8. Halász Gábor és Móri Tamás, 9. Csikós Balázs, 10. Frenkel Péter és Kós Géza, 11. Móri Tamás és Székely J. Gábor.

A versenyen 13 diák indult, mindannyian az ELTE TTK matematika alapszakos, matematikus mesterszakos, illetve matematikus PhD hallgatói. Összesen 71 feladatra adtak be dolgozatot. A versenybizottság december 9-i ülésén megállapította, hogy egyetlen versenyző oldotta meg — apró pontatlanságoktól eltekintve — mind a tizenegy feladatot. Ennek alapján

I. díjban és 80 000 forint pénzjutalomban részesül

Nagy János elsőéves mesterszakos hallgató.

Egy versenyző oldott meg hét feladatot (1., 3., 5., 6., 7., 8., 10.), továbbá a 4. feladat (a) részét, és ért el részeredményt a 2. feladatban. Ennek alapján

II. díjban és 40 000 forint pénzjutalomban részesül

Mészáros András másodéves mesterszakos hallgató.

Négy versenyző oldott meg lényegében öt feladatot (vagy nyújtott ezzel egyenértékű teljesítményt), és ért el további értékes részeredmény(eke)t. Ennek alapján

III. díjban és 20 000 forint pénzjutalomban részesül

Ágoston Tamás harmadéves alapszakos hallgató,

Kalina Kende elsőéves mesterszakos hallgató,

Nagy Dániel doktorandusz és

Poór Márk elsőéves mesterszakos hallgató.

Közülük Ágoston Tamás megoldotta a 4., 5., 6. feladatot, valamint lényegében a 3. és 10. feladatot is, míg az 1. feladatban a kívántnál gyengébb, de aszimptotikusan pontos becslést bizonyított. Kalina Kende megoldotta a 6., 7., 11., valamint — kis hiányosságtól eltekintve — a 3. és 5. feladatot, az 1. feladatban egy a kívántnál gyengébb becslést bizonyított, továbbá részeredményt ért el a 4.(a), 9. és 10. feladatban is. Nagy Dániel a 2., 3., 4.(a), 10. és 11. feladatot oldotta meg, és részeredményt ért el a 8. és 9. feladatban. Poór Márk az 1., 2., 3., 4.(a), 5. és 6. feladatot oldotta meg.

Két versenyző oldott meg három feladatot, vagy nyújtott ezzel egyenértékű teljesítményt. Ennek alapján
1. dicséretben részesül
Ta The Anh elsőéves mesterszakos hallgató és
Wolosz János doktorandusz.
Közülük Ta The Anh megoldotta a 3., 4.(a) és 11. feladatot, és kisebb-nagyobb részeredményt ért el az 5., 6. és 10. feladatban. Wolosz János megoldotta a 3., 4. és 5. feladatot.

Egy versenyző oldott meg két feladatot (3. és 10.). Ennek alapján
2. dicséretben részesül
Ágoston Péter elsőéves alapszakos hallgató.

A díjakat a Morgan Stanley Magyarország Elemző Kft. támogatta, ezért a versenybizottság köszönetét fejezi ki.

A feladatok és megoldásaik

A megoldás szerzőjét csak ott jelezzük, ahol eltér a feladat szerzőjétől.

1. **Feladat:** Legyen n pozitív egész. Legyen $\mathcal{F}$ egy olyan halmazrendszer, amely egy n elemű X halmaz összes részhalmazának több, mint a felét tartalmazza. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{F}$-ből mindig kiválasztható $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ halmaz úgy, hogy ezek együtt szeparálják X elemeit, vagyis X bármely két különböző eleméhez van olyan kiválasztott halmaz, amely a kettő közül pontosan egyet tartalmaz.

   Megoldás (Mészáros András megoldása alapján). Az X halmaz részhalmazai a szimmetrikus differencia művelettel, mint összeadással egy $\mathbb{F}_2$ feletti V vektorteret alkotnak. Megadható egy $\lceil \log_2 n \rceil$ elemű $\mathcal{U}$ családja nem feltétlenül $\mathcal{F}$-beli részhalmazoknak, ami szeparálja X-et. Legyen W az $\mathcal{U}$ által generált altér. Ennek eltoltjai particionálják V-t, így találhatunk olyan $W+c$ eltoltat, amelyikben az elemek több, mint fele $\mathcal{F}$-ben van. Legyen $d \in (W+c) \cap \mathcal{F}$ tetszőleges, és tekintsük az $\{x \in W \mid x+d \in \mathcal{F}\}$ halmazt. Minthogy ez W elemeinek több, mint felét tartalmazza, így generálja W-t és kiválasztható belőle W egy $\mathcal{Z}$ bázisa. Itt $\mathcal{Z}$ az $\mathcal{U}$ által generált W altér bázisa, így

$$|\mathcal{Z}| \leq |\mathcal{U}| = \lceil \log_2 n \rceil$$

(az egyenlőség is könnyen látszik, de nem kell). Tekintsük az $\mathcal{F}$ (legfeljebb) $\lceil \log n \rceil + 1$ eleméből álló

$$\{d\} \cup \{z+d \mid z \in \mathcal{Z}\}$$

halmazt. Ez megfelel a feladat elvárásainak, hiszen az általa generált altér tartalmazza W-t, és így szeparálja X-et, márpedig az X bármely két rögzített elemét *nem* szeparáló részhalmazok alteret alkotnak V-ben, így egy részhalmaz pontosan akkor szeparálja X-et, ha az általa generált altér szeparálja.

Megoldotta: Mészáros András, Nagy János és Poór Márk. Ágoston Tamás a kívántnál gyengébb, de aszimptotikusan pontos becslést bizonyított. Kalina Kende egy a kívántnál gyengébb becslést bizonyított. Nem tartalmaz érdemi eredményt 2 dolgozat.

2. **Feladat:** Legyen $k \geq 1$ és legyenek $I_1, \ldots, I_k$ a $[0,1]$ intervallum el nem fajuló részintervallumai. Bizonyítsuk, hogy

$$\sum \frac{1}{|I_i \cup I_j|} \geq k^2,$$

ahol az összegzés az olyan (i,j) indexpárokra vonatkozik, ahol I_i és I_j nem diszjunkt.

Megoldás. Legyen f_i a következő valós függvény a $[0,1]$ intervallumon (I_i indikátorfüggvénye normalizálva):

$$f_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{|I_i|} \text{ ha } x \in I_i \\ 0 \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Itt $\int_0^1 f_i(x)dx = 1$, így

$$\int_0^1 \sum_i f_i(x)dx = k.$$

Emiatt

$$\int_0^1 \left(\sum_i f_i(x) \right)^2 dx \geq k^2$$

(Cauchy-Schwarz). Beszorozva azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i,j} \int_0^1 f_i(x) f_j(x) dx \geq k^2.$$

Innen már csak azt kell észrevenni, hogy ha I_i és I_j diszjunktak, akkor $\int_0^1 f_i(x)f_j(x)dx = 0$, ha meg nem diszjunktak, akkor

$$\int_0^1 f_i(x) f_j(x) dx = \frac{|I_i \cap I_j|}{|I_i||I_j|} \leq \frac{1}{|I_i \cup I_j|}.$$

Megoldotta: Nagy Dániel és Poór Márk, továbbá — apró pontatlanságoktól eltekintve — Nagy János. Részeredményt ért el Mészáros András. Két dolgozat nem tartalmaz érdemi eredményt.

3. **Feladat:** A sík $4n+5$, hármanként nem kollineáris pontját két színnel kiszínezzük. Igazoljuk, hogy lesz n üres (azaz, belsejében színes pontot nem tartalmazó) háromszög, amelyeknek a belseje páronként diszjunkt és amelyeknek az összes csúcsa mind egyszínű.

Megoldás. Feltehető, hogy legalább $2n+3$ piros pont van. Legyen p darab csúcsa a piros pontok konvex burkának, és legyen p' további piros pont. A piros pontokat felháromszögelve kapunk $p + 2p' - 2$ egymásba nem nyúló piros háromszöget, amelyek közül legalább $x = p + 2p' - 2 - k$ üres, ahol k a piros pontok konvex burkán belül levő kék pontok száma. E kék pontokat felháromszögelve kapunk legalább $k-2$ egymásba nem nyúló kék háromszöget, amelyek közül legalább $y = k - 2 - p'$ üres. Mivel

$$x + y = p + p' - 4 \geq 2n - 1,$$

ezért $x \geq n$ vagy $y \geq n$.

Megjegyzések. 1. A feladat megoldása megtalálható a [6] cikkben (3.2 tétel).

2. A feladat a 2013. évi Közép-európai Matematikai Diákolimpia (MEMO) T-4. feladata általánosításának tekinthető.

Megoldotta: Ágoston Péter, Mészáros András, Nagy Dániel, Nagy János, Poór Márk, Szabó Dávid, Ta The Anh és Wolosz János, valamint kis hiányosságtól eltekintve Kalina Kende és lényegében Ágoston Tamás is.

4. **Feladat:** Legyen n pozitív egész számhoz $f(n)$ azon $a_1, \ldots, a_k$ pozitív egészekből álló számsorozatok száma, amelyekre $a_i \geq 2$ és $a_1 \ldots a_k = n$, $k \geq 0$ tetszőleges. ($f(1)=1$.) Legyen α az az egyetlen 1-nél nagyobb valós szám, amelyre $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} = 2$. Lássuk be, hogy

(a)

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = O(n^{\alpha})$$

és

(b) nincs olyan $\beta < \alpha$ szám, amelyre $f(n) = O(n^{\beta})$ teljesül.

Megoldás. (a) Legyen

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Nyilván $n \geq 2$ esetén

$$f(n) = \sum_{d|n, d\geq 2} f(n/d),$$

és innen

$$F(n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} F([n/k]).$$

Indukcióval belátjuk, hogy $F(n) \leq 2n^{\alpha} - 1$. Ez igaz, ha $n = 1, 2$. Ha már n alatt igaz, akkor

$$F(n) \leq 1 + 2\sum_{k=2}^{n} ((n/k)^{\alpha} - 1) =$$
$$= (2-n) + 2\sum_{k=2}^{n} (n/k)^{\alpha} \leq 2\sum_{k=2}^{\infty} (n/k)^{\alpha} - 1 = 2n^{\alpha} - 1.$$

Megjegyzések az (a) részhez. 1. Kis odafigyeléssel látható, hogy $F(n) \leq n^{\alpha}$.

2. (Wolosz János)

$$\sum f(n)n^{-t} = \frac{1}{2-\zeta(t)},$$

így az (a) rész a Wiener-Ikehara tételből következik, sőt,

$$\lim n^{-\alpha}F(n) \tag{1}$$

értéke is megkapható. Lásd pl. [9].

3. A feladat (a) részének állítása Kalmár László eredménye az [4] cikkből, ahol szerepel a fenti (1) határérték kiszámítása is. Az [5] cikkben pedig Kalmár becslést ad a konvergencia sebességére.

(b) (Nagy János megoldása.) Válasszunk egy tetszőleges $t \in (\beta, \alpha)$ számot. Az α szám definíciója miatt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-t} > 2, \quad \sum_{n=2}^{\infty} n^{-t} > 1$$

tehát találunk olyan m számot is, hogy

$$\sum_{k=2}^{m} k^{-t} > 1.$$

Legyen $f'(n)$ azon szorzatfelbontások száma, amelyekben minden tényező $\leq m$, és

$$F'(n) = \sum_{k=1}^{n} f'(k).$$

Az előzőkhöz hasonlóan

$$f'(n) = \sum_{d|n, m \geq d \geq 2} f(n/d),$$

és innen

$$F'(n) = 1 + \sum_{k=2}^{m} F'([n/k]).$$

Belátjuk, hogy $F'(n) \geq c(n+1)^t$ alkalmas pozitív c konstanssal. Válasszuk c-t úgy, hogy ez teljesüljön $1 \leq n \leq m$ esetén. A továbbiakban indukciót használunk. Mivel

$$\left[\frac{n}{k}\right] + 1 \geq \frac{n+1}{k},$$

ezért

$$F'(n) > \sum_{k=2}^{m} F'([n/k]) \geq c \sum_{k=2}^{m} \left(\left[\frac{n}{k}\right] + 1 \right)^t \geq$$
$$\geq c \sum_{k=2}^{m} \left(\frac{n+1}{k} \right)^t = c(n+1)^t \sum_{k=2}^{m} k^{-t} > c(n+1)^t.$$

Viszont f' csak olyan számokon pozitív, amelyek kizárólag m alatti prímszámokból állnak. Az ilyenek száma n-ig $O\big((\log n)^l\big)$, ahol l az m alatti prímek száma. Ha tehát $f(n) = O(n^\beta)$ lenne, akkor

$$F'(n) = O\big((\log n)^l n^\beta\big) = o(n^t)$$

lenne.

Megjegyzések a (b) részhez. 1. Talán meglepő, hogy f összegzése alig nagyobb a maximális tagjánál, tehát az összeg a kevés nagyon nagy értékből származik.

2. A (b) rész bizonyítása megtalálható a [3] cikkben.

Megoldotta: Ágoston Tamás, Nagy János, Strenner Péter, Wolosz János. Az (a) részt megoldotta Mészáros András, Nagy Dániel, Poór Márk és Ta The Anh. Az (a) részt részben megoldotta Kalina Kende.

5. **Feladat:** Legyen α nem tisztán valós, másodfokú algebrai egész, és legyen P a $\mathbb{Z}[\alpha]$ gyűrű irreducibilis elemeinek halmaza. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{|p|^2} = \infty.$$

Megoldás. (Frenkel Péter, Ruzsa Imre) A

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

gyűrű elemei a komplex síkon parallelogrammarácsot alkotnak. Ennek minden korlátos részhalmaza véges, ezért minden nem-nulla elem abszolút értéke legalább 1 (különben a hatványai torlódnának). Emiatt minden egység abszolút értéke 1, tehát véges sok egység van.

A

$$\sum_{0\neq x\in\mathbb{Z}[\alpha]} \frac{1}{|x|^2}$$

összeg divergens. Valóban, ez az $\alpha = i$ speciális esetben könnyen látható, általában pedig $\mathbb{Z}[\alpha]$ parallelogrammarács, tehát a $\mathbb{Z}[i]$ négyzetrács képe egy invertálható lineáris transzformációnál, és e lineáris transzformáció normája persze véges, így a fenti összeg divergens.

Ezt felhasználva

$$\prod_{p\in P} \frac{1}{1-|p|^{-2}} = \prod_{p\in P} \left(1 + \frac{1}{|p|^2} + \frac{1}{|p|^4} + \dots\right) = \infty,$$

mert $\mathbb{Z}[\alpha]$ minden, nullától és az egységektől különböző eleme felírható P-beliek szorzataként (sőt üres szorzatként az 1 is felírható). Így tehát a

$$\prod_{p\in P} \left(1 - \frac{1}{|p|^2}\right)$$

szorzat a nullához divergál. Ebből az állítás világos.

Megoldotta: Ágoston Tamás, Maga Balázs, Mészáros András, Nagy János, Poór Márk és Wolosz János, valamint — kis hiányosságtól eltekintve — Kalina Kende is. Részeredményt ért el Ta The Anh.

6. **Feladat:** Legyen $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ a G véges p-csoport egy reprezentációja egy p karakterisztikájú test felett. Igazoljuk, hogy ha a $\sum_{g\in G} \rho(g)$ lineáris leképezésnek a V egy véges dimenziós W alterére való megszorítása injektív, akkor a $\rho(g)W$ ($g \in G$) alterek által kifeszített altér ezen altereknek direkt összege.

Megoldás. Legyen $\dim_K W = n$, és válasszunk egy $v_1, \dots, v_n$ bázist W-ben. Jelöljük továbbá U-val a W által generált G-részreprezentációt V-ben. A bizoyítandó állítás azzal ekvivalens, hogy a természetes

$$\begin{aligned} \pi\colon K[G]^n &\to U \\ e_i &\mapsto v_i \end{aligned}$$

$K[G]$-modulushomomorfizmus bijektív. Itt $K[G]$ jelöli a G csoport K együtthatós csoportalgebráját, $e_1, \ldots, e_n$ pedig az n rangú szabad (baloldali) $K[G]$-modulus generátorait.

Legyen
$$T = \sum_{g \in G} g \in K[G].$$

Vegyük észre, hogy T benne van a $K[G]$ centrumában. Így a T-vel való szorzás egy $K[G]$-moduluson egy $K[G]$-modulushomomorfizmus. Ha $K[G]$-t mint G-reprezentációt tekintjük, melyen G a balszorzással hat, akkor a T által generált altér éppen a G fixpontjainak halmaza. Valóban, ha egy $\sum \alpha_g g \in K[G]$ elem fixpontja a hg^{-1}-zel való szorzásnak, akkor szükségképpen $\alpha_g = \alpha_h$. (Speciálisan a reguláris reprezentáció talpa a T által generált altér, hiszen $K[G]$-nek egyetlen egyszerű modulusa van, a triviális reprezentáció.)

Tekintsük a
$$\begin{tikzcd} K[G]^n \arrow[r, "T\cdot"] \arrow[d, "\pi"'] & K[G]^n \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r, "T\cdot"'] & U \end{tikzcd} \tag{2}$$

kommutatív diagramot, melyben a leképezések $K[G]$-homomorfizmusok. A feladat feltétele azt mondja, hogy a T-vel való szorzás W-n injektív, tehát $T(U)$ legalább n-dimenziós. (Valójában az is látszik rögtön, hogy pontosan n-dimenziós, hiszen a $(g-1)v$ alakú elemek benne vannak T magjában.) Node a T-vel való szorzás képe $K[G]^n$-en is n-dimenziós, hiszen a kép éppen a $Te_1, \ldots, Te_n$ elemek által generált altér. Ezért a feltételből következik, hogy π megszorítása a
$$\mathrm{Soc}(K[G]^n) = T(K[G]^n)$$
n-dimenziós altérre injektív, azaz
$$\mathrm{Ker}(\pi) \cap \mathrm{Soc}(K[G]^n) = \{0\}.$$

Viszont a talpat minden nemtriviális részreprezentáció nemtriviálisan metszi, ezért $\mathrm{Ker}(\pi) = \{0\}$, azaz π izomorfizmus. Vagy, ha úgy tetszik, egy p-csoport minden p-karakterisztikájú reprezentációjának van fixpontja (ami ugyanez), és ezért $\mathrm{Ker}(\pi) = \{0\}$.

Megoldotta: Ágoston Tamás, Kalina Kende, Mészáros András, Nagy János és Poór Márk. Részeredményt ért el Ta The Anh.

7. **Feladat:** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges. Igaz-e, hogy ha f grafikonjának és g grafikonjának a Minkowski-összege (azaz az

$$\{(x + y, f(x) + g(y)) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

halmaz) nulla Lebesgue-mértékű, akkor az f függvény $f(x) = ax + b$ alakú alkalmas $a, b \in \mathbb{R}$ konstansokkal?

Megoldás. Megmutatjuk, hogy az $f(x) = |x|$ függvényhez van megfelelő g, vagyis az állítás nem igaz. Jelölje F az $|x|$ függvény grafikonját, C a klasszikus Cantor-halmazt, legyen $A = C + \mathbb{Z}$, végül legyen B az a halmaz, amelyet $A \times A$ origó körüli 45 fokos elforgatásával kapunk. Ekkor az $F + A$ halmaz 45 fokos elforgatottja $(A \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times A)$, tehát nullmértékű. Így már csak azt kell megmutatni, hogy A tartalmaz $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénygrafikont, azaz az x tengelyre vett vetülete a teljes számegyenes. Ehhez elég azt meggondolni, hogy a $C \times C$ halmaz 45 fokos vetülete egy 2 hosszú szakasz, ami látszik akár az önhasonló struktúrából (indukcióval minden generációra igaz), akár abból a szintén egyszerűen ellenőrizhető közismert tényből, hogy $C + C = [0, 2]$.

Megjegyzés: Felmerül a kérdés, hogy melyek azok a folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, amelyekhez van olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hogy f és g grafikonjának Minkowski-összege nullmértékű. Máthé András megmutatta, hogy tipikus folytonos f ilyen, továbbá minden abszolút folytonos f is ilyen. Kiss Viktor megmutatta, hogy van olyan szinguláris f is, amely ilyen; nevezetesen, a Cantor-függvény is ilyen.

Megoldotta: Kalina Kende, Mészáros András, Nagy János. Hibás egy dolgozat.

8. **Feladat:** Legyen $n \geq 1$ rögzített egész. Számítsuk ki az

$$\inf_{p,f} \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - p(x)|$$

távolságot, ahol p az n-nél alacsonyabb fokú valós együtthatós polinomokon, f pedig a $[0, 1]$ zárt intervallumon értelmezett,

$$f(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k x^k$$

alakú függvényeken fut végig, ahol $c_k \geq 0$ és $\sum_{k=n}^{\infty} c_k = 1$.

1. Megoldás (Nagy János). Legyen

$$1 = x_0 > \ldots > x_n \geq 0.$$

A $[0,1]$ intervallumban értelmezett (folytonos) $g(x)$ függvényhez készítsük el az ezen alappontokban interpoláló legfeljebb n-edfokú $q(x)$ polinomját, és definiáljuk a $g(x)$ függvényeken értelmezett Lg funkcionált mint a polinom n-edfokú tagjának az együtthatóját.

Az interpoláló polinom Lagrange-féle alakja

$$q(x) = \sum_{j=0}^{n} g(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i},$$

tehát a funkcionál,

$$Lg = \lim_{x\to\infty} \frac{q(x)}{x^n} = \sum_{j=0}^{n} \frac{g(x_j)}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} (x_j - x_i)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{n} b_j g(x_j).$$

Speciálisan a hatványfüggvényekre alkalmazva, érvényes a

Segédtétel.

$$Lx^k = \sum_{j=0}^{n} b_j x_j^k \begin{cases} = 0 & (0 \leq k \leq n-1), \\ = 1 & (k = n), \\ \geq 1 & (k > n). \end{cases}$$

$x_n = 0$ és $k = 0$ esetén itt $x_n^k = 0^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$ értendő.

Ha $k \leq n$, akkor ezt már tudjuk, hiszen minden, legfeljebb n-edfokú polinom interpolációs polinomja önmaga. Az utolsó állítás, az egyenlőtlenség bizonyítását későbbre halasztjuk.

A feladat jelöléseivel alkalmazzuk a funkcionált a $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - p(x)$ függvényre:

$$Lg = Lf - Lp = Lf = \sum_{k=n}^{\infty} c_k L x^k \geq \sum_{k=n}^{\infty} c_k = 1.$$

Ha $f(x) = x^n$, másszóval, ha $g(x)$ 1 főegyütthatós n-edfokú polinom, akkor az egyenlőtlenségben is egyenlőség van.

Másfelől triviális becsléssel

$$Lg \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x)| \sum_{j=0}^{n} |b_j|.$$

A b_j együtthatók alakjából látjuk, hogy egyik sem tűnik el, az előjelük váltakozik, és $b_0 > 0$. Ezért itt pontosan akkor lehet egyenlőség, ha

$$g(x_j) = (-1)^j \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x)| \quad (j = 0, \dots, n).$$

A feltétel teljesíthető: A

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

n-edfokú Csebisev-polinom a $[-1, 1]$ intervallumon a

$$\cos \frac{j\pi}{n} \qquad (j = 0, \dots, n)$$

pontokban, ahol váltakozó előjelű, abszolút értékben felveszi a maximumát. Lineárisan áttranszformálva hát a $[0, 1]$ intervallumra, a

$$g_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{1-2n} T_n(2x - 1)$$

n-edfokú polinom, amit mindjárt úgy normáltunk, hogy a főegyütthatója 1 legyen, az

$$x_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 + \cos \frac{j\pi}{n}}{2} = \cos^2 \frac{j\pi}{2n} \quad (j = 0, \dots, n)$$

pontokban veszi fel, váltakozó előjellel, x_0-ban pozitívval, a maximumát. A $g = g_0$ választásra tehát Lg-nek mind a felső, mind az alsó becslésében az egyenlőség teljesül:

$$2^{1-2n} = \max_{0 \leq x \leq 1} |g_0(x)| = \frac{Lg_0}{\sum_{j=0}^{n} |b_j|} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n} |b_j|} \leq$$
$$\leq \frac{Lg}{\sum_{j=0}^{n} |b_j|} \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x)|$$

minden $g(x) = f(x) - p(x)$ típusú függvényre.

Ezzel megoldottuk a feladatot, a keresett távolság 2^{1-2n}.

Megjegyzés. A feladatban szereplő infimum valójában tehát minimum, sőt $g_0(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} x^n - p_0(x)$ az egyetlen extremális eset, kivéve, ha $n = 1$. A Segédtételre adandó mindegyik bizonyításunkból kiolvasható ugyanis, hogy $k > n > 1$ esetén határozott $Lx^k > 1$ egyenlőtlenség áll. Az $n = 1$ eset ebből a szempontból valóban kivételes: $Lx^k = 1$ minden $k \geq n = 1$-re, és minden $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$, és csak ezek, extremálisak, mint közvetlenül is látható.

A Segédtétel egyenlőtlenségének a bizonyítása. Legyen egyelőre $x_n > 0$ határozottan.

$$\sum_{j=0}^{n} b_j x_j^k = \lambda(e^k),$$

ahol

$$\lambda(y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{j=0}^{n} b_j y^{\nu_j},$$

$\nu_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \log x_j \;\; (j = 0, \ldots, n)$, $0 = \nu_0 > \ldots > \nu_n$.

A (közönséges valós) polinomokra vonatkozó Descartes-féle előjelszabály Laguerre-től származó általánosítása szerint ilyen, úgynevezett általánosított (nem azonosan eltűnő) polinomoknak is legfeljebb annyi pozitív nullhelyük van, ahány jelváltás található a b_j együtthatóiknak a sorozatában (l. például Pólya–Szegő).

A $\lambda(y)$ általánosított polinomnak a Segédtétel már ismert állítása szerint van n nullhelye az $y = e^k$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ pontokban. (Ez még nem ellentmondás, de mutatja, hogy a b_j $(j = 0, \ldots, n)$ együtthatóknak váltakozó előjelűeknek kell lenniük, amit korábban a speciális alakjukból olvastunk le.) Rolle tétele biztosít legalább $n-1$ gyököt az $(1, e^{n-1})$ intervallumban $\lambda'(y)$ számára. Azt is tudjuk már a Segédtételből, hogy $\lambda\left(e^n\right) = 1$.

Ha volna olyan $y > e^n$, ahol $\lambda(y) < 1$, akkor λ-nak kellene, hogy legyen egy lokális maximuma az (e^{n-1}, y) intervallumban. Ez még egy gyököt jelentene λ' számára, összesen n darabot, holott λ' n tagú általánosított polinom – $\nu_0 = 0$ miatt a $j = 0$ tag a deriválással kiesik –, és az előjelszabály értelmében legfeljebb $n-1$ gyöke lehetne.

Tehát $\lambda(y) \geq 1 \;\; (y > e^n)$, speciálisan $Lx^k = \lambda\left(e^k\right) \geq 1 \;\; (k > n)$, amit bizonyítanunk kellett.

Az érvelés nem lenne érvényes $x_n = 0$ esetén, mert ν_n-nek nem volna értelme. Legegyszerűbb arra hivatkozni, hogy Lx^k folytonosan függ az interpolációs alappontoktól.

A segédtétel egyenlőtlenségét beláttuk.

Ehhez a b_j együtthatókról, az x_j alappontokról alig kellett tudnunk valamit. Bemutatunk még néhány bizonyítást, amelyek különböző mértékben használják azok speciális alakját. Az első a b_j-k képletén alapul, de az alappontok továbbra is tetszőlegesek lehetnek.

A Segédtétel egyenlőtlenségének 2. bizonyítása (Kós Géza). Könnyű látni, hogy

$$Lx^k = \sum_{j=0}^{n} \frac{x_j^k}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} (x_j - x_i)}$$

az

$$F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{z^k}{\prod_{i=0}^{n} (z - x_i)}$$

racionális függvény reziduumainak az összege. Racionális függvény reziduumainak a zárt síkra vett összege mindig 0, ha a ∞-beli reziduumát

$$F\left(\frac{1}{z}\right) \frac{d\frac{1}{z}}{dz} = -\frac{1}{z^2} F\left(\frac{1}{z}\right)$$

0-beli reziduumaként értelmezzük. (A közönséges Reziduum-tétel egyszerű alkalmazásával.)

Az Lx^k érték tehát a

$$\frac{1}{z^2} F\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z^{n-1-k}}{\prod_{i=0}^{n} (1 - x_i z)} =$$

$$= z^{n-1-k} \prod_{i=0}^{n} \left(1 + x_i z + x_i^2 z^2 + \ldots\right) \qquad (|z| < 1)$$

függvény 0-beli reziduuma, azaz a szorzat hatványsorában z^{k-n} együtthatója:

$$Lx^k = \sum_{d_0+\ldots+d_n=k-n} x_0^{d_0} \cdots x_n^{d_n},$$

ahol $\{d_0, \ldots, d_n\}$ az összegzésben szereplő feltételt kielégítő nemnegatív egész számokból álló $(n+1)$-eseken fut végig.

A csupa nemnegatív tagból álló összegben $k \geq n$ esetén szerepel az $x_0^{k-n} = 1$ tag is, ami bizonyítja az állítást.

Ha mármost az $x_j = \cos^2 \frac{j\pi}{2n}$ $(j = 0, \ldots, n)$ alappontokra szorítkozunk, akkor a b_j együtthatók zárt alakban is megadhatók:

$$b_j = \begin{cases} \dfrac{2^{2n-2}}{n} & (j = 0), \\ (-1)^j \dfrac{2^{2n-1}}{n} & (1 \leq j \leq n-1), \\ (-1)^n \dfrac{2^{2n-2}}{n} & (j = n). \end{cases}$$

Erre a számolásra nincs is szükségünk, ha az ezekkel a b_j-kel definiált

$$Lg \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{n} b_j g \left(\cos^2 \frac{j\pi}{2n} \right)$$

funkcionálra ellenőrizzük a Segédtétel összes állítását, hiszen amikor fent a Segédtételből levezettük a feladat megoldását, ezeken kívül pusztán a b_j-k jelváltását – látszólag még b_0 pozitivitását is – használtuk, ami a mostani definíciónkkal is teljesül.

A képletet egyszerűbb alakra hozva:

$$Lg = \frac{2^{2n-2}}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j g \left(\cos^2 \frac{j\pi}{2n} \right).$$

Valóban, a definíció $j = 0$ és $j = n$ indexű tagja itt is előfordul ugyanazzal az indexszel és együtthatóval, míg az $1 \leq j \leq n-1$ indexű tagjai kétszer szerepelnek j és $2n - j$ indexszel, de együttesen szintén a definícióban megadott együtthatóval.

A Segédtétel 3. bizonyítása a speciális alappontokra (Frenkel Péter). Jelöljük ϱ-val a $4n$-edik egységgyököket:

$$\varrho = e^{\frac{ij\pi}{2n}} \qquad (j = 0, \dots, 4n-1).$$

Ekkor

$$\cos\frac{j\pi}{2n} = \Re\varrho = \frac{\varrho + \varrho^{-1}}{2}, \quad (-1)^j = \varrho^{2n}.$$

Behelyettesítve ezeket Lg képletébe, figyelembe véve, hogy ϱ és $-\varrho$ adaléka megegyezik, mindjárt a $g(x) = x^k$ függvényre alkalmazva,

$$Lx^k = \frac{2^{2n-3}}{n}\sum_{\varrho}\varrho^{2n}\left(\frac{\varrho+\varrho^{-1}}{2}\right)^{2k} = \frac{2^{2n-3}}{n}\sum_{\varrho}\varrho^{2n}\Phi(\varrho),$$

ahol

$$\Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^{2k} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^m.$$

Felhasználva, hogy

$$\sum_{\varrho}\varrho^m = \begin{cases} 4n & (m \equiv 0 \pmod{4n}), \\ 0 & \text{különben}, \end{cases}$$

$$\sum_{\varrho}\varrho^{2n}\Phi(\varrho) = 4n \sum_{m\equiv 2n \pmod{4n}} a_m,$$

$$Lx^k = 2^{2n-1}\sum_{m\equiv 2n \pmod{4n}} a_m.$$

Az a_m együttható interpretálható úgy, mint annak a valószínűsége, hogy a szimmetrikus bolyongás $2k$ lépés után az m pontba ér:

$$a_m = P\left(S = m\right),$$

ahol $S = \sum_{l=1}^{2k}\xi_l$, ξ_l $(l = 1, \dots, 2k)$ 1-et és (-1)-et $P(\xi_l = \pm 1) = 1/2$ valószínűséggel felvevő független valószínűségi változók.

Ha $k < n$, akkor $|S| \le 2k < 2n$, és a bolyongás nem ér el $m \equiv 2n \pmod{4n}$ pontot, így $Lx^k = 0$.

Ha $k = n$, akkor eléri $2n$-et és $-2n$-et, de csak úgy, hogy mindig 1-et vagy mindig (-1)-et lép, ennek a valószínűsége $2 \cdot 2^{-2n}$, így $Lx^k = 1$.

Ha $k > n$, akkor rögzítsük, bárhogyan, az első $2k - 2n + 1$ lépést. Az utolsó után a bolyongás páratlan pontban tartózkodik. Páratlan pont távolsága a hozzá legközelebb levő, $\pmod{4n}$ $2n$-nel kongruens ponttól páratlan egész, legfeljebb $2n - 1$, márpedig a hátralévő $2n - 1$ lépéssel legalább egyféleképpen bármelyik, ilyen távolságra levő pontba el lehet jutni. Ennek a (feltételes) valószínűsége legalább 2^{-2n+1}, így $Lx^k \geq 1$.

Megjegyzés. A binomiális tétel szerint

$$\Phi(z) = \frac{1}{4^k} \sum_{m=-k}^{k} \binom{2k}{k+m} z^{2m},$$

ahonnan rövid számolással

$$Lx^k = 4^{n-k} \sum_{\substack{0<m\leq k \\ m\equiv n \pmod{2n}}} \binom{2k}{k+m}.$$

Nyitott maradt azonban a kérdés, hogyan lehet a Segédtétel egyenlőtlenségét Lx^k-nak ebből a látszólag legegyszerűbb, legkonkrétabb alakjából levezetni (másképp, mint a fenti 3. bizonyítás valószínűségszámítási gondolatmenetének kombinatorikus átfogalmazásával).

Megoldotta: Mészáros András és — apró pontatlanságoktól eltekintve — Nagy János. Részeredményt ért el Nagy Dániel. Nem tartalmaz érdemi eredményt két dolgozat.

9. **Feladat:** Legyen $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\rho(\mathbf{x}) = e^{-||\mathbf{x}||^2}$, $K \subset \mathbb{R}^n$ egy konvex test, azaz egy kompakt, nem üres belsejű konvex halmaz. Definiáljuk a K test ρ súlyfüggvényre vonatkozó $\mathbf{s}_K$ súlypontját a szokásos

$$\mathbf{s}_K = \frac{\int_K \rho(\mathbf{x})\mathbf{x}d\mathbf{x}}{\int_K \rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}}$$

képlettel. Bizonyítsuk be, hogy a K test eltoltjainak páronként különböző a ρ súlyfüggvényre vonatkozó súlypontjuk.

Megoldás. Mivel K eltoltjai egymásnak is eltoltjai, elég azt belátni, hogy ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ egy tetszőleges vektor, és $\mathbf{s}(t)$ jelöli a $K + t\mathbf{v}$ eltolt $\mathbf{s}_{K+t\mathbf{v}}$ súlypontját, akkor $\langle \mathbf{s}'(t), \mathbf{v}\rangle > 0$ minden $t \in \mathbb{R}$-re, hiszen ebből $\langle \mathbf{s}(1) - \mathbf{s}(0), \mathbf{v}\rangle > 0$, tehát K és $K + \mathbf{v}$ súlypontja nem eshet egybe.

Elég a $t = 0$ paraméterértékre belátni, hogy $\langle \mathbf{s}'(0), \mathbf{v}\rangle > 0$. Kis számolás után az

$$\langle \mathbf{s}'(0), \mathbf{v}\rangle =$$
$$= ||\mathbf{v}||^2 + \frac{2\big((\int_K e^{-||\mathbf{x}||^2}\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle d\mathbf{x})^2 - \int_K e^{-||\mathbf{x}||^2}\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle^2 d\mathbf{x} \cdot \int_K e^{-||\mathbf{x}||^2} d\mathbf{x}\big)}{\big(\int_K e^{-||\mathbf{x}||^2} d\mathbf{x}\big)^2}$$

egyenlethez jutunk. Azt kellene tehát belátni, hogy

$$||\mathbf{v}||^2 \left(\int_K e^{-||\mathbf{x}||^2} d\mathbf{x}\right)^2 +$$
$$+2\left(\int_K e^{-||\mathbf{x}||^2}\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle d\mathbf{x}\right)^2 - 2\int_K e^{-||\mathbf{x}||^2}\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle^2 d\mathbf{x} \cdot \int_K e^{-||\mathbf{x}||^2} d\mathbf{x} > 0,$$

ami egyenértékű azzal, hogy

$$\int_{K\times K} [e^{-||\mathbf{x}||^2-||\mathbf{y}||^2}(||\mathbf{v}||^2 - \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{v}\rangle^2)] d\mathbf{x} d\mathbf{y} > 0.$$

Végezzük el az $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$ helyettesítést. Az $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}$ vektor a K bármely pontja lehet, míg rögzített $\mathbf{u} \in K$ esetén a $\mathbf{w}$ vektor a $K_{\mathbf{u}} = (K-\mathbf{u}) \cap (-K+\mathbf{u})$ origóra szimmetrikus halmazon futhat végig. Így az új változókkal felírva a bizonyítandó egyenlőtlenséget

$$2^n \int_K e^{-2||\mathbf{u}||^2} \int_{K_{\mathbf{u}}} [e^{-2||\mathbf{w}||^2}(||\mathbf{v}||^2 - 4\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle^2)] d\mathbf{w} d\mathbf{u} > 0$$

adódik. Elég lenne tehát azt belátni, hogy tetszőleges $\tilde{K}$ origóra szimmetrikus konvex testre

$$\int_{\tilde{K}} [e^{-2||\mathbf{w}||^2}(||\mathbf{v}||^2 - 4\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle^2)] d\mathbf{w} > 0.$$

Feltehetjük, hogy $||\mathbf{v}|| = 1$. Számoljuk ki az integrált Fubini tételével, $\mathbf{v}$-re merőleges hipersíkokon elvégezve először az integrálást. Legyen

$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0\}$, χ a $\tilde{K}$ karakterisztikus függvénye, és vezessük be az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \int_H e^{-2||\mathbf{z}||^2} \chi(\mathbf{z} + t\mathbf{v}) d\mathbf{z}$$

függvényt. Ekkor

$$\int_{\tilde{K}} [e^{-2||\mathbf{w}||^2}(||\mathbf{v}||^2 - 4\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle^2)] d\mathbf{w} = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2t^2}(1 - 4t^2) dt.$$

A ρ súlyfüggvény kompozíciója a H-ra menő merőleges vetítéssel és χ log-konkávok, így szorzatuk is az, amiből Prékopa tétele [8, Theorem 6] szerint f is az. Ráadásul f páros függvény a $\tilde{K}$ szimmetriája miatt, amiből egyszerűen adódik, hogy maximumát a 0-ban veszi fel, és a 0-tól távolodva értéke csökken. Mivel az $(1 - 4t^2)$ függvény a $(-2, 2)$ intervallumon pozitív, azon kívül pedig nulla, vagy negatív,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2t^2}(1-4t^2) dt \geq 2f(2) \int_0^\infty e^{-2t^2}(1-4t^2) dt = 2f(2) \left[te^{-2t^2} \right]_0^\infty = 0.$$

Egyenlőség csak akkor állhatna fenn, ha f konstans lenne, de nem lehet az, mert tartója korlátos és pozitív értéket vesz fel az origóban. Ezzel az állítást beláttuk.

Megoldotta: Nagy János. Részeredményt ért el Kalina Kende és Nagy Dániel. Nem tartalmaz érdemi eredményt egy dolgozat.

10. **Feladat:** A kétdimenziós gömbfelület egy triangulációjának minden csúcsához rendeljük hozzá a sík egy konvex részhalmazát úgy, hogy minden háromszöglap három csúcsához rendelt három konvex halmaznak legyen közös pontja. Mutassuk meg, hogy van négy olyan csúcs, amelyekhez rendelt konvex halmazoknak van közös pontjuk.

Megoldás. (Nagy Dániel megoldása alapján.) Gömb helyett tetszőleges zárt felületre bizonyítunk. Minden Δ háromszöglapnak feleltessük meg a Δ csúcsaihoz rendelt konvex halmazok egy P_Δ közös pontját. A háromszögelés minden ε élének feleltessük meg az $e_\varepsilon = P_{\Delta_1} P_{\Delta_2}$ szakaszt, ahol Δ_1 és Δ_2 az ε-ra illeszkedő két háromszög. Ekkor a háromszögelés minden Z csúcsához hozzárendelt K_Z konvex halmaz tartalmazza a Z-re illeszkedő összes háromszöglaphoz rendelt pontot és így a Z-ből induló összes élhez rendelt szakaszt is.

Ha van egy Δ háromszöglap és egy rá nem illeszkedő Z csúcs úgy, hogy $P_\Delta \in K_Z$, akkor P_Δ közös pontja a Δ csúcsaihoz és Z-hez rendelt négy konvex halmaznak, és készen vagyunk. A továbbiakban feltesszük, hogy ilyen háromszög és csúcs nincs. Ebből az is következik, hogy a P_Δ pontok mind különbözők, és egyetlen e_ε szakasz sem megy át a saját végpontjaitól különböző P_Δ ponton.

Ha vannak ε_1 és ε_2 diszjunkt élek úgy, hogy a hozzájuk rendelt e_1 és e_2 szakaszoknak van közös Q pontja, akkor Q közös pontja az ε_1 és ε_2 végpontjaihoz rendelt négy konvex halmaznak, és készen vagyunk. A továbbiakban feltesszük, hogy ilyen diszjunkt élek nincsenek.

Véges sok P_Δ alakú pontot jelöltünk ki, válasszuk ki ezek konvex burkának egy csúcsát, legyen ez $P = P_\Delta$. A trianguláció Δ háromszöglapjának csúcsait jelölje Z_i $(i = 1, 2, 3)$, a Δ-nak Z_i-vel szemközti élét jelölje ε_i, az e mentén Δ-hoz csatlakozó háromszöglapot Δ_i, az ehhez a síkon hozzárendelt pontot $P_i = P_{\Delta_i}$ $(i = 1, 2, 3)$. A síkon az ε_i-knek megfelelő $e_i = e_{\varepsilon_i} = PP_i$ szakaszok P-ből indulnak és egy nyílt félsíkba mutatnak. Feltehetjük, hogy e_2 van a másik kettő között. Tekintsük a triangulációban a Z_2 csúcsból kiinduló, ε_1-től és ε_3-tól különböző éleket. Ezek diszjunktak ε_2-től, ezért a síkon nekik megfelelő szakaszok diszjunktak e_2-től. Ugyanakkor e szakaszok alkotta töröttvonal összeköti e_1 és e_3 P-től különböző P_1, illetve P_3 végpontját egy P csúcsú konvex szögtartományban. Emiatt a K_{Z_2} konvex halmaz tartalmazza a P_2 pontot, pedig a Z_2 csúcs nem csúcsa a Δ_2 háromszöglapnak. Ellentmondásra jutottunk.

Megjegyzés. (Csikós Balázs gondolatmenete alapján.) Az állítás tetszőleges dimenziós megfelelője is igaz: *Egy d dimenziós zárt sokaság tetszőleges M triangulációjának minden csúcsához rendeljük hozzá $\mathbb{R}^d$ egy konvex részhalmazát úgy, hogy minden d dimenziós lap $d+1$ csúcsához rendelt $d+1$ konvex halmaznak legyen közös pontja. Ekkor van $d+2$ olyan csúcs, amelyekhez rendelt konvex halmazoknak van közös pontjuk.*

Ezt a következőképpen láthatjuk be. Tekintsük a megadott konvex halmazokból álló rendszer *idegét.* Ez az az N (absztrakt) szimpliciális komplexus, amelynek csúcsai az eredeti M trianguláció csúcsai, és néhány csúcs akkor alkot szimplexet, ha a megfelelő konvex halmazoknak van közös pontjuk. Azt kell belátnunk, hogy ha N tartalmazza M-et (azaz M minden szimplexe N-nek is szimplexe), akkor N tartalmaz $d+1$ dimenziós szimplexet.

Az M szimpliciális komplexusban létezik nemnulla, $\mathbb{F}_2$-együtthatós d-ciklus: a d-dimenziós szimplexek összege ilyen. Ha N tartalmazza M-et, akkor tehát N-ben is ott van ez a nemnulla d-ciklus. Emiatt elegendő belátni, hogy $H_d(N,\mathbb{F}_2)=0$. Ezt több lépésben tesszük meg.

(1) Az előző megoldáshoz hasonlóan, a konvex halmazokat leszűkíthetjük kompakt konvex poliéderekre úgy, hogy az N ideg ne változzék: minden nem üres $K_i \cap K_j \cap ... \cap K_s$ metszetben kijelölünk egy $P_{ij...s}$ metszéspontot, és kicseréljük K_i-t a $P_{i...}$ alakú pontok konvex burkára. Ez azért egyszerűsíti a helyzetet, mert a kapott poliéderek X uniója egy szimpliciális komplexus teste.

(2) Ha $\varepsilon > 0$ elég kicsi, akkor a poliéderek ε sugarú nyílt környezeteit X-szel elmetszve a kapott halmazrendszer idege még mindig N. Ez a halmazrendszer ún. *jó* (relatív) nyílt fedése X-nek (minden részrendszer metszete pontrahúzható vagy üres), ezért az N ideg szimpliciális kohomológiája megegyezik az X Čech-féle kohomológiájával. Ehhez lásd pl. [2]. Ez a Čech-féle kohomológia pedig megegyezik az X egy tetszőleges szimpliciális felbontásából számított szimpliciális kohomológiával.

Emiatt tehát N és X szimpliciális kohomológiája izomorf. Ha az együtthatókat testből választjuk, akkor a homológiák is izomorfak, hiszen a H_i a H^i duális tere.

(3) Az $\mathbb{R}^d$-beli bármely X geometriai szimpliciális komplexusra viszont $H_d(X,\mathbb{F}_2)=0$. Sőt, a d-dimenziós ciklusok $Z_d(X,\mathbb{F}_2)$ csoportja is nulla. Valóban, tetszőleges d-dimenziós $c \neq 0$ láncban fellépő egyik d-dimenziós szimplex egy belső pontjából indítsunk egy olyan félegyenest, amely egyik $(d-2)$-dimenziós lapot sem metszi. Ekkor az a $(d-1)$-dimenziós lap, ahol a félegyenes elhagyja a fellépő d-dimenziós szimplexek unióját, 1 együtthatóval fellép a c lánc határában. Ezért c nem ciklus.

(4) Az előzőek szerint

$$H_d(N,\mathbb{F}_2) \simeq H_d(X,\mathbb{F}_2) = 0.$$

Megoldotta: Ágoston Péter, Mészáros András, Nagy Dániel és Nagy János, valamint lényegében Ágoston Tamás is. Részeredményt ért el Kalina Kende és Ta The Anh.

11. **Feladat:** Legyen U a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, és legyen

$$S_n = 2\sum_{k=1}^{n} \sin(2kU\pi).$$

Mutassuk meg, hogy $n \to \infty$ esetén S_n határeloszlása az $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ sűrűségfüggvényű Cauchy-eloszlás.

Megoldás. Ismeretes, hogy

$$S_n = \frac{2\sin((n+1)U\pi)\sin(nU\pi)}{\sin(U\pi)},$$

ezért

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2\sin((n+1)U\pi)\sin(nU\pi)}{\sin((n+1)U\pi)\cos(nU\pi) - \cos((n+1)U\pi)\sin(nU\pi)} \\ &= \frac{2}{\operatorname{ctg}(nU\pi) - \operatorname{ctg}((n+1)U\pi)}. \end{aligned}$$

Jelölje Z_n az nU törtrészét. Megmutatjuk, hogy

$$(Z_n, Z_{n+1}) \to (X, Y) \tag{3}$$

eloszlásban, ahol X és Y függetlenek és a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlásúak. Legyen $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, akkor

$$\bigcup_{0\le k\le \lfloor nx\rfloor -1} \left\{\tfrac{k}{n} \le U < \tfrac{k+y}{n}\right\} \subseteq \{U < x, Z_n < y\} \subseteq \bigcup_{0\le k\le \lfloor nx\rfloor} \left\{\tfrac{k}{n} \le U < \tfrac{k+y}{n}\right\},$$

amiből

$$\lfloor nx\rfloor \frac{y}{n} \le P\big(U < x, Z_n < y\big) \le (\lfloor nx\rfloor + 1)\,\frac{y}{n}$$

következik, ennélfogva $\lim_{n\to\infty} P(U < x, Z_n < y) = xy$. Tehát

$$(U, Z_n) \to (U, X)$$

eloszlásban, ahol U és X függetlenek és a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlásúak. Világos, hogy

$$(Z_n, Z_{n+1}) = \big(Z_n, \{Z_n + U\}\big) \to \big(X, \{X + U\}\big)$$

eloszlásban (most $\{\,.\,\}$ a törtrészt jelöli). Ezért elég belátni, hogy $\{X+U\}$ független X-től és egyenletes $[0,1]$-en. Ez pedig következik abból, hogy tetszőleges x szám esetén $\{x+U\}$ a $[0,1]$-en egyenletes eloszlású, így $\{X+U\}$ feltételes eloszlása az $X=x$ feltétel mellett x értékétől függetlenül egyenletes $[0,1]$-en.

Tehát S_n eloszlásban

$$\frac{2}{\operatorname{ctg}(\pi X)-\operatorname{ctg}(\pi Y)}$$

eloszlásához konvergál. Mivel $\operatorname{ctg}(\pi X)$ és $-\operatorname{ctg}(\pi Y)$ függetlenek és Cauchy-eloszlásúak, ezért a számtani közepük is Cauchy-eloszlású, és Cauchy-eloszlású valószínűségi változó reciproka is ilyen.

Megjegyzés.

A Weyl-kritérium kétdimenziós megfelelője [1] szerint a (3) konvergenciához elegendő igazolni, hogy tetszőleges j és k egész számra

$$\lim_{n\to\infty} E\big(\exp(2\pi ijnU+2\pi ik(n+1)U)\big)=$$
$$=E\big(\exp(2\pi ijX+2\pi ikY)\big)=\begin{cases}1, & \text{ha } j=k=0,\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

Ez pedig nyilvánvaló, hiszen

$$E\big(\exp(2\pi ijnU+2\pi ik(n+1)U)\big)=\begin{cases}1, & \text{ha } jn+k(n+1)=0,\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

Megjegyzés. A feladat megoldása megtalálható a [7] disszertációban (5.33 tétel).

Megoldotta: Kalina Kende, Nagy Dániel, Nagy János és Ta The Anh. Nem tartalmaz érdemi eredményt egy dolgozat.

Hivatkozások

[1] P. Billingsley: *Convergence of Probability Measures,* Wiley, 1968, p.51

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Good_cover_(algebraic_topology)

[3] Don Coppersmith, Moshe Lewenstein, Constructive bounds on ordered factorizations. SIAM J. Discrete Math. **19** (2005), no. 2, 301–303.

[4] Kalmár László, A “factorisatio numerorum” problémájáról, Mat. és Fiz. Lapok **38** (1931), 1-15.

[5] L. Kalmár, Über die mittlere Anzahl der Produktdarstellungen der Zahlen (Erste Mitteilung), Acta Sci. Math. **5** (1931), 95-107.

[6] O. Devillers, F. Hurtado, Gy. Károlyi, and C. Seara, Chromatic variants of the Erdős–Szekeres theorem on points in convex position, Comput. Geom. **26** (2003), no. 3, 193–208.

[7] V. S. Phadke, Non-classical convergence results for sums of dependent random variables, PhD disszertáció, Bowling Green State University, 2008.

[8] A. Prékopa, *On logarithmic concave measures and functions*, Acta Sci. Math. Hung., **34** (1973), pp. 335–343.

[9] `http://en.wikipedia.org/wiki/Wiener-Ikehara_theorem`