A 2013. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

2013. október 25. – 2013. november 4.

1. feladat. *Legyen $q \geq 1$ egész szám. Bizonyítsuk be, hogy van olyan C_q egész szám, hogy minden egész számokból álló véges A halmazra*

$$|A + q \cdot A| \geq (q+1)|A| - C_q.$$

($A + q \cdot A$ azon egész számokból áll, melyek felírhatók $a + qa'$ alakban $a, a' \in A$-val.)

2. feladat. *Mutassuk meg, hogy létezik olyan k_0 konstans, hogy az*

$$a^{2n} + b^{4n} + 2013 = ka^n b^{2n}$$

diophantoszi egyenletnek $k \geq k_0$ esetén nincs pozitív egész a, b, n megoldása.

3. feladat. *Melyek azok az n számok, melyekre az A_n alternáló csoportban van olyan permutáció, amelyet A_n-nek pontosan egy 2-Sylow részcsoportja tartalmaz?*

4. feladat. *Legyen A egy n elemű Abel-csoport. Igazoljuk, hogy létezik két, S_n-nel izomorf részcsoport $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-ben, melyek metszete izomorf A automorfizmuscsoportjával.*

5. feladat. *A $\mathfrak{g}$ Lie-algebra egy $\mathfrak{h}$ részalgebráját egy $\mathfrak{g}$-n megadott $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzatra vonatkozóan γ-tulajdonságúnak mondjuk, ha $X \in \mathfrak{h}$-ból következik, hogy $\langle [X, Y], X \rangle = 0$ minden $Y \in \mathfrak{g}$ elemre. Igazoljuk, hogy egy két lépésben nilpotens Lie-algebrán megadott skalárszorzatra vonatkozó γ-tulajdonságú részalgebrák dimenziójának maximuma nem függ a skalárszorzat megválasztásától.*

6. feladat. *Legyen $\mathscr{A}$ egy egységelemes C^*-algebra, és jelölje $\mathscr{A}_+$ az $\mathscr{A}$ pozitív elemeinek a kúpját (ez azon önadjungált $\mathscr{A}$-beli elemek halmaza, melyek spektruma benne van a $[0, +\infty[$ halmazban). Tekintsük $\mathscr{A}_+$-on az alábbi $\circ$ műveletet:*

$$x \circ y = \sqrt{x} y \sqrt{x} \qquad (x, y \in \mathscr{A}_+)\,.$$

Igazoljuk, hogy ha minden $x, y \in \mathscr{A}_+$ esetén

$$(x \circ y) \circ y = x \circ (y \circ y)\,,$$

akkor $\mathscr{A}$ kommutatív.

7. feladat. *Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény (azaz, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x+y) = f(x) + f(y)$ teljesül), amelyre az*

$$x \mapsto f(x) f\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$$

leképezés korlátos a $]0, 1[$ intervallum valamely nem üres nyílt részintervallumán. Igazoljuk, hogy f folytonos!

8. feladat. *Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos és szigorúan monoton függvény, amelyre*

$$f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)(f(x)+f(y)) = (x+y)f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$-re (f^{-1} az f inverzét jelöli). Bizonyítsuk be, hogy ekkor léteznek olyan $a \neq 0$ és b valós konstansok, amelyekkel $f(x) = ax + b$ minden $x \in \mathbb{R}$-re.

9. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy van olyan sehol sem folytonos $f\colon]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ függvény, amelyre minden $x, y \in]0, +\infty[$ és minden pozitív racionális α szám esetén fennáll, hogy*

$$f\left(\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \leq \left(\frac{f(x)^\alpha + f(y)^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Van-e olyan sehol sem folytonos $f\colon]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ függvény, amely eleget tesz a fenti egyenlőtlenségnek minden $x, y \in]0, +\infty[$ és minden pozitív irracionális α esetén?

10. feladat. *Legyen adva az $\mathbb{R}^n$ valós vektortéren egy Riemann-metrika, amelyre nézve bármely két a és b pont között egyetlen $g(a, b)$ távolságminimalizáló geodetikus szakasz létezik. Tegyük fel, hogy minden $a \in \mathbb{R}^n$ esetén a tőle vett Riemann-távolságot mérő $\varrho_a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény konvex, és differenciálható az a-n kívül. Mutassuk meg, hogy ha egy $x \neq a, b$ pontra*

$$\partial_i \varrho_a(x) = -\partial_i \varrho_b(x), \quad i = 1, \ldots, n$$

teljesül, akkor x a $g(a, b)$ egy pontja, és fordítva.

11. feladat. *(a) Adva van egy ellipszis a síkban. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan Riemann-metrika, amely az egész síkon értelmezve van, és amelyre nézve az adott ellipszis geodetikus. Igazoljuk, hogy minden ilyen Riemann-metrika Gauss-görbülete felvesz pozitív értéket is.*

(b) Legyen adva két, egymást nem metsző, egyszerű sima zárt görbe a síkban. Mutassuk meg, hogy ha egy, az egész síkon értelmezett teljes Riemann-metrikának a két adott görbe geodetikusa, akkor a metrika Gauss-görbülete valahol eltűnik.

12. feladat. *Egy zsákban n golyó van, ezek közül néhány (legalább egy, de nem mind) fehér, a többi fekete. A zsákból egymás után, visszatevés nélkül véletlenszerűen kihúzzuk az összes golyót. Jelölje X_i a fehér golyók számának arányát a zsákban az i-edik húzás előtt, és legyen*

$$T = \max\left\{\left|X_i - X_j\right| : 1 \leq i \leq j \leq n\right\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{E}(T) \leq H(\mathbb{E}(X_1))$, ahol $H(x) = -x \ln x - (1-x)\ln(1-x)$.

A megoldásokat magyar nyelven, jól olvashatóan, feladatonként külön papírra írva, **2013. november 4-én 12.00 óráig** a Bolyai János Matematikai Társulat helyi tagozatánál kell benyújtani, vagy ugyanezen időpontig ajánlottan postára kell adni a versenybizottság elnöke címére:

Pethő Attila,
DE IK Számítógéptudományi Tanszék
4010 Debrecen, Pf. 12

vagy elektronikusan, PDF formátumban kell elküldeni a petho.attila@inf.unideb.hu címre.

Minden lapon szerepeljen a versenyző neve, legalább az egyik lapon pedig az évfolyama, végzettsége, lakcíme és e-mail címe is.