# Jelentés a 2013. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat 2013. október 25. és november 4. között rendezte meg a 2013. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, valamint 2013-ban egyetemet vagy főiskolát végzettek vehettek részt.

A Bolyai János Matematikai Társulat a verseny megrendezésére a következő bizottságot kérte fel: Pethő Attila (elnök), Figula Ágota és Gselmann Eszter (titkárok), Baran Sándor, Bérczes Attila, Bessenyei Mihály, Bódi Béla, Boros Zoltán, Daróczy Zoltán, Fazekas István, Gaál István, Győry Kálmán, Hajdu Lajos, Horváth Gábor, Kozma László, Losonczi László, Lovas Rezső, Maksa Gyula, Molnár Lajos, Muzsnay Zoltán, Nagy Péter Tibor, Páles Zsolt, Pintér Ákos, Szilasi József, Sztrik János, Tamássy Lajos, Tengely Szabolcs, Terdik György.

A versenybizottság 12 feladatot tűzött ki. A feladatokat sorrendben Balog Antal, Pink István, Pálfy Péter Pál, Halasi Zoltán, Nagy Péter Tibor, Molnár Lajos, Boros Zoltán, Daróczy Zoltán, Maksa Gyula és Páles Zsolt, Tamássy Lajos és Kertész Dávid, Tran Quoc Binh, valamint Móri Tamás bocsátotta a bizottság rendelkezésére.

A versenyre 13 versenyző 53 megoldást nyújtott be, melyek közül 31 volt hibátlan. Az alábbi táblázatban pontok jelzik, hogy a versenyzők mely feladatokra nyújtottak be megoldásokat.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ágoston Tamás | | • | • | | | | | • | | | | |
| Bodor Bertalan | • | | • | • | | | | • | | | | • |
| Csizmadia Gábor Béla | • | • | | • | • | | | • | | • | | |
| Kiss Melinda Flóra | | • | • | | | | | | | | | |
| Kutas Péter | | | | | | | • | | | | | |
| Mészáros András | | • | | • | | | | • | | • | | • |
| Mészáros Szabolcs | | | • | • | | • | | • | • | • | • | • |
| Nagy Donát | | | | | | | | • | | • | | |
| Nagy János | • | • | • | • | • | | • | • | • | • | • | |
| Szilágyi Gergely Bence | | | | | | | • | • | | | | |
| Ta The Anh | • | • | | | | • | • | • | | | | |
| Virosztek Dániel | | | | | | | | | | • | • | • |
| Weisz Ágoston | | | | | | | | • | | | | |

A megoldások értékelése után a versenybizottság a következő döntést hozta.

**I. díj**ban részesül **Nagy János**, az ELTE harmadéves Matematika BSc hallgatója

**II. díj**ban részesül **Bodor Bertalan**, az ELTE első éves Matematika MSc hallgatója, **Mészáros András**, az ELTE első éves Matematika MSc hallgatója és **Mészáros Szabolcs**, az ELTE másodéves Matematika MSc hallgatója

**III. díj**ban részesül **Ta The Anh**, az ELTE harmadéves Matematika BSc hallgatója

**Dicséret**ben részesül **Ágoston Tamás**, az ELTE másodéves Matematika BSc hallgatója, **Nagy Donát**, ELTE harmadéves Matematika BSc hallgatója és **Virosztek Dániel**, a BME 2013-ban végzett másodéves Matematika MSc hallgatója

**Indoklás**

**Nagy János** 10 feladatra nyújtott be megoldást; a 2., 4., 7., 8., 10. és 11. feladatokra adott megoldása teljes; a 3. és az 5. feladatra adott megoldása hiányos, de javítható; a 9. feladat második részét lényegében jól oldotta meg, az 1. feladattal kapcsolatban részeredményeket ért el.

**Bodor Bertalan** 5 feladatra nyújtott be megoldást; a 3., 8. és 12. feladatokra adott megoldása teljes; az 1. feladatra lényegében jó megoldást adott, a 4. feladatra adott megoldása hiányos.

**Mészáros András** 5 feladatra nyújtott be megoldást; a 2., 4., 10. és 12. feladatokra adott megoldása teljes; a 8. feladatban egy kicsit gyengébb állítást bizonyít a kitűzöttnél.

**Mészáros Szabolcs** 8 feladatra nyújtott be megoldást; a 3., 8., 10. és 11. feladatokra adott megoldása teljes; a 9. feladat második részét jól oldotta meg és az első rész megoldása is tartalmaz jó gondolatokat.

**Ta The Anh** 5 feladatra nyújtott be megoldást; a 2., 6. feladatokra adott megoldása kiemelkedő és jól oldotta meg a 8. feladatot is.

**Ágoston Tamás** 3 feladatra nyújtott be megoldást; a 3. és 8. feladatokra adott megoldása teljes.

**Nagy Donát** a 8. és a 10. feladatra nyújtott be jó megoldást.

**Virosztek Dániel** 3 feladatra nyújtott be megoldást; a 12. feladatra adott megoldása kiemelkedő, jól oldotta meg a 10. feladatot és a 11. feladatra benyújtott megoldása hiányos.

## A feladatok és megoldásaik

**1. feladat (Balog Antal).** *Legyen $q \geq 1$ egész szám. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $C_q$ egész szám, hogy minden egész számokból álló véges $A$ halmazra*

$$|A + q \cdot A| \geq (q + 1)|A| - C_q. \tag{1}$$

*($A + q \cdot A$ azon egész számokból áll, melyek felírhatók $a + qa'$ alakban $a, a' \in A$-val.)*

**Megoldás. (Balog Antal)** Az itt leírt bizonyításból $C_q = q^2 2^{(q-2)(q+1)}$ adódik, ami messze van az optimálistól. $A, B$ végig egész számok véges nem üres halmazát jelölik, de megjegyezzük, hogy az első két állítás valós számokra is igaz (azonos bizonyítással). A megoldás során semmilyen ismert vagy ismeretlen eredményre nem hivatkozunk. Illetve egyre mégis. Ha $\text{lnko}(d_1, \dots, d_k, q) = 1$, akkor modulo $q$ minden maradékosztály kifejezhető $d_1 n_1 + \cdots + d_k n_k$ alakban. (lnko a legkisebb közös osztót jelöli.)

**1.1. Állítás.**

$$|A + B| \geq |A| + |B| - 1. \tag{2}$$

**Bizonyítás.** Legyenek $A = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_m\}$ és $B = \{b_1 < b_2 < \cdots < b_n\}$. A következő felsorolás $m + n - 1$ elemet tartalmaz $A + B$–ből.

$$a_1 + b_1 < a_1 + b_2 < \cdots < a_1 + b_n < a_2 + b_n < a_3 + b_n < \cdots < a_m + b_n.$$

□

**1.2. Állítás.** *Minden $q \geq 2$ esetén*

$$|A + q \cdot A| \geq 3|A| - 2. \tag{3}$$

**Bizonyítás.** Legyen $A = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_m\}$. A következő felsorolás $3m - 2$ elemet tartalmaz $A + q \cdot A$–ből.

$$a_1 + qa_1 < a_2 + qa_1 < a_1 + qa_2 < a_2 + qa_2 < a_3 + qa_2 < a_2 + qa_3 < \cdots < a_m + qa_m.$$

□

Feltehetjük, hogy $q \geq 3$, mert az 1. és 2. Állítások megoldják a Feladatot $q = 1$ és $q = 2$ esetben, továbbá $C_1 = 1$ és $C_2 = 2$. Könnyű példát mutatni arra, hogy ezek az értékek optimálisak, de nagyobb $q$–ra már nem sikerül az optimális $C_q$–t megtalálni a jelen módszerrel.

Jegyezzűk meg, hogy az $A$ halmaz elemeire alkalmazott lineáris transzformáció sem $A$, sem $A+q\cdot A$ méretét nem befolyásolja. Osszuk fel $A$–t $q$ szerinti maradékosztályokra, azaz

$$A = \bigcup_{j=1}^{r} A_j, \quad A_j = a_j + q \cdot B_j, \quad 0 \leq a_j < q, \quad B_j \neq \emptyset, \tag{4}$$

ahol az unió diszjunkt, és az $a_j$ egészek különbözőek. Nyilván $1 \leq r \leq q$. Ha valamilyen $1 \leq j \leq r$ esetén

$$\text{lnko}(a_1 - a_j, a_2 - a_j, \ldots, a_r - a_j, q) = 1 \tag{5}$$

nem teljesül, akkor $A$–t eltoljuk $a_j$–vel (balra), és leosztjuk a fenti lnko–val, így kapunk egy új $A$ halmazt (ami természetesen más maradékosztályokban oszolhat el). Ha ez az új rendszer sem teljesíti (5)–öt minden $j$–re, akkor ismét tolunk és osztunk. Mivel minden osztás csökkenti $A$ legnagyobb és legkisebb elemei közti különbséget ($A$ átmérőjét), előbb–utóbb (5)–nek minden $j$–re igaznak kell lenni. Ekkor mondjuk azt, hogy $A$ redukált. Ha $A$ redukált, akkor $2 \leq r \leq q$, hiszen $\text{lnko}(a_1 - a_1, q) = q$. Ha $r = q$, azaz $A$ modulo $q$ minden maradékosztályba belemetsz, akkor azt mondjuk, hogy $A$ *teljesen szétosztott modulo* $q$, röviden $A$ *telosz* mod $q$.

**1.3. Állítás.** *Ha A (4) szerkezetű mod q, akkor*

$$|A + q \cdot A| \geq (r + 1)|A| - r.$$

**Bizonyítás.** Nyilván minden $k \neq j$–re

$$|A_j + q \cdot A| \geq |A_j + q \cdot A_j| + \left|(A_j + q \cdot A_k) \setminus (A_j + q \cdot A_j)\right|,$$

és vegyük észre, hogy (eltolva $(q + 1)a_j$–val balra, majd leosztva $q$–val)

$$\begin{aligned}
&\left|(A_j + q \cdot A_k) \setminus (A_j + q \cdot A_j)\right| = \\
&\quad = \left|(a_j + q \cdot a_k + q \cdot B_j + q^2 \cdot B_k) \setminus (a_j + q \cdot a_j + q \cdot B_j + q^2 \cdot B_j)\right| = \\
&\quad\quad = \left|(a_k - a_j + B_j + q \cdot B_k) \setminus (B_j + q \cdot B_j)\right|.
\end{aligned}$$

Indirekt érveléshez tegyük fel, hogy ez utóbbi $< |A_k| = |B_k|$. Ekkor minden $b_0 \in B_j$–hez van $b' \in B_k$ úgy, hogy $a_k - a_j + b_0 + qb' \in B_j + q \cdot B_j$, azaz minden $b_0 \in B_j$–hez van $b_1 \in B_j$ úgy, hogy

$$a_k - a_j + b_0 \equiv b_1 \pmod{q}.$$

Megismételve az eljárást $b_1 \in B_j$–vel, és így tovább $n$–szer, azt kapjuk, hogy van olyan $b_n \in B_j$, hogy $n(a_k - a_j) + b_0 \equiv b_n \pmod{q}$. Sőt, megismételve az eljárást minden $k \neq j$–vel végül azt kapjuk, hogy minden $b_0 \in B_j$ és $n_m$ egészekhez van olyan $b \in B_j$, hogy $n_1(a_1 - a_j) + \cdots + n_r(a_r - a_j) + b_0 \equiv b \pmod{q}$. Ez viszont azt jelenti, hogy $B_j$ *telosz* mod $q$, hiszen feltettük, hogy (5) teljesül. □

**1.4. Állítás.** *Legyen* $q \geq 3$ *rögzített. Minden* $3(q+1) \leq m \leq (q+1)^2$ *és minden nem üres véges* $A$ *esetén*

$$|A + q \cdot A| \geq \frac{m}{q+1}|A| - q^2 2^{m-3(q+1)}. \tag{5}$$

**Bizonyítás.** A bizonyítás $m$ szerinti teljes indukcióval történik. $m = 3(q+1)$ estén következik a 2. Állításból. Tegyük fel, hogy az 5.Állítás igaz $3(q+1) \leq m < (q+1)^2$ esetén, és mutassuk meg, hogy akkor igaz $m+1$–re is. A rövidebb írásmód érdekében jelöljük

$$c_m = q^2 2^{m-3(q+1)}.$$

Legyen $A$ egy tetszőleges nem üres, véges, egész számokból álló halmaz. Feltehetjük, hogy $A$ (4) szerkezetű és redukált, azaz teljesíti (5)–öt. 1. Állítás és az indukciós feltevés miatt minden $1 \leq k \leq r$–re

$$|A + q \cdot A| \geq |A_k + q \cdot A| + |(A \setminus A_k) + q \cdot (A \setminus A_k)| \geq$$
$$\geq |A_k| + |A| - 1 + \frac{m}{q+1}|A \setminus A_k| - c_m \geq \frac{m+1}{q+1}|A| - c_{m+1},$$

amennyiben

$$|A_k| + |A| - \frac{m}{q+1}|A_k| \geq \frac{1}{q+1}|A|,$$

ami biztosan teljesül, ha

$$|A_k| \leq \frac{1}{q+1}|A|.$$

Maradnak azok az esetek, amikor minden $A_k$ nagy, azaz

$$\min |A_k| > \frac{1}{q+1}|A|. \tag{9}$$

Ha van olyan $j$, hogy $B_j$ nem *telosz* modulo $q$, akkor a 4. Állítás, (9) és az indukciós feltevés miatt

$$|A + q \cdot A| \geq |A_j + q \cdot A_j| + \min_{k \neq j} |A_k| + |(A \setminus A_j) + q \cdot (A \setminus A_j)| \geq$$
$$\geq \frac{m}{q+1}|A_j| - c_m + \frac{1}{q+1}|A| + \frac{m}{q+1}|A \setminus A_j| - c_m = \frac{m+1}{q+1}|A| - c_{m+1}.$$

Végül, ha minden $B_j$ *telosz* mod $q$, akkor a 3. Állítás szerint

$$|A + q \cdot A| \geq \sum_{j=1}^{r} |A_j + q \cdot A_j| = \sum_{j=1}^{r} |B_j + q \cdot B_j| \geq$$
$$\geq \sum_{j=1}^{r} ((q+1)|A_j| - q) = (q+1)|A| - rq \geq \frac{m+1}{q+1}|A| - c_{m+1}.$$

□

Megjegyezzük, hogy ez az utolsó becslés az, ahol lényeges, hogy $m + 1 \leq (q+1)^2$, azaz, ez akadályoz meg minket abban, hogy $(q+1)|A| - C_q$–nál jobb alsó becslést adjunk, ami természetesen nem is lenne igaz. □

*A feladatot lényegében jól oldotta meg Bodor Bertalan. Nagy János részeredményeket ért el.*

**2. feladat (Pink István).** *Mutassuk meg, hogy létezik olyan $k_0$ konstans, hogy az*

$$a^{2n} + b^{4n} + 2013 = ka^n b^{2n} \tag{1}$$

*egyenletnek $k \geq k_0$ esetén nincs pozitív egész $a, b, n$ megoldása.*

**Megoldás. (Ta The Anh)** Az $a^n = x$, $b^{2n} = y$ helyettesítéssel az (1) egyenletből az

$$x^2 + y^2 + 2013 = kxy \tag{2}$$

diophantoszi egyenletet kapjuk. Először megmutatjuk a következőt:

**2.1. Állítás.** *Ha a (2) egyenletnek van $x, y$ pozitív egész megoldása, akkor $k \leq 2 \cdot 2013^2 + 2013$.*

**Bizonyítás.** Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $0 < x \leq y$. A (2) egyenletet átrendezve azt nyerjük, hogy

$$(kx - y)y = x^2 + 2013,$$

amiből, egyrészt adódik, hogy

$$kx - y > 0,$$

másrészt $0 < x \leq y$ miatt azt kapjuk, hogy $(kx - y)y = x^2 + 2013 \leq xy + 2013$. Ezért nyilván

$$kx - y \leq x + \frac{2013}{y}.$$

is teljesül.

<u>*1. eset*</u> Ha $y > 2013$, akkor

$$kx - y \leq x + \frac{2013}{y} < x + 1,$$

és ezért

$$0 < kx - y \leq x \leq y.$$

Vegyük észre, hogy ha $(x, y)$ megoldása (2)-nek, akkor $(kx - y, x)$ is az.

Ebből az adódik, hogy

(a) vagy $kx - y = x$

(b) vagy $\min(x, y)$ csökken, ha $y > 2013$.

Az (a) esetben nyilván

$$xy = x^2 + 2013,$$

teljesül, és így

$$\frac{y}{x} = 1 + \frac{2013}{x^2},$$

is fennáll. Ezért

$$k = \frac{x + y}{x} = 1 + \frac{y}{x} = 1 + 1 + \frac{2013}{x^2} \leq 2015 < 2 \cdot 2013^2 + 2013.$$

A (b) esetben, azaz, ha $y > 2013$ esetén a $\min(x, y)$ csökkent, akkor folytatjuk a fent leírt $(x, y) \mapsto (kx - y, x)$ lépést addig, amíg $y \leq 2013$ vagy $kx - y = x$ teljesül.

<u>*2. eset*</u> Most tegyük fel, hogy $y \leq 2013$. Ekkor $0 < 1 \leq x \leq y \leq 2013$, így

$$k = \frac{x^2 + y^2 + 2013}{xy} \leq \frac{2013^2 + 2013^2 + 2013}{1 \cdot 1}$$

teljesül.

Tehát mindkét esetben fennáll, hogy $k \leq 2\cdot 2013^2+2013$. Válasszuk a $k_0$ konstanst $2\cdot 2013^2+2013+1$-nek. A 2.1. Állítás miatt, ha $k \geq k_0$, akkor a (2) egyenletnek nincsen pozitív egész $x, y$ megoldása. Így az eredeti (1) egyenletnek sincsen pozitív egész megoldása. Ellenkező esetben ugyanis $x = a^n$, $y = b^{2n}$ a (2) egyenlet pozitív egész megoldását szolgáltatná. □

*A feladatra Kiss Melinda, Mészáros András, Nagy János és Ta The Anh adtak helyes megoldást. Csizmadia Gábor Béla és Ágoston Tamás megoldása hiányos.*

**3. feladat (Pálfy Péter Pál).** *Melyek azok az $n$ számok, melyekre az $A_n$ alternáló csoportban van olyan permutáció, amelyet $A_n$-nek pontosan egy 2-Sylow részcsoportja tartalmaz?*

**Megoldás. (Pálfy Péter Pál)** Ha $n \leq 4$, akkor $A_n$-nek egyetlen 2-Sylow részcsoportja van. Az $n = 5$ esetben bármely két 2-Sylow részcsoport metszete csak az egységelemet tartalmazza. A továbbiakban feltesszük, hogy $n \geq 6$. Legyen $n$ felírása 2-hatványok összegeként

$$n = 2^{m_1} + \cdots + 2^{m_k}, \qquad m_1 < \cdots < m_k. \tag{1}$$

Először az $S_n$ szimmetrikus csoport 2-Sylow részcsoportját vizsgáljuk. Világos/jól ismert, hogy ez előáll az $S_{2^{m_i}}$ csoportok 2-Sylow részcsoportjainak direkt szorzataként, továbbá $S_{2^m}$ 2-Sylow részcsoportja nem más, mint az $m$ mélységű gyökeres bináris fa automorfizmuscsoportjának hatása a fa levelein. (A fa csúcsa a legfeljebb $m$ hosszúságú $0-1$ sorozatok, a 0 hosszúságú (üres) sorozat a fa gyökere, az $m$ hosszúságúak a levelek, és minden $j$ hosszúságú ($j = 0, \ldots, m-1$) sorozatot összekötünk azzal a két $j$ hosszúságúval, amelyeket az adott sorozat végére írt 0-val és 1-gyel kapunk.)

**3.1. Állítás.** *Ha $n \geq 6$, akkor $A_n$ minden 2-Sylow részcsoportját $S_n$-nek pontosan egy 2-Sylow részcsoportja tartalmazza.*

**Bizonyítás.** Ha adott az $A_n$-ben egy 2-Sylow részcsoport, akkor azt Sylow tételei következtében tartalmazza legalább egy $P$ 2-Sylow részcsoportja $S_n$-nek. Azt kell belátnunk, hogy $P \cap A_n$ egyértelműen meghatározza $P$-t. Ha az (1) felbontásban legalább két 1-nél nagyobb tag van, akkor $P \cap A_n$ és $P$ orbitjai, valamint az orbitokon való hatásuk megegyezik, így a fák $P \cap A_n$-t felhasználva egyértelműen rekonstruálhatóak. Ha $n = 2^m$ vagy $n = 2^m + 1$, akkor $m \geq 3$, és így csak a $P$-beli páros permutációk között is van olyan részcsoport, ami a fa egyik ágán minden pontot fixen hagy, a másik ág levelein viszont tranzitív, ennélfogva a fa ebben az esetben is egyértelműen rekonstruálható $P \cap A_n$-ből kiindulva.

**3.2. Állítás.** *Ha egy permutáció ciklusai különböző 2 hatvány hosszúságúak, akkor azt $S_n$-nek egyetlen 2-Sylow részcsoportja tartalmazza.*

**Bizonyítás.** A ciklusok csak az (1) szerintiek lehetnek. Egy $2^m$ hosszúságú ciklus egyetlen $m$ mélységű gyökeres bináris fának automorfizmusa.

**3.3. Állítás.** *Ha egy permutációnak két fixpontja van és az egynél hosszabb ciklusai különböző 2 hatvány hosszúságúak, akkor azt $S_n$-nek egyetlen 2-Sylow részcsoportja tartalmazza.*

**Bizonyítás.** A ciklushosszak ekkor a következők: $1, 1, 2, 4, \ldots, 2^{m_1-1}, 2^{m_2}, \ldots, 2^{m_k}$. Ebben az esetben a $2^{m_1}$ levelű fa is egyértelműen meghatározott, hiszen a két fixpont ugyanannak a pontnak a két leszármazottja kell legyen, a 4 levelet tartalmazó ág másik két pontját a 2-ciklus szolgáltatja stb. A ciklusok pedig az ágakon belül meghatározzák a fa struktúráját.

**3.4. Állítás.** *Ha egy permutáció minden ciklushossza 2-hatvány és van közöttük két egyenlő, ami 1-nél nagyobb, akkor ezt a permutációt $S_n$-nek egynél több 2-Sylow részcsoportja is tartalmazza.*

**Bizonyítás.** Abban az esetben, amikor $n = 2^m \geq 4$ és a permutáció két $2^{m-1}$ hosszúságú diszjunkt ciklus szorzata, akkor a következőképpen készíthetünk két különböző fát, aminek ez a permutáció automorfizmusa. Először a fa két fő ága álljon egy-egy ciklus pontjaiból. Másodszor viszont vegyünk egy olyan automorfizmust, ami $m-1$ mélységű pontokat egy teljes ciklusban permutálja, mindegyik $m-1$ mélységű pontnak tegyük az egyik leszármazottját az egyik, a másikat a másik ciklusba. Az általános eset ebből az esetből egyszerű indukciós érveléssel kapható.

A 3.1. Állításra tekintettel azt kell már csak megnéznünk, hogy a 3.2. és 3.3. Állításban szereplő permutációk között van-e $A_n$-beli, azaz, páros permutáció. Ha $n$ páratlan, akkor csak a 3.2. Állítás szerinti permutáció lehetséges, és ekkor $k$-nak, az $n$ kettes számrendszerbeli felírásában az 1-esek számának, páratlannak kell lenni. Ha $n$ páros, akkor a 3.2. Állításban szereplő permutáció akkor páros, ha $k$ páros. A 3.3. Állításban szereplő permutáció páros hosszúságú ciklusainak száma $(m_1-1)+(k-1)$, tehát páratlan $k$ esetén ez a permutáció akkor páros, ha $m_1$ páratlan. Tehát pontosan a következő esetek jók: (a) $n$ páratlan, $k$ páratlan; (b) $n$ páros, $k$ páros; (c) ($n$ páros), $k$ páratlan, $m_1$ páratlan; (d) $n \leq 5$. $\square$

*Hasonló gondolatmenetet követve oldotta meg a feladatot Ágoston Tamás, Bodor Bertalan és Mészáros Szabolcs. Részeredményeket ért el Nagy János.*

**4. feladat (Halasi Zoltán).** *Legyen $A$ egy $n$ elemű Abel-csoport. Igazoljuk, hogy létezik két, $S_n$-nel izomorf részcsoport* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$*-ben, melyek metszete izomorf $A$ automorfizmuscsoportjával.*

**Megoldás. (Mészáros András)** Tekintsük az $A$ véges $n$ elemű Abel-csoport lineáris karaktereit, ezek éppen az $A \to \mathbb{C}^*$ homomorfizmusok. Ezekből éppen $n$ darab van. Szükségünk lesz a következő lemmára:

**4.1. Lemma.** *Egy $\pi : A \to A$ permutáció akkor és csak akkor homomorfizmus, ha minden $\chi$ karakterére $A$-nak a $\chi \circ \pi$ leképezés is karaktere $A$-nak. (Ha $\pi$ homomorfizmus, akkor persze automorfizmus is automatikusan.)*

**Bizonyítás.** Egyik irány: Legyen $\pi$ egy homorfizmus, ekkor minden $\chi$ karakterre $\chi \circ \pi$ is egy $A \to \mathbb{C}^*$ homomorfizmus lesz, hiszen két homomorfizmus kompozíciója.

Másik irány: Be szeretnénk látni, hogy $\pi(g_1 + g_2) = \pi(g_1) + \pi(g_2)$ teljesül minden $g_1$ és $g_2$ elemére $A$-nak. Vegyünk egy tetszőleges $\chi : A \to \mathbb{C}^*$ karaktert. Felhasználva, hogy $\chi \circ \pi$ és $\chi$ homomorfizmusok: $\chi(\pi(g_1 + g_2)) = \chi(\pi(g_1)) \cdot \chi(\pi(g_2)) = \chi(\pi(g_1) + \pi(g_2))$, amiből azt kapjuk, hogy minden $\chi$ karakterre $\chi(\pi(g_1 + g_2) - \pi(g_1) - \pi(g_2)) = 1$. De $0 \in A$ az egyetlen eleme $A$-nak, mely az $A$ minden karakterének magjában benne van, amiből következik az állítás.

Legyenek az $A$ csoport elemei $g_1, g_2, \ldots, g_n$, karakterei $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$. Legyen $K$ egy $n \times n$-es mátrix, melynek elemei $k_{ij} = \chi_i(g_j)$. Ekkor a karakterek ortogonalitásából $KK^* = nI$. Azaz $U = \frac{1}{\sqrt{n}}K$ egy unitér mátrix.

Legyen $G_1$ az $n \times n$-es permutáció mátrixok csoportja, ez nyilván izomorf $S_n$-nel. Legyen $G_2 = U^{-1}G_1U$, azaz $G_2$ a $G_1$ csoport egy konjugáltja, így $G_2$ is izomorf $S_n$-nel. Azt szeretnénk belátni, hogy e két csoport metszete izomorf lesz $A$ automorfizmus csoportjával. Egy $P \in G_1$ permutáció mátrix pontosan akkor lesz benne $G_2$-ben is, ha létezik olyan $Q$ permutáció mátrix, amire $P = U^{-1}QU$, azaz ha $UPU^{-1}$ is egy permutáció mátrix.

Mivel rögzítettük az $A$ csoport elemeinek egy indexelését, egy $P$ permutáció mátrix meghatározza az $A$ elemeinek egy $\pi$ permutációját.

Tehát azt kell belátnuk, hogy egy $P$ permutáció mátrixra $UPU^{-1}$ pontosan akkor lesz permutáció mátrix, ha $\pi$ automorfizmus. Az $UP$ mátrix elemei $b_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}}\chi_i(\pi(g_j))$ lesznek. Továbbá $UP$ is egy unitér mátrix lesz. Két $U_1$ és $U_2$ unitér mátrixra $U_1U_2^*$ pontosan akkor lesz permutáció mátrix, ha $U_1$ megkapható $U_2$-ből úgy, hogy a sorait megpermutáljuk. (Hiszen $U_1U_2^* = Q$ pontosan akkor permutációmátrix, ha $U_1 = QU_2$ valamely $Q$ permutációmátrixra.) Vagyis $(UP)U^*$ pontosan akkor lesz permutáció mátrix, ha $UP$ sorai pontosan ugyanazok, mint $U$ sorai. Ez éppen azt jelenti, hogy $\chi \circ \pi$ egy karakter minden $\chi$ karakterre. Ez, mint azt már láttuk a korábbi Lemmában, pontosan akkor teljesül, ha $\pi$ egy automorfizmusa $A$-nak. □

*A feladatot Mészáros András és Nagy János oldották meg helyesen. Részeredményt ért el Bodor Bertalan.*

**5. feladat (Nagy Péter Tibor).** *A $\mathfrak{g}$ Lie-algebra $\mathfrak{h}$ részalgebráját egy $\mathfrak{g}$-n megadott $\langle .,. \rangle$ skalárszorzatra vonatkozóan $\gamma$-tulajdonságúnak mondjuk, ha $X \in \mathfrak{h}$-ból következik $\langle [X,Y], X \rangle = 0$ minden $Y \in \mathfrak{g}$ elemre. Igazoljuk, hogy egy két lépésben nilpotens Lie-algebrán megadott skalárszorzatra vonatkozóan $\gamma$-tulajdonságú részalgebrák dimenziójának maximuma nem függ a skalárszorzat megválasztásától*

**Megoldás. (Nagy Péter Tibor)** A $\mathfrak{g}$ Lie-algebra két lépésben nilpotens, azaz $\mathfrak{g}$ nemnulla kommutátorát tartalmazza a $\mathfrak{z}$ centruma. Legyen adott két különböző $\langle .,. \rangle$ és $\langle .,. \rangle'$ skalárszorzat $\mathfrak{g}$-n. Jelölje $\mathfrak{a}$, illetve $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{z}$ centrum ortogonális komplementerét $\langle .,. \rangle$-ra és $\langle .,. \rangle'$-ra vonatkozóan. Ekkor $\{0\} \neq [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = [\mathfrak{a},\mathfrak{a}] = [\mathfrak{a}',\mathfrak{a}'] \subset \mathfrak{z}$. Egy $\mathfrak{h}$ részalgebra $\langle .,. \rangle$-ra vonatkozóan $\gamma$-tulajdonságú, ha $\mathfrak{h}$ minden $A + Z \in \mathfrak{h}$ alakban megadott elemére, ahol $A \in \mathfrak{a}$, $Z \in \mathfrak{z}$, az $\langle [A,\mathfrak{a}], Z \rangle = \{0\}$ egyenlőség teljesül. A $\gamma$-tulajdonság $\langle .,. \rangle'$-ra vonatkozóan analóg módon fogalmazható meg. Megmutatjuk, ha a $\mathfrak{h}$ részalgebra $\langle .,. \rangle$-ra vonatkozóan $\gamma$-tulajdonságú, akkor található egy vele izomorf $\langle .,. \rangle'$-ra vonatkozóan $\gamma$-tulajdonságú $\mathfrak{h}'$ részalgebra.

Legyen $T : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ olyan szimmetrikus invertálható lineáris leképezés, amelyre minden $X, Y \in \mathfrak{g}$ esetén fennáll $\langle X,Y \rangle' = \langle TX, Y \rangle$. Jelölje $\pi_{\mathfrak{z}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{z}$ a $\mathfrak{z}$-re való merőleges vetítést a $\langle .,. \rangle$ skalárszorzatra vonatkozóan. Legyenek $\langle .,. \rangle_{(\mathfrak{z})}$, illetve $\langle .,. \rangle'_{(\mathfrak{z})}$ a $\mathfrak{z}$ altéren indukált skalárszorzatok. Az $S = \pi_{\mathfrak{z}} \circ T|_{\mathfrak{z}} : \mathfrak{z} \to \mathfrak{z}$ szimmetrikus lináris leképezésre teljesül $\langle U, V \rangle'_{(\mathfrak{z})} = \langle SU, V \rangle_{(\mathfrak{z})}$ minden $U, V \in \mathfrak{z}$ esetén, ezért $S = \pi_{\mathfrak{z}} \circ T|_{\mathfrak{z}} : \mathfrak{z} \to \mathfrak{z}$ invertálható. Legyen $R = \pi_{\mathfrak{z}} \circ T|_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{a} \to \mathfrak{z}$.

Definiáljuk a $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ leképezést a $\Phi(A + U) = A + S^{-1}(U - R(A))$ összefüggéssel, ahol $A \in \mathfrak{a}$, $U \in \mathfrak{z}$. A $\Phi$ leképezés $A + U$-nak csak a centrális komponensét változtatja meg és létezik a $\Phi^{-1}(A + U) = A + S(U) + R(A)$ inverze, ezért $\Phi$ automorfizmusa $\mathfrak{g}$-nek. A $\mathfrak{z}$ centrum ortogonális komplementuma $\langle .,. \rangle'$-re vonatkozóan $\mathfrak{a}' = \{A - S^{-1}R(A);\ A \in \mathfrak{a}\}$ alakú, mivel

$$\langle A - S^{-1}R(A), Z \rangle' = \langle T(A - S^{-1}R(A)), Z \rangle = \langle \pi_{\mathfrak{z}} T(A - S^{-1}R(A)), Z \rangle = \langle R(A) - SS^{-1}R(A), Z \rangle = 0$$

teljesül tetszőleges $Z \in \mathfrak{z}$ esetén. Az $\langle [A,\mathfrak{a}], Z \rangle' = \{0\}$ reláció az $A \in \mathfrak{a}$, $U \in \mathfrak{z}$ vektorokra akkor és csak akkor teljesül, ha igaz $\langle [A,\mathfrak{a}], Z \rangle = \{0\}$, mert tetszőleges $X - S^{-1}R(X) \in \mathfrak{a}'$, $X \in \mathfrak{a}$, $Z \in \mathfrak{z}$ vektorokra érvényes

$$\begin{aligned}\langle [A - S^{-1}R(A), X - S^{-1}R(X)], S^{-1}(Z) \rangle' &= \langle S^{-1}(Z), [A - S^{-1}R(A), X - S^{-1}R(X)] \rangle'_{(\mathfrak{z})} \\ &= \langle Z, [A, X] \rangle_{(\mathfrak{z})}.\end{aligned}$$

Ezért $\mathfrak{h}$ a $\langle .,. \rangle$-ra vonatkozóan $\gamma$-tulajdonságú akkor és csak akkor, ha a $\Phi$ Lie-algebra automorfizmussal vett $\Phi(\mathfrak{h})$ képe a $\langle .,. \rangle'$-ra vonatkozóan $\gamma$-tulajdonságú. Ebből következik a feladat állítása. □

*Nagy János részeredményeket ért el a feladat megoldásában, gondolatmenete jó, de hiányos. Megoldása tartalmaz egy kiegészítést, amiben a végtelen dimenziós esetben a feladat állítását cáfoló konstrukció gondolatmenetét vázolja.*

**6. feladat (Molnár Lajos).** *Legyen $\mathcal{A}$ egy egységelemes $C^*$-algebra, és jelölje $\mathcal{A}_+$ az $\mathcal{A}$ pozitív elemeinek a kúpját (ez azon $\mathcal{A}$-beli önadjungált elemek halmaza, melyek spektruma benne van a $[0,+\infty[$ halmazban). Tekintsük $\mathcal{A}_+$-on az alábbi $\circ$ műveletet:*

$$x \circ y = \sqrt{x}y\sqrt{x} \quad (x, y \in \mathcal{A}_+). \tag{3}$$

*Igazoljuk, hogy ha minden $x, y \in \mathcal{A}_+$ esetén*

$$(x \circ y) \circ y = x \circ (y \circ y), \tag{4}$$

*akkor $\mathcal{A}$ kommutatív.*

**Megoldás. (Ta The Anh megoldása alapján)** Jelölje $\mathcal{A}_+^{-1}$ az $\mathcal{A}$ pozitív invertálható elemeinek a halmazát. Ha $x \in \mathcal{A}$ tetszőleges, akkor előáll $x = h + ik$ alakban, ahol $h, k \in \mathcal{A}$ önadjungált. Továbbá minden önadjungált elem előállítható két $\mathcal{A}_+^{-1}$-beli elem különbségeként. Mindezek alapján elegendő belátni, hogy a szorzás $\mathcal{A}_+^{-1}$-re való leszűkítése kommutatív.

Először azt látjuk be, hogy a $\circ$ művelet kommutatív az $\mathcal{A}_+^{-1}$ halmazon. Legyen $x, y \in \mathcal{A}_+^{-1}$. Ekkor $x \circ y = \sqrt{x}y\sqrt{x}$, $y \circ y = \sqrt{y}y\sqrt{y} = y^2$, így (4)-ből az következik, hogy

$$(x \circ y) \circ y = \sqrt{\sqrt{x}y\sqrt{x}}\,y\sqrt{\sqrt{x}y\sqrt{x}} = x \circ (y \circ y) = \sqrt{x}y^2\sqrt{x}. \tag{5}$$

(5)-ban írjunk $x$ helyére $x^{-1}$-et és $y$ helyére $\sqrt{x}y\sqrt{x}$-et:

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{x^{-1}}\left(\sqrt{x}y\sqrt{x}\right)\sqrt{x^{-1}}}\left(\sqrt{x}y\sqrt{x}\right)\sqrt{\sqrt{x^{-1}}\left(\sqrt{x}y\sqrt{x}\right)\sqrt{x^{-1}}} &= \\ = \sqrt{x^{-1}}\left(\sqrt{x}y\sqrt{x}\right)^2\sqrt{x^{-1}}&,\end{aligned}$$

tehát

$$\sqrt{y}\sqrt{x}y\sqrt{x}\sqrt{y} = yxy. \tag{6}$$

Mindkét oldalról $\sqrt{y^{-1}}$-gyel szorozva azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{x}y\sqrt{x} = \sqrt{y}x\sqrt{y},$$

vagyis

$$x \circ y = y \circ x$$

tetszőleges $x, y \in \mathcal{A}_+^{-1}$ esetén.

Most rátérünk a szorzás kommutativitásának igazolására. Ehhez tekintsük az

$$(1 + tx)^2 \circ y = y \circ (1 + tx)^2 \quad \left(t \in \mathbb{R}, t \geq 0; x, y \in \mathcal{A}_+^{-1}\right)$$

azonosságot. Ebből

$$y + t(xy + yx) + t^2xyx = y + 2t\sqrt{y}x\sqrt{y} + t^2\sqrt{y}x^2\sqrt{y}.$$

A két oldal csak úgy lehet egyenlő minden nemnegatív $t$-re, ha

$$xy + yx = 2\sqrt{y}x\sqrt{y}. \tag{7}$$

Ha (6)-ben $x$ helyére $x^2$-et írunk, akkor

$$yx^2y = \sqrt{y}\sqrt{x^2}y\sqrt{x^2}\sqrt{y} = \sqrt{y}xyx\sqrt{y} = (\sqrt{y}x\sqrt{y})^2,$$

így

$$(xy)^2 + (yx)^2 + xy^2x + yx^2y = (xy + yx)^2 \overset{(7)}{=} 4\left(\sqrt{y}x\sqrt{y}\right)^2 = 4yx^2y =$$
$$= 2yx^2y + 2y^2 \circ x^2 = 2yx^2y + 2x^2 \circ y^2 = 2yx^2y + 2xy^2x.$$

Egy oldalra rendezve azt kapjuk, hogy

$$(xy)^2 + (yx)^2 - xy^2x - yx^2y = (xy - yx)^2 = 0.$$

Mivel $(xy - yx)^* = -(xy - yx)$, így ebből $(xy - yx)^*(xy - yx) = 0$, és

$$\|xy - yx\|^2 = \|(xy - yx)^*(xy - yx)\| = 0,$$

tehát $xy = yx$ minden $x, y \in \mathcal{A}_+^{-1}$ esetén. □

*A feladatra egyedül Ta The Anh adott be helyes megoldást. Az ő megoldásának az a szépsége, hogy nagyrészt elemi algebrai úton igazolta az állítást. A kitűző eredeti megoldása rövidebb, de jóval haladottabb eszközöket használ.*

**7. feladat (Boros Zoltán).** *Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény (azaz, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x + y) = f(x) + f(y)$ teljesül), amelyre az*

$$x \longmapsto f(x)f\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$$

*leképezés korlátos a $]0, 1[$ intervallum valamely nem üres nyílt részintervallumán. Igazoljuk, hogy $f$ folytonos!*

**Megoldás. (Kutas Péter megoldása alapján a kitűző módosításaival)** Először röviden összefoglaljuk az additív függvényekkel kapcsolatos szükséges előismereteket. Viszonylag egyszerűen igazolható, hogy minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvényre tetszőleges $x$ valós és $r$ racionális szám esetén $f(rx) = rf(x)$ teljesül (a levezetés több lépésben történik, pozitív egész $r$ esetén teljes indukcióval, majd ezt kihasználva $x$ helyett $x/r$ helyettesítésével kapjuk ilyenek reciprokaira, illetve az additivitásból egyszerűen adódik $f$ páratlan volta stb.). Tehát valójában minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény lineáris a racionális számok $\mathbb{Q}$ teste felett. Ha $f$ a valós számtest felett is lineáris, akkor $f(x) = cx$ ($x \in \mathbb{R}$) alakú, ahol $c = f(1)$. Ha $f$ nem ilyen alakú, akkor van olyan $t$ valós szám, amelyre $f(t) \neq tf(1)$, tehát az $(1, f(1))$ és $(t, f(t))$ vektorok $\mathbb{R}$ felett lineárisan függetlenek, így az $\mathbb{R}^2$ tér egy bázisát alkotják a valós számtest felett. Kihasználva $f$ linearitását $\mathbb{Q}$ felett valamint azt, hogy $\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{R}$-ben, kapjuk, hogy tetszőleges $\mathbb{R}^2$-beli pont előáll az $(1, f(1))$ és $(t, f(t))$ vektorok racionális lineáris kombinációinak (azaz $f$ gráfja pontjainak) határértékeként. Tehát $f$ gráfja sűrű a síkban. Ennek következménye, hogy ha egy additív függvény felülről korlátos egy nem üres nyílt intervallumon, akkor szükségképpen lineáris (tehát folytonos).

Jelölje $I$ azt a nyílt intervallumot, amelyen a feladat feltevése szerint az

$$x \longmapsto f(x)f(\sqrt{1 - x^2})$$

leképezés korlátos. Legyen $J$ nem üres nyílt intervallum az $I$ belsejében (tehát feltesszük, hogy $J$ lezártja is része $I$-nek). Ekkor az origó középpontú egységkör

$$H = \left\{\left(x,\ \sqrt{1 - x^2}\right) \mid x \in I\right\}$$

íve tartalmazza a

$$K = \left\{\left(x,\ \sqrt{1 - x^2}\right) \mid x \in J\right\}$$

ív minden olyan $\phi(K)$ elforgatottját, amelyre a $\phi$ forgatás elegendően közel van az identitáshoz.

Ha $f$ felülről korlátos a $J$ intervallumon, akkor a fentiek szerint folytonos. A továbbiakban (indirekt módon) feltehetjük, hogy ez nem teljesül, tehát minden $n$ pozitív egészhez létezik $x_n \in J$ úgy, hogy $f(x_n) > n$. Minden $n$ pozitív egész esetén legyen $y_n = \sqrt{1-x_n^2}$, valamint

$$\alpha_n = \frac{n^2-1}{n^2+1} \quad \text{és} \quad \beta_n = \frac{2n}{n^2+1}.$$

Ekkor $(x_n, y_n) \in K$, $\alpha_n$, $\beta_n \in [0,1]$, $\alpha_n^2 + \beta_n^2 = 1$, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0,$$

Ezért az

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ -\beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

mátrix felhasználásával definiált

$$\phi_n(x,y) = A_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

forgatás tetszőlegesen közel kerül az identitáshoz ha $n$ elegendően nagy. Tehát van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_0$ természetes számra $\phi_n(K) \subset H$, ezért az

$$\Big(f(\alpha_n x_n + \beta_n y_n) f(-\beta_n x_n + \alpha_n y_n)\Big)$$

sorozat a feltevés szerint korlátos. Viszont

$$f(\alpha_n x_n + \beta_n y_n) f(-\beta_n x_n + \alpha_n y_n) = -\alpha_n\beta_n (f(x_n))^2 + \left(\alpha_n^2 - \beta_n^2\right) f(x_n) f(y_n) + \alpha_n\beta_n (f(y_n))^2.$$

A feltevés szerint $(f(x_n)f(y_n))$ korlátos, továbbá $f(x_n) > n$ miatt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 0.$$

Tehát a fenti összeg utolsó tagja nullsorozat, középső tagja korlátos, az első tagjának ellentettjére pedig

$$\alpha_n\beta_n (f(x_n))^2 \geq \frac{n^2-1}{n^2+1} \cdot \frac{2n}{n^2+1} \cdot n^2 > \frac{n}{2}$$

teljesül (ha $n \geq 2$), tehát az első tag — és vele együtt az összeg — tart $(-\infty)$-hez, ellentétben a vele egyenlő (bal oldali) szorzat korlátosságával. Eszerint az indirekt feltevés hamis.

**7.1. Megjegyzés.** *Könnyen ellenőrizhető, hogy ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy (nem azonosan nulla) deriváció, akkor minden $x \in ]0,1[$ esetén $f(x) f(\sqrt{1-x^2}) \leq 0$ teljesül, tehát a feladat szövegében ezen szorzat lokális korlátossága nem gyengíthető úgy, hogy lokálisan felülről korlátos.*

□

*A feladatra Kutas Péter és Nagy János adtak teljes megoldást.*

**8. feladat (Daróczy Zoltán).** *Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos és szigorúan monoton függvény, amelyre*

$$f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)(f(x)+f(y)) = (x+y) f\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{$*$}$$

*teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$-re ($f^{-1}$ az $f$ inverzét jelöli). Bizonyítsuk be, hogy ekkor léteznek olyan $a \neq 0$ és $b$ valós konstansok, amelyekkel $f(x) = ax + b$ minden $x \in \mathbb{R}$-re.*

**Megoldás. (Ágoston Tamás megoldása alapján)** Egyszerű számolás mutatja, hogy ha $f$ teljesíti a $(*)$ egyenlőséget, akkor az $x \longmapsto f(-x)$ és $x \longmapsto -f(x)$ függvények is teljesítik, így az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $f$ (és így szükségképpen $f^{-1}$ is) szigorúan monoton növekvő, és $f(0) \geq 0$. Ekkor minden $x > 0$-ra $f(x) > 0$.

Be fogjuk látni, hogy $f$ Jensen-affin a $[0, \infty[$ intervallumon, azaz minden $0 \leq x < y$-ra

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

teljesül. Először tegyük fel indirekt módon, hogy valamely $0 \leq x < y$-ra $f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Ekkor

$$f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)(f(x)+f(y)) > f^{-1}\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)(f(x)+f(y)) =$$
$$= (x+y)\frac{f(x)+f(y)}{2} > (x+y)f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Itt mindkét helyen szigorú egyenlőtlenség áll, mert $y > x \geq 0$ miatt $x + y > 2x \geq 0$, és $f(x) + f(y) > 2f(x) \geq 0$. Ez viszont ellentmond $(*)$-nak. Hasonlóképpen, ha valamely $0 \leq x < y$-ra $f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x)+f(y)}{2}$ lenne, akkor

$$f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)(f(x)+f(y)) < f^{-1}\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)(f(x)+f(y)) =$$
$$= (x+y)\frac{f(x)+f(y)}{2} < (x+y)f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

állna fenn, ami szintén ellentmondana $(*)$-nak. Ezzel tehát beláttuk, hogy $f$ Jensen-affin $[0, \infty[$ fölött, amiből, a folytonossággal együtt, jól ismert módon következik, hogy $f$ affin a $[0, \infty[$ intervallumon, vagyis vannak olyan $a > 0$ és $b \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy $f(x) = ax + b$ minden $x \geq 0$ esetén.

Végül belátjuk, hogy $f$ az egész $\mathbb{R}$-en affin. Helyettesítsünk a $(*)$ egyenlőségbe $y = -x$-et:

$$f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right)(f(x)+f(-x)) = (x+(-x))f(0) = 0.$$

Ebből következik, hogy minden $x \in \mathbb{R}$-re vagy $f(x) + f(-x) = 0$, vagy $f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right) = 0$, azaz $f(x) + f(-x) = 2f(0)$. Mivel $f$ folytonos, így az $x \longmapsto f(x) + f(-x)$ függvény is az, vagyis ha $f(x) + f(-x)$ legfeljebb két lehetséges értéket vehet fel, akkor valójában konstans. Ha $x = 0$-t helyettesítünk, akkor $f(0) + f(0) = 2f(0)$, így minden $x \in \mathbb{R}$-re $f(x) + f(-x) = 2f(0) = 2b$. Így végül minden $x \leq 0$-ra is $f(x) = 2b - f(-x) = 2b - (a(-x) + b) = ax + b$ teljesül. □

*A feladatra Ágoston Tamás, Bodor Bertalan, Mészáros Szabolcs, Nagy Donát, Nagy János és Ta The Anh adtak teljes megoldást. Mészáros András egy kissé gyengébb állítást bizonyított be, Weisz Ágoston megoldása pedig hiányos.*

**9. feladat (Maksa Gyula és Páles Zsolt).** *Bizonyítsuk be, hogy van olyan sehol sem folytonos* $f\colon ]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ *függvény, amelyre minden* $x, y \in ]0, +\infty[$ *és minden pozitív racionális* $\alpha$ *szám esetén fennáll, hogy*

$$f\left(\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \leq \left(\frac{f(x)^\alpha + f(y)^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{8}$$

*Van-e olyan sehol sem folytonos* $f\colon ]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ *függvény, amely eleget tesz a fenti egyenlőtlenségnek minden* $x, y \in ]0, +\infty[$ *és minden pozitív irracionális* $\alpha$ *esetén?*

**Megoldás.** **(Maksa Gyula és Páles Zsolt)** Jelölje $\mathbb{R}$ a valós, $\mathbb{Q}$ pedig a racionális számok halmazát.

Először azt mutatjuk meg hogy létezik olyan nem Lebesgue mérhető $f$ függvény, amelyre (8) minden pozitív racionális $\alpha$ esetén fennáll. Legyen $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy nem azonosan zéró deriváció, azaz egy olyan nem azonosan zéró függvény, amelyre egyidejűleg teljesül, hogy

$$d(x+y) = d(x) + d(y) \qquad \text{és} \qquad d(xy) = xd(y) + yd(x) \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Ilyen $d$ függvény létezése ismert, továbbá az is ismert, hogy egy ilyen függvény nem lehet Lebesgue mérhető, de a definíciójából következik, hogy

$$d(x^r) = rx^{r-1}d(x) \qquad (x \in ]0, +\infty[, 0 < r \in \mathbb{Q}).$$

(Lásd például [1]-et.) Definiáljuk ezek után az $f : ]0, +\infty[ \to ]0, +\infty[$ függvényt az

$$f(x) = x \exp(x^{-1}d(x)) \qquad (x \in ]0, +\infty[)$$

képlettel. Világos, hogy $f$ nem Lebesgue mérhető. Az alábbiakban igazoljuk, hogy

$$f\left(M_\alpha(x,y)\right) \leq M_\alpha\left(f(x), f(y)\right)$$

mégis teljesül, ahol

$$M_\alpha(x,y) = \left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (x, y, \alpha \in ]0, +\infty[, \alpha \in \mathbb{Q}).$$

Valóban, - felhasználva a $d$ deriváció fenti tulajdonságait - kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} d\left(M_\alpha(x,y)\right) &= d\left(\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{1}{2} d(x^\alpha + y^\alpha) \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{M_\alpha(x,y)\alpha(x^{\alpha-1}d(x) + y^{\alpha-1}d(y))}{x^\alpha + y^\alpha}. \end{aligned}$$

Így

$$\frac{d\left(M_\alpha(x,y)\right)}{M_\alpha(x,y)} = \frac{x^{\alpha-1}d(x) + y^{\alpha-1}d(y)}{x^\alpha + y^\alpha} = \frac{x^\alpha}{x^\alpha + y^\alpha}\frac{d(x)}{x} + \frac{y^\alpha}{x^\alpha + y^\alpha}\frac{d(y)}{y}$$

adódik, ahonnan – $f$ definícióját figyelembe véve –

$$f\left(M_\alpha(x,y)\right) = M_\alpha(x,y)(x^{-1}f(x))^{\frac{x^\alpha}{x^\alpha+y^\alpha}}(y^{-1}f(y))^{\frac{y^\alpha}{x^\alpha+y^\alpha}}$$

következik. Felhasználva itt a súlyozott mértani és számtani közép közötti egyenlőtlenség

$$u^\lambda v^{1-\lambda} \leq (\lambda u^\alpha + (1-\lambda)v^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (u, v, \alpha \in ]0, +\infty[, \lambda \in [0, 1])$$

következményét, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f\left(M_\alpha(x,y)\right) &\leq M_\alpha(x,y)\left(\frac{x^\alpha}{x^\alpha + y^\alpha}\frac{f(x)^\alpha}{x^\alpha} + \frac{y^\alpha}{x^\alpha + y^\alpha}\frac{f(y)^\alpha}{y^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \left(\frac{f(x)^\alpha + f(y)^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = M_\alpha\left(f(x), f(y)\right). \end{aligned}$$

A megoldás második felében megmutatjuk, hogy ha (8) minden pozitív irracionális $\alpha$ esetén fennáll, akkor folytonos (tehát nem lehet nem mérhető). A hatványközepek középérték tulajdonsága miatt

$$f\left(\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \leq \left(\frac{f(x)^\alpha + f(y)^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \max(f(x), f(y)), \tag{9}$$

ha $\alpha$ pozitív irracionális szám. A hatványközepek összehasonlítási tétele miatt, $x \neq y$ esetén a

$$\alpha \longmapsto \left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (\alpha > 0)$$

függvény szigorúan monoton növő és folytonos, és így értékkészlete a $]\sqrt{xy}, \max(x, y)[$ nyílt intervallum. Ezzel a leképezéssel a pozitív irracionális számok halmazának képe $]\sqrt{xy}, \max(x, y)[\setminus C(x, y)$ alakú, ahol $C(x, y)$ egy megszámlálható halmaz. Tehát (9) szerint $f$ korlátos a

$$]\sqrt{xy}, \max(x, y)[\setminus C(x, y)$$

halmazon, ami pozitív Lebesgue-mértékű. Másrészt, egy rögzített $\alpha$ irracionális szám esetén (8) szerint az $f_\alpha(x) := (f(x^{1/\alpha}))^\alpha$ képlettel definiált $f_\alpha$ függvény Jensen-konvex és emellett korlátos a $]\sqrt{xy}^\alpha, \max(x, y)^\alpha[\setminus C(x, y)^\alpha$ halmazon, ami szintén pozitív mértékű. Ezért a Bernstein–Doetsch-tétel Sierpiński-féle általánosítása szerint (ld. [1]) $f_\alpha$ konvex, tehát folytonos. Így $f$ is folytonos kell legyen.

**Hivatkozás.** [1] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, vol. 489, Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985. □

*Mészáros Szabolcs jól oldotta meg a feladat második részét és a megoldása az első résszel kapcsolatban is tartalmazott jó gondolatmenetet. Nagy János helyesen oldotta meg a feladat második részét.*

**10. feladat (Tamássy Lajos és Kertész Dávid).** *Legyen adva az $\mathbb{R}^n$ valós vektortéren egy Riemann-metrika, amelyre nézve bármely két $a$ és $b$ pont között egyetlen $g(a, b)$ távolságminimalizáló geodetikus szakasz létezik. Tegyük fel, hogy minden $a \in \mathbb{R}^n$ esetén a tőle vett Riemann-távolságot mérő $\varrho_a \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény konvex, és differenciálható az $a$-n kívül. Mutassuk meg, hogy ha egy $x \neq a, b$ pontra*

$$\partial_i \varrho_a(x) = -\partial_i \varrho_b(x), \quad i = 1, \dots, n$$

*teljesül, akkor $x$ a $g(a, b)$ egy pontja, és fordítva.*

**Megoldás. (Mészáros Szabolcs megoldása alapján, kis kiegészítéssel)** Legyenek $a, b \in \mathbb{R}^n$ rögzített pontok, $d := d(a, b)$, és jelölje $\gamma\colon [0, d] \to \mathbb{R}^n$ a $g(a, b)$ geodetikus ívhossz szerinti paraméterezését. Átfogalmazva a feladatot, azt kell megmutatni, hogy a $\varrho_a + \varrho_b \colon \mathbb{R}^n \setminus \{a, b\} \to \mathbb{R}$ függvény gradiense pontosan azokban az $x$ pontokban tűnik el, amelyek elemei a $\gamma$ geodetikus képhalmazának. Vizsgáljuk meg tehát az $f := \varrho_a + \varrho_b$ függvényt:

Egyrészt $f(a) = f(b) = d$, másrészt bármely $x \in \mathbb{R}^n$-re $f \geq d$, hiszen $f(x) = d(a, x) + d(b, x) < d(a, b)$ ellentmondana a háromszög-egyenlőtlenségnek. Emellett $f$ konvex, mivel konvex függvények összege. Ebből már következik az állítás könnyebbik iránya: ha $x = \gamma(t)$ valamely $t$-re (és $a \neq x \neq b$), akkor $\varrho_a(x) \leq t$, hiszen $\gamma$ egy $t$ hosszúságú összekötő görbe $a$ és $x$ között. Hasonlóan, $\varrho_b(x) \leq d - t$, mert $\gamma$ egy $d - t$ hosszúságú görbe $x$ és $b$ között. Ebből $d \leq f(x) \leq t + (d - t) = d$, vagyis $f(x) = d$ következik. A feltételek szerint $f$ differenciálható $a$-n és $b$-n kívül, ezért egy globális minimumhelyen, mint amilyen $x$, a gradiense eltűnik.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $f$ gradiense $x$-ben 0 ($a \neq x \neq b$). Ekkor szükségképpen $f(x) = d$ kell, hogy teljesüljön. Tekintsük ugyanis az $[a, x]$ szakasz által meghatározott egyenest $\mathbb{R}^n$-ben, és

$f$ leszűkítését erre, jelölje ezt $\bar{f}$. Ekkor $\bar{f}$ konvex, egyparaméteres függvény, $a$-n kívül deriválható, így folytonosan deriválható is, és a deriváltja $x$-ben eltűnik. Ez csak úgy történhet, ha $x$ lokális minimumhely, amely konvex függvény esetén globális minimumhely is, így $f(x) = d$. Ekkor viszont a feladat feltételei szerint létezik (egyetlen) $g(a, x)$ geodetikus, $d(a, x)$ hosszal, és hasonlóan létezik $g(x, b)$ geodetikus $d(x, b)$ hosszal. Ezt a két görbét összefűzve, egy $d(a, b)$ hosszúságú görbét kapunk $a$ és $b$ között, amely – mivel minimális hosszúságú – kénytelen geodetikus lenni (ld. pl. *P. Petersen, Riemannian Geometry 2nd ed., 128. oldal, Theorem 13*). A $g(a, b)$ geodetikus azonban egyértelmű, így $x$ benne van $\gamma$ képhalmazában. □

*A feladatra Csizmadia Gábor Béla, Mészáros András, Mészáros Szabolcs, Nagy Donát, Nagy János és Virosztek Dániel helyes megoldást nyújtott be.*

**11. feladat (Tran Quoc Binh).** *(A) Adva van egy ellipszis a síkban. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan Riemann-metrika, amely az egész síkon értelmezve van, és amelyre nézve az adott ellipszis geodetikus. Igazoljuk, hogy minden ilyen Riemann-metrika Gauss-görbülete felvesz pozitív értéket is.*

*(B) Legyen adva két, egymást nem metsző, egyszerű sima zárt görbe a síkban. Mutassuk meg, hogy ha egy, az egész síkon értelmezett teljes Riemann-metrikának a két adott görbe geodetikusa, akkor a metrika Gauss-görbülete valahol eltűnik.*

**Megoldás. (Tran Quoc Binh)** (a) 1. Alkalmas koordinátarendszer bevezetésével az adott ellipszis egyenlete $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alakú. Tekintsük az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$;

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$$

és a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \backslash \{(0, 0, 1)\}$,

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{1 + x^2 + y^2}(2x, 2y, -1 + x^2 + y^2)$$

függvényeket.

Könnyen belátható, hogy $f$ és $g$ is diffeomorfizmus. $f$ az adott ellipszist az egységkörbe viszi, $g$ pedig nem más, mint az egységgömb északi pólusából történő standard sztereografikus projekciónak az inverze, mely az újonnan kapott egységkört viszi át az egységgömb "vízszintes" főkörébe.

Tekintsük most az $\mathbb{S}^2$ egységgömbön az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi térből örökölt kanonikus metrikát. Ekkor $\mathbb{S}^2$ minden főköre geodetikus. Így a "vízszintes" főköre geodetikusa lesz a $\mathbb{S}^2 \backslash \{(0, 0, 1)\}$ lyukas gömbnek.

Az $f^{-1} \circ g^{-1}$ diffeomorfizmus visszahúzza a gömbi metrikát a síkra. $f \circ g$ és inverze is izometria. Mivel az izometria geodetikus görbét geodetikus görbébe visz át, az adott ellipszis geodetikusa a „visszahúzott” metrikának.

2. Vegyünk most egy tetszőleges Riemann-metrikát a síkban, melyre nézve az adott ellipszis geodetikus. Alkalmazzuk a Gauss-Bonnet tételt az adott ellipszis által határolt $M$ tartományra. Mivel az adott ellipszis geodetikus, $\int_M K dA = 2\pi\chi(M)$, ahol $\chi(M)$ az $M$ tartomány Euler-karakterisztikáját. Könnyen belátható, hogy az ellipszis által határolt síkbeli tartomány Euler-karakterisztikája 1. Így $\int_M K dA = 2\pi > 0$, amiből következik, hogy a Gauss-görbület biztosan felvesz pozitív értéket is az ellipszis által határolt tartományon belül.

(B) A feladat (A) részéből tudjuk, hogy a síkban minden olyan Riemann-metrikának, melyre nézve az adott egyszerű, sima görbék geodetikusok, a Gauss-görbülete pozitív értéket is felvesz legalább a görbék által határolt tartományokban. Elegendő tehát belátnunk, hogy nem létezhet olyan teljes, pozitív görbületű Riemann-metrika az egész síkban, melynek a két adott egyszerű, zárt és sima görbe geodetikusai . Ezt indirekt módon látjuk be.

Tegyük fel, hogy létezik teljes, pozitív görbületű Riemann-metrika, melyre nézve a két adott zárt görbe geodetikus. Jelöljük a két adott zárt görbét $C_1$ ill. $C_2$-vel. Tetszőleges $(x, y) \in C_1 \times C_2$ pontpárhoz rendeljük hozzá az őket összekötő legrövidebb geodetikus görbe hosszát. Ezt mindig megtehetjük, hiszen a metrika teljes. Könnyen belátható, hogy az így definiált függvény folytonos. Mivel mind két zárt görbe kompakt halmaz, a direkt szorzatuk is az, következésképpen a rajta definiált folytonos függvény felveszi a minimum értékét is. A mi esetünkben azt kapjuk, hogy létezik egy legrövidebb görbe, mely összeköti a két adott zárt görbét. Jelöljük ezt a görbét $\gamma$-val és a hosszát $l$-el. Tekintsük $\gamma$ ívhossz-paraméterezését: $\gamma : [0, l] \to \mathbb{R}^2$. Tegyük fel, hogy $\gamma(0) = p \in C_1$, $\gamma(l) = q \in C_2$. Az első variációs formulából tudjuk, hogy $\gamma$ merőleges $C_1$-re ill. $C_2$-re.

Legyen $V(0) \in T_{x_0}\mathbb{R}^2$ olyan egységvektor, mely merőleges a $\dot\gamma(0)$-ra, tehát egység érintő vektora $C_1$-nek az $x_0$ pontban. Toljuk el párhuzamosan a $V(0)$ vektort $\gamma(s)$ mentén. Igy kapjuk a $V(s)$ párhuzamos vektormezőt a $\gamma$ görbe mentén. Nyilván $V(l)$ egység érintő vektora $C_2$-nek az $y_0$ pontban. Legyen

$$\Omega : [0, l] \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2,\ (s, t) \mapsto \Omega(s, t) := \exp_{\gamma(s)}(tV(s)),$$

$$\sigma_1(t) := \Omega(0, t), \qquad \sigma_2(t) := \Omega(l, t).$$

Ekkor $\Omega(s, t)$ olyan variációja a $\gamma(s)$ görbének, melyre megfelelő kicsi $\epsilon$ esetén $\Omega(0, t) = \sigma_1(t) \in C_1$, $\Omega(l, t) = \sigma_2(t) \in C_2$, mivel a $C_1$ és a $C_2$ görbék geodetikusok és minden pontból minden irányba lokálisan egyetlen geodetikus indul ki. Az $\Omega(s, t)$ megadásából azt is kapjuk, hogy $\Omega(s, 0) = \gamma(s)$ és $V(s) = \frac{\partial\Omega(s,t)}{\partial t} |_{t=0}$.

Legyen továbbá

$$L(t) := \int_0^s \sqrt{\langle \frac{\partial\Omega(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial\Omega(s, t)}{\partial t} \rangle} ds.$$

Ekkor $L(t)$ az $\Omega(s, t)$ görbe hossza rögzitett $t$ esetén, mely összeköti a $\sigma_1(t) \in C_1$ pontot a $\sigma_2(t) \in C_2$ ponttal. Mivel $\Omega(s, 0) = \gamma(s)$, $L(t)$ minimum értéket vesz fel a $t = 0$-ban, így $\frac{\partial L}{\partial t} |_0 = 0$ és $\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} |_0 \geq 0$.

A második variációs formula szerint:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}_0 = \int_0^s \langle \nabla_{\dot\gamma} V, \nabla_{\dot\gamma} V \rangle - \langle R(V, \dot\gamma)\dot\gamma, V \rangle ds + \langle \nabla_{\dot\sigma_2}\dot\sigma_2, \dot\gamma(l) \rangle |_{t=0} - \langle \nabla_{\dot\sigma_1}\dot\sigma_1, \dot\gamma(0) \rangle |_{t=0} .$$

Mivel $V$ párhuzamos vektor mező $\gamma$ mentén, $\nabla_{\dot\gamma} V = 0$. Továbbá $C_1$ és $C_2$ geodetikus, $\nabla_{\dot\sigma_1}\dot\sigma_1 = \nabla_{\dot\sigma_2}\dot\sigma_2 = 0$. Így azt kapjuk, hogy

$$\left.\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}\right|_0 = -\int_0^s \langle R(V, \dot\gamma)\dot\gamma, V \rangle ds < 0,$$

hiszen a görbület pozitív. Ez ellentmondás. □

*A feladatra adott megoldások közül Nagy János és Mészáros Szabolcs megoldása jó. Virosztek Dániel a feladat (A) részét helyesen megoldotta, a (B) részének csak egy speciális esetét tudta belátni.*

**12. feladat (Móri Tamás).** *Egy zsákban n golyó van, ezek közül néhány (legalább egy, de nem mind) fehér, a többi fekete. A zsákból egymás után, visszatevés nélkül véletlenszerűen kihúzzuk az összes golyót. Jelölje $X_i$ a fehér golyók számának arányát a zsákban az i-edik húzás előtt, és legyen*

$$T = \max\left\{\left|X_i - X_j\right| : 1 \leq i \leq j \leq n\right\}.$$

*Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{E}(T) \leq H(\mathbb{E}(X_1))$, ahol $H(x) = -x \ln x - (1 - x) \ln(1 - x)$.*

**Megoldás. (Virosztek Dániel)** Legyen $n$ tetszőleges, fix. Elég belátni, hogy

$$\mathbb{E}\left(T \,\middle|\, X_1 = \frac{k}{n}\right) \leq H\left(\frac{k}{n}\right), \tag{10}$$

ha $k \in \{1, \dots, n-1\}$, mert a toronyszabály és a $H$ függvény konkavitása (Jensen egyenlőtlenség) miatt ezesetben

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(T\,|X_1)) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}\left(T \,\middle|\, X_1 = \frac{k}{n}\right) \mathbb{P}\left(X_1 = \frac{k}{n}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1} H\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}\left(X_1 = \frac{k}{n}\right) = \mathbb{E}(H(X_1)) \leq H(\mathbb{E}(X_1)). \tag{11}$$

Az $\{X_j\}_{j=1}^n$ sztochasztikus folyamat martingál, mert ha $X_j = \frac{k}{n+1-j}$ valamely $k \in \{0, \dots, n+1-j\}$ számra, akkor

$$\mathbb{P}(\text{a j. húzáskor fekete golyót húzunk}) = \mathbb{P}\left(X_{j+1} = \frac{k}{n-j}\right) = 1 - \frac{k}{n+1-j}$$

és

$$\mathbb{P}(\text{a j. húzáskor fehér golyót húzunk}) = \mathbb{P}\left(X_{j+1} = \frac{k-1}{n-j}\right) = \frac{k}{n+1-j}.$$

Így

$$\mathbb{E}\left(X_{j+1} \,\middle|\, X_j\right) = \frac{k}{n-j}\left(1 - \frac{k}{n+1-j}\right) + \frac{k-1}{n-j}\frac{k}{n+1-j} =$$

$$= \frac{k}{n+1-j}\left(\frac{n+1-j-k}{n-j} + \frac{k-1}{n-j}\right) = \frac{k}{n+1-j} = X_j \tag{12}$$

$T$ definíciójából látszik, hogy

$$T = \sup_{1\leq j\leq n} X_j - \inf_{1\leq j\leq n} X_j = \sup_{1\leq j\leq n} X_j - \left(1 - \sup_{1\leq j\leq n}\left(1 - X_j\right)\right). \tag{13}$$

Behelyettesítéssel adódik, hogy $T = \sup_{1\leq j\leq n} X_j$, ha $X_n = 0$, és $T = \sup_{1\leq j\leq n}\left(1 - X_j\right)$, ha $X_n = 1$. (Nyilván mindig $X_n \in \{0, 1\}$.)

Vagyis

$$T = \left(\sup_{1\leq j\leq n} X_j\right)\mathbb{I}_{\{X_n=0\}} + \left(\sup_{1\leq j\leq n}\left(1 - X_j\right)\right)\mathbb{I}_{\{X_n=1\}} =$$

$$= \sup_{1\leq j\leq n} X_j + \sup_{1\leq j\leq n}\left(1 - X_j\right) - \left(\sup_{1\leq j\leq n} X_j\right)\mathbb{I}_{\{X_n=1\}} - \left(\sup_{1\leq j\leq n}\left(1 - X_j\right)\right)\mathbb{I}_{\{X_n=0\}} =$$

$$= \sup_{1\leq j\leq n} X_j + \sup_{1\leq j\leq n}\left(1 - X_j\right) - 1, \tag{14}$$

hiszen $X_n = 1 \Rightarrow \sup_{1\leq j\leq n} X_j = 1$, $X_n = 0 \Rightarrow \sup_{1\leq j\leq n}\left(1 - X_j\right) = 1$ és $\mathbb{I}_{\{X_n=1\}} + \mathbb{I}_{\{X_n=0\}} = 1$.

Világos, hogy $\{X_j\}_{j=1}^n$ és $\{1 - X_j\}_{j=1}^n$ is nemnegatív értékű martingálok, így a Doob-féle martingál egyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1\leq j\leq n} X_j \geq t_1\right) \leq \frac{1}{t_1}\mathbb{E}(X_n)\ \forall\, t_1 > 0 \tag{15}$$

és

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1\leq j\leq n}\left(1 - X_j\right) \geq t_2\right) \leq \frac{1}{t_2}\mathbb{E}(1 - X_n)\ \forall\, t_2 > 0. \tag{16}$$

Az első megjegyzésünk értelmében feltehetjük, hogy $X_1 = \frac{k}{n}$ ($k \in \{1, \dots, n-1\}$), ebben az esetben $\{X_j\}_{j=1}^n$ martingálsága miatt $\mathbb{E}(X_n) = \frac{k}{n}$ és $\mathbb{E}(1 - X_n) = 1 - \frac{k}{n}$.

Ha $Y$ egy nemnegatív, integrálható valószínűségi változó, akkor

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y \geq t)\,\mathrm{d}t. \tag{17}$$

Tehát (15) és (17) alapján

$$\mathbb{E}\left(\sup_{1\leq j\leq n} X_j\right) = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(\sup_{1\leq j\leq n} X_j \geq t_1\right)\mathrm{d}t_1 =$$

$$= \int_0^{\frac{k}{n}} \mathbb{P}\left(\sup_{1\leq j\leq n} X_j \geq t_1\right)\mathrm{d}t_1 + \int_{\frac{k}{n}}^1 \mathbb{P}\left(\sup_{1\leq j\leq n} X_j \geq t_1\right)\mathrm{d}t_1 + \int_1^\infty \mathbb{P}\left(\sup_{1\leq j\leq n} X_j \geq t_1\right)\mathrm{d}t_1 \leq$$

$$\leq \frac{k}{n} + \int_{\frac{k}{n}}^1 \frac{1}{t_1}\mathbb{E}(X_n)\,\mathrm{d}t_1 + 0 = \frac{k}{n} - \frac{k}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right), \tag{18}$$

mert $\mathbb{P}\left(\sup_{1\leq j\leq n} X_j \geq t_1\right) = 1$, ha $t_1 \leq \frac{k}{n}$, és $\mathbb{P}\left(\sup_{1\leq j\leq n} X_j \geq t_1\right) = 0$, ha $t_1 > 1$.

Teljesen hasonlóan

$$\mathbb{E}\left(\sup_{1\leq j\leq n}\left(1 - X_j\right)\right) \leq \int_0^{1-\frac{k}{n}} 1\mathrm{d}t_2 + \int_{1-\frac{k}{n}}^1 \frac{1}{t_2}\mathbb{E}(1 - X_n)\,\mathrm{d}t_2 + 0 = 1 - \frac{k}{n} - \left(1 - \frac{k}{n}\right)\ln\left(1 - \frac{k}{n}\right). \tag{19}$$

Vagyis (14), (18) és (19) alapján, feltéve, hogy $X_1 = \frac{k}{n}$,

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}\left(\sup_{1\leq j\leq n} X_j\right) + \mathbb{E}\left(\sup_{1\leq j\leq n}\left(1 - X_j\right)\right) - 1 \leq$$

$$\leq \frac{k}{n} - \frac{k}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) + 1 - \frac{k}{n} - \left(1 - \frac{k}{n}\right)\ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) - 1 = H\left(\frac{k}{n}\right), \tag{20}$$

ezzel a bizonyítás kész. □

*Virosztek Dániel megoldása kiemelkedő, nagyon szépen kidolgoztott. Mészáros András megoldása helyes, jól követhető. Bodor Bertalan megoldása helyes, de az egyes lépések jóval bővebb magyarázatot igényelnének, a megoldásában nem használ martingálokat, elemi eszközökkel bizonyít.*