A 2012. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

október 26. — november 5.

1. Van-e olyan α valós szám, amelyhez vannak olyan $f(n)$ és $g(n)$ ($\mathbb{N}$-ből $\mathbb{N}$-be képező) rekurzív függvények, hogy
$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)},$$
ugyanakkor az α n-edik tizedesjegyét megadó függvény nem rekurzív?

2. Nevezzük a $(\mathbb{Z}_n, +)$ ciklikus csoport egy A részhalmazát *gazdag*nak, ha minden $x, y \in \mathbb{Z}_n$-hez van olyan $r \in \mathbb{Z}_n$, amelyre $x-r$, $x+r$, $y-r$ és $y+r$ mindegyike A-ban van. Milyen α-hoz létezik olyan $C_\alpha > 0$ konstans, amelyre bármely páratlan n-re minden $A \subset \mathbb{Z}_n$ gazdag halmaz legalább $C_\alpha n^\alpha$ elemű?

3. Bizonyítsuk be, hogy egy k-kromatikus gráf éleit tetszőlegesen két színnel színezve van olyan k pontú részfa, melynek élei ugyanolyan színűek.

4. Legyen K egységnyi térfogatú konvex test az n-dimenziós térben. Legyen $S \subset K$ olyan Lebesgue-mérhető halmaz, melynek mértéke legalább $1-\varepsilon$, ahol $0 < \varepsilon < 1/3$. Bizonyítandó, hogy K-t a súlypontjából $2\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$ arányban kicsinyítve, a kapott test tartalmazza S súlypontját.

5. Legyenek V_1, V_2, V_3, V_4 olyan négydimenziós lineáris alterek $\mathbb{R}^8$-ban, amelyek közül bármely kettőnek a metszete csak a nullvektorból áll. Mutassuk meg, hogy van olyan W négydimenziós lineáris altér $\mathbb{R}^8$-ban, amelyre mindegyik $W \cap V_i$ metszet kétdimenziós.

6. Legyenek A, B, C olyan $n \times n$-es, komplex elemű mátrixok, melyekre $[A,B] = C$, $[B,C] = A$ és $[C,A] = B$, ahol $[X,Y]$ az X és Y mátrixok $XY - YX$ kommutátorát jelöli. Bizonyítsuk be, hogy $e^{4\pi A}$ az egységmátrix.

7. Legyen Γ egy r sugarú körben fekvő, rektifikálható, l hosszúságú egyszerű görbeív, és legyen k egy természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy ha $l > kr\pi$, akkor van olyan r sugarú körvonal, mely Γ-t legalább $k+1$ pontban metszi.

8. Rendeljük hozzá minden $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényhez azt a $\Phi_f : \mathbb{R}^2 \to [-\infty, \infty]$ függvényt, amelyre $\Phi_f(x,y) = \limsup_{z\to y} f(x,z)$ minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-re.

   (a) Igaz-e, hogy ha f Lebesgue-mérhető, akkor Φ_f is Lebesgue-mérhető?

   (b) Igaz-e, hogy ha f Borel-mérhető, akkor Φ_f is Borel-mérhető?

9. Legyen $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ a komplex egységkörlemez, és legyen $0 < a < 1$ valós szám. Tegyük fel, hogy $f : D \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olyan holomorf függvény, amelyre $f(a) = 1$ és $f(-a) = -1$. Bizonyítsuk be, hogy
$$\sup_{z\in D} \bigl|f(z)\bigr| \geq \exp\left(\frac{1-a^2}{4a}\pi\right).$$

10. Legyen K egy csomó a 3-dimenziós térben (tehát a körvonal egy differenciálható beágyazása $\mathbb{R}^3$-ba), és D a csomó diagramja (azaz olyan vetülete egy síkra, amely transzverzális duplapontoktól eltekintve szintén differenciálható beágyazása a körvonalnak). Színezzük ki D komplementumát sakktáblaszerűen feketével és fehérrel. Definiáljuk a diagram $\Gamma_B(D)$ *fekete gráfját* a következő módon: $\Gamma_B(D)$ csúcsai legyenek a fekete tartományok, és két tartomány minden érintkezési pontján át menjen egy őket összekötő él.

    (a) Adjuk meg az összes olyan csomót, amelynek van olyan D diagramja, hogy a $\Gamma_B(D)$ gráfnak legfeljebb 3 feszítőfája van. (Két csomót nem tekintünk különbözőnek, ha az egyik a másikba mozgatható a körvonal beágyazásainak egy 1-paraméteres seregével.)

    (b) Lássuk be, hogy bármely csomó bármely D diagramjára $\Gamma_B(D)$-nek páratlan sok feszítőfája van.

11. Legyenek X_1, X_2, ... független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Melyek azok a c valós számok, amelyekre minden n esetén

$$P\left(\left|\frac{S_{2n}}{2n} - c\right| \leq \left|\frac{S_n}{n} - c\right|\right) \geq \frac{1}{2} \quad ?$$

A megoldásokat magyar nyelven, jól olvashatóan, feladatonként külön papírra írva,

2012. november 5-én 12.00 óráig

a Bolyai János Matematikai Társulat helyi tagozatánál[1], vagy az ELTE TTK Matematikai Intézet titkárságán (1117 Budapest, Pázmány P. stny. 1/C., 3. emelet, 510. szoba) kell benyújtani, vagy ugyanezen időpontig ajánlottan postára kell adni a versenybizottság elnöke címére:

Lovász László, ELTE TTK, Matematikai Intézet
1117 Budapest, Pázmány P. stny. 1/C.,

vagy elektronikusan, PDF formátumban elküldeni a `frenkelp@cs.elte.hu` címre. Minden lapon szerepeljen a versenyző neve, és az egyik lapon az évfolyama, végzettsége, lakcíme és e-mail címe is.

A verseny eredményhirdetése december 14-én, pénteken 14 órakor a Rényi Intézet Nagytermében lesz (1053 Bp., Reáltanoda utca 13-15.), ahol mindenkit szívesen látunk.

További információ a `bolyai.hu/hu/schweitzer.html` oldalon található.

[1] A Társulat budapesti irodája a Rényi Intézetbe költözött!