JELENTÉS A 2011. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 2011. október 28. és november 7. között rendezte meg a 2011. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen azok vehettek részt, akik a verseny megrendezésekor Magyarországon vagy magyar állampolgárként külföldön valamely egyetem, főiskola hallgatói, vagy középiskolai tanulók voltak, vagy a verseny megrendezésének évében szereztek egyetemi, főiskolai oklevelet. PhD-hallgatók csak akkor vehettek részt, ha egyetemi, főiskolai diplomájukat a verseny megrendezésének évében szerezték.

A verseny megrendezésére a Társulat a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetét kérte fel. A Bolyai Intézet tanácsa bizottságot nevezett ki a verseny lebonyolítására, amelynek elnöke Hatvani László, titkárai Maróti Miklós és Röst Gergely, tagjai pedig Czédli Gábor, Fodor Ferenc, Hajnal Péter, Kérchy László, Kincses János, Krámli András, Krisztin Tibor, Major Péter, Makay Géza, Móricz Ferenc, Nagy Béla, Nagy Gábor, Pap Gyula, Stachó László, Szabó László Imre, Szendrei Mária, Totik Vilmos, Varjú Péter és Zádori László voltak.

A Versenybizottság felhívására itthon és külföldön dolgozó magyar matematikusok 29 feladatot javasoltak kitűzésre; szerencsére mindazon témákból állt rendelkezésünkre elegendő feladat, amelyek a hagyományok szerint a versenyen szerepelni szoktak. Ezúton is köszönjük minden javaslattevő munkáját; nélkülük a versenyt nem tudtuk volna sikeresen lebonyolítani. Ellenőrzés és mérlegelés után a bizottság tíz feladatot tűzött ki.

A 2011. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

1. feladat. Legyenek $F_1, F_2, \ldots$ olyan Borel-mérhető halmazok a síkon, amelyek uniója az egész sík. Igazolandó, hogy van olyan n természetes szám és S körvonal, amelyekre az $S \cap F_n$ halmaz sűrű S-ben. Mutassuk meg azt is, hogy az állítás nem feltétlenül igaz, ha az F_j halmazok mérhetőségére vonatkozó feltételt elhagyjuk.

2. feladat. Tegyük fel, hogy egy n pontú G egyszerű gráf fokszámainak $\delta(G)$ minimuma legalább $3n/4$. Bizonyítsuk be, hogy G éleinek bármely 2-színezésében van olyan legalább $\delta(G)+1$ pontú összefüggő részgráf, melynek minden éle ugyanolyan színű.

3. feladat. A d-dimenziós $\mathbb{R}^d$ térben egy $n \times n \times \cdots \times n$-es kockarács összes (azaz n^d számú) pontját lefogtuk $2n-3$ hipersíkkal. Bizonyítsuk be, hogy ezek közül kiválasztható n hipersík úgy, hogy már azok is lefogják a rács összes pontját.

4. feladat. Legyen G, H két véges csoport, és legyen $\varphi, \psi \colon G \to H$ két szürjektív, de nem injektív homomorfizmus. Igazoljuk, hogy létezik G-nek az egységelemtől különböző olyan eleme, amelynek képe φ és ψ mellett azonos.

5. feladat. Legyenek n, k pozitív egészek. Az $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ és $a \in \mathbb{R}^k$ vektorok esetén legyen $f_a(x) := \|x - a\|^{2n}$, ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi norma, és tekintsük az $f_a \quad (a \in \mathbb{R}^k)$ függvények által generált $Q_{n,k}$ vektorteret. Melyik az a legnagyobb N egész szám, amelyre $Q_{n,k}$ tartalmazza az $x_1, \ldots, x_k$ összes olyan polinomját, amelynek teljes fokszáma legfeljebb N?

6. feladat. Legyenek $C_1, \ldots, C_d$ kompakt és összefüggő halmazok $\mathbb{R}^d$-ben, és tegyük fel, hogy mindegyik C_i konvex burka tartalmazza az origót. Bizonyítandó, hogy minden i-re van olyan $c_i \in C_i$, amelyekre az origó benne van a $c_1, \ldots, c_d$ pontok konvex burkában.

7. feladat. Bizonyítsuk be, hogy nemnegatív valós számok tetszőleges $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatára

$$\liminf_{n\to\infty} \left(n^2 \left(4a_n(1-a_{n-1}) - 1\right)\right) \leqslant \frac{1}{4}.$$

8. feladat. Adott $a \leqslant 1/e$ nullától különböző valós szám esetén legyenek $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ olyan nem valós számok, amelyekre $ze^z + a = 0$ teljesül, továbbá legyenek $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ tetszőlegesek. Mutassuk meg, hogy az $f(x) := \Re\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^{z_j x}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^{z_j x}\right)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvénynek minden 1 hosszúságú zárt intervallumban van zérushelye.

9. feladat. Legyen $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha minden $t > 1$ esetén teljesül az

$$x'(t) = -x^3(t) + \frac{t-1}{t} x^3(t-1)$$

egyenlőség, akkor $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

10. feladat. Legyenek $X_0, \xi_{i,j}, \varepsilon_k$ $(i,j,k \in \mathbb{N})$ független, nemnegatív egész értékű valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\xi_{i,j}$ $(i,j \in \mathbb{N})$ azonos eloszlásúak, ε_k $(k \in \mathbb{N})$ is azonos eloszlásúak, $\mathbb{E}(\xi_{1,1}) = 1$, továbbá $\mathbb{E}(X_0^\ell) < \infty$, $\mathbb{E}(\xi_{1,1}^\ell) < \infty$ és $\mathbb{E}(\varepsilon_1^\ell) < \infty$ valamely $\ell \in \mathbb{N}$ esetén. Tekintsük az $X_n := \varepsilon_n + \sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j}$ $(n \in \mathbb{N})$ valószínűségi változókat, ahol $\sum_{j=1}^{0} \xi_{n,j} := 0$. Vezessük be az $M_n := X_n - X_{n-1} - \mathbb{E}(\varepsilon_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatot. Bizonyítandó, hogy van olyan legfeljebb $\ell/2$ fokú P_ℓ polinom, melyre $\mathbb{E}(M_n^\ell) = P_\ell(n)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Az első feladatot Totik Vilmos, a másodikat Gyárfás András, a harmadikat Károlyi Gyula, a negyediket Maróti Miklós, az ötödiket Totik Vilmos, a hatodikat Bárány Imre, a hetediket Totik Vilmos, a nyolcadikat Krisztin Tibor, a kilencediket Hatvani László, a tizediket pedig Pap Gyula javasolta kitűzésre.

A versenyre 18 versenyző összesen 59 megoldást nyújtott be. Név szerint, Backhausz Tibor megoldást küldött a 2., 4., 5. és 7. feladatra, Csige Tamás a 2., 3. és 4. feladatra, Gerencsér Máté a 4., 7., 8., 9. és 10. feladatra, Grósz Dániel a 2. és 4. feladatra, Gyenyizse Gergő a 2., 3., 4., 7., 9. és 10. feladatra, Kelemen Norbert a 6. feladatra, Kiss Viktor az 1., 2., 3. és 4. feladatra, Kovács Kristóf a 2. feladatra, Mészáros Szabolcs a 2., 3., 4., 7. és 9. feladatra, Nagy Ábris a 6. feladatra, Nagy Csaba a 2., 4., 5., 7. és 9. feladatra, Nagy Dániel az 1., 2., 3., 4. és 7. feladatra, Ozsvárt László a 2. és 4. feladatra, Soltész Dániel a 2. feladatra, Szakács Nóra a 2., 4. és 6. feladatra, Tomon István a 2., 3., 4., 5., 7., 8. és 10. feladatra, Udvari Balázs a 2. feladatra, Virosztek Dániel pedig az 1., 7. és 10. feladatra.

A Versenybizottság 2011. november 30-án megtartott ülésén a következő határozatot hozta:

A 2011. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny díjazottjai

I. díjban és 70 000 forint pénzjutalomban részesül *Tomon István*, az ELTE Matematika alapszak harmadéves hallgatója;

II. díjban és 50 000 forint pénzjutalomban részesül *Gyenizse Gergő*, az SZTE Matematikus mesterszak elsőéves hallgatója;

III. díjban és 40 000 – 40 000 forint pénzjutalomban részesülnek *Gerencsér Máté* és *Nagy Csaba*, az ELTE Matematikus mesterszak másodéves hallgatói.

Indoklás

Tomon István teljes megoldást adott a 2., 3., 4., 5., 7., 8. és 10. feladatra.

Gyenizse Gergő teljes megoldást adott a 2., 3., 4., 7., 9. és 10. feladatra.

Gerencsér Máté teljes megoldást adott a 4., 7., 8., 9. és 10. feladatra.

Nagy Csaba teljes megoldást adott a 2., 4., 5., 7. és 10. feladatra, és kitűnt a megoldások világos, pontos leírásával.

A feladatok megoldásai

1. feladat (Totik Vilmos)**.** Legyenek $F_1, F_2, \ldots$ olyan Borel-mérhető halmazok a síkon, amelyek uniója az egész sík. Igazolandó, hogy van olyan n természetes szám és S körvonal, amelyekre az $S \cap F_n$ halmaz sűrű S-ben. Mutassuk meg azt is, hogy az állítás nem feltétlenül igaz, ha az F_j halmazok mérhetőségére vonatkozó feltételt elhagyjuk.

Megoldás. I. rész (Kiss Viktor)**.** Tegyük fel, hogy az F_j halmazok Borel-mérhetők. Baire kategória tétele szerint valamelyik F_k nem I. kategóriájú. Mivel F_k Borel-halmaz, megvan a Baire tulajdonsága, azaz van olyan G nyílt halmaz, hogy F_k a G és egy I. kategóriájú E halmaz szimmetrikus különbsége. Mivel F_k nem I. kategóriájú, G nem üres, így tartalmaz egy B körlapot. Legyen ennek sugara r és középpontja P. Tekintsük a P körüli $\rho < r$ sugarú körvonalakat. Ha F_k egyikben sem sűrű, akkor minden ilyen körvonalnak van olyan íve, amely diszjunkt tőle, azaz amely E-ben van. Az E halmazt P körül elforgatva minden racionális szöggel és az elforgatottak H unióját véve ekkor $B \subset H$ lenne, ami lehetetlen, hiszen H I. kategóriájú (része E megszámlálható sok elforgatottja uniójának). Ez az ellentmondás igazolja, hogy F_k sűrű valamelyik P körüli $\rho < r$ sugarú körvonalon.

II. rész (Elekes Márton, versenyen kívül)**.** Legyen K a sík köreinek halmaza, és minden $C \in K$ körre vegyünk fel diszjunkt $I_0(C), I_1(C), \ldots$ íveket ezen a körön. A sík pontjait meg fogjuk színezni a $0, 1, 2, \ldots$ színekkel, és minden $C \in K$ kör minden $I_k(C)$ ívéhez is hozzá fogjuk rendelni ezen színek valamelyikét 1–1 értelmű módon úgy, hogy minden j-re a j színű íven nincs j színű pont. Ez adja a feladat második részének a megoldását, hiszen ha F_j a j színű pontok halmaza és C egy kör, akkor F_j-nek nincs pontja a C kör j színű ívén, és így nem lehet sűrű C-ben.

Egy $H \subset R^2 \cup K$ halmazt nevezzünk zártnak, ha

1. $x, y, z \in H$ nem kollineáris pontok esetén az általuk meghatározott kör is eleme H-nak,

2. H-beli körök metszéspontjai (érintési pontjai) is elemei H-nak.

Jelölje egy tetszőleges S halmazra $\mathrm{cl}(S)$ azt a legszűkebb zárt halmazt, amely tartalmazza S-et. Mivel ez a $\mathrm{cl}(S)$ lezárt megszámlálható sok lépésben generálható S-ből körök metszeteit, illetve ponthármasokra illeszkedő köröket véve, $|\mathrm{cl}(H)| \leq |H|+\omega$. Azt is vegyük észre, hogy ha $X = \{x_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ egy jólrendezése egy $X \subset R^2 \cup K$ halmaznak, akkor a $\{\mathrm{cl}(\{x_\xi \,|\, \xi < \alpha\})\}_{\alpha<\kappa}$ növő lánc folytonos, azaz limesz α-ra

$$\mathrm{cl}(\{x_\xi \,|\, \xi < \alpha\}) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{cl}(\{x_\xi \,|\, \xi < \beta\}).$$

Egy $H \subset R^2 \cup K$ halmaz egy jó színezésén a következőt értjük:

1. minden $x \in H$ ponthoz egy természetes számot rendelünk ami a színe,
2. bármely H-beli C körre az $I_0(C), I_1(C), \ldots$ körívekhez 1-1 értelműen hozzárendeljük a $0, 1, 2 \ldots$ színeket (ez lesz a színük),
3. egyetlen j-re sincs a j színű íven j színű pont.

A következőt fogjuk igazolni: *Tegyük fel, hogy egy $H \subset R^2 \cup K$ halmaz előáll véges sok zárt halmaz uniójaként. Ha adott a H egy jó színezése, és adott egy H-tól diszjunkt $X \subset R^2 \cup K$ halmaz, akkor H jó színezése kiterjeszthető $H \cup X$ egy jó színezésévé.*

Mármost ennek a $H = \emptyset$, $X = R^2 \cup K$ speciális esete adja a feladat második részének megoldását.

A fenti állítást az X számosságára vonatkozó indukcióval igazoljuk.

1. eset: $|X| \leq \omega$**.** Legyen $X = \{x_0, x_1, \ldots\}$ az X egy (esetleg véges) felsorolása. Legyen $Z_n = \mathrm{cl}(\{x_k \mid k < n\})$. Ez megszámlálható. n-re vonatkozó rekurzióval színezzük a $Z_{n+1} \cup H$ halmazokat úgy, hogy a $Z_n \cup H$ halmazon már meglévő színezést megtartjuk. Elegendő tehát színezni $G_{n+1} = Z_{n+1} \setminus (Z_n \cup H)$ elemeit. Ezt egy újabb rekurzióval csináljuk: ha $G_{n+1} = \{g_0, g_1, \ldots\}$ egy felsorolás, akkor a g_i elemeket sorban színezzük a következő módon.

a) Ha g_i a sík pontja, akkor a zártság definíciója miatt legfeljebb egy Z_n-beli kör mehet át rajta, és ugyanilyen megfontolásból csak véges sok H-beli kör mehet át rajta. Az alrekurzióban a korábbi $j < i$ lépésekben már megszíneztünk véges sok kört (pontosabban azok íveit), és H színezésében is a H-beli körök ívei már színezettek, de, mint mondtuk, összesen csak véges sok eddig megszínezett kör megy át g_i-n. Az $I_k(C)$ ívek diszjunktsága miatt minden ilyen körnek legfeljebb egy színezett íve tartalmazhatja g_i-t, így csak véges sok színe van ezeknek az íveknek az eddig már megadott jó színezésben. Legyen g_i színe tetszőleges ezektől különböző szín.

b) Ha $g_i = C$ a sík egy köre, akkor Z_n zártsága miatt legfeljebb két Z_n-beli pont lehet rajta, és ugyanilyen okból csak véges sok H-beli pont lehet rajta. Az alrekurzióban a korábbi $j < i$ lépésekben megszíneztünk véges sok pontot, és H színezésében is a H-beli pontok már színezettek, de az éppen mondottak szerint összesen csak véges sok eddig megszínezett pont van g_i-n. Mármost az $I_0(C), I_1(C), \ldots$ íveket színezzük meg a $0, 1, \ldots$ színekkel úgy, hogy minden színt pontosan egyszer használunk, és ha egy már megszínezett j színű pont valamelyik $I_k(C)$ íven van, akkor $I_k(C)$ színe j-től különböző legyen.

Könnyen látható, hogy ez jó színezést ad a $Z_{n+1} \cup H$ halmazon. Mivel az így kapott színezés a $Z_n \cup H$ színezésének kiterjesztése, végül kapjuk egy jó színezését a $H \cup X$-nél bővebb $H \cup \mathrm{cl}(X) = H \cup \left(\cup_{n=0}^{\infty} Z_n\right)$ halmaznak.

2. eset: $|X| > \omega$**.** Legyen $X = \{x_\alpha\}_{\alpha<|X|}$ az X elemeinek egy jólrendezése $|X|$ típusban. Legyen $Z_\alpha = \mathrm{cl}(\{x_\xi \,|\, \xi < \alpha\})$. A fenti első megjegyzés alapján $|Z_\alpha| < |X|$. A második megjegyzés szerint $\{Z_\alpha\}_{\alpha<|X|}$ folytonos növő lánc, így elég a $G_{\alpha+1} = Z_{\alpha+1} \setminus (Z_\alpha \cup H)$ halmazokat úgy színezni, hogy a $Z_\alpha \cup H$ már meglévő színezésével együtt a $Z_{\alpha+1} \cup H$ egy jó színezését kapjuk. Ezt α-ra vonatkozó rekurzióval tesszük: alkalmazzuk az indukciós feltevést $Z_\alpha \cup H$-ra (vegyük észre, hogy ez véges sok zárt halmaz uniója), ennek az eddig megkonstruált jó színezésére és a $G_{\alpha+1}$ halmazra, ahol $|G_{\alpha+1}| \leq |Z_{\alpha+1}| < |X|$, így az indukciós feltevés használható.

Ismét könnyen látható, hogy ez jó színezést ad $H \cup \mathrm{cl}(X)$-en.

Érkezett 3 dolgozat, ebből értékelhető Kiss Viktoré, aki megoldotta a feladat első részét.

2. feladat (Gyárfás András)**.** Tegyük fel, hogy egy n pontú G egyszerű gráf fokszámainak $\delta(G)$ minimuma legalább $3n/4$. Bizonyítsuk be, hogy G éleinek bármely 2-színezésében van olyan legalább $\delta(G)+1$ pontú összefüggő részgráf, melynek minden éle ugyanolyan színű.

1. megoldás (Több versenyző megoldása alapján)**.** Feltesszük, hogy az élszínezés a piros és kék színeket használja. Tegyük fel, hogy a piros élek nem tartalmaznak egy feszítőfát (amikor is az állítás nyilvánvaló). Ekkor gráfunk csúcshalmaza szétvágható két nemüres halmazra úgy, hogy az összes keresztél kék legyen. Legyen a két rész közül A a kisebb elemszámú, B a másik ($|A| \leqslant n/2$). Legyen $x \in A$ egy tetszőleges csúcs.

Állítás: *x összes szomszédja elérhető x-ből kék éleken való sétákkal.*

Ez a feladatot megoldja, hiszen x és szomszédjai legalább $1 + d(x) \geqslant \delta(G) + 1$ csúcs, amelyek az állítás szerint egy kék összefüggő gráfba esnek.

A B-beli szomszédokra az állítás nyilvánvaló. Legyen y egy A-beli szomszéd. Minden A-beli pontnak van legalább $\delta(G)$ szomszédja, amelyek közül legalább $\delta(G)-(|A|-1)$ darab B-be esik. A B-be eső szomszédok mindegyike kék-szomszéd. Az x és y csúcsok B-be eső szomszédai nem lehetnek diszjunktak, hiszen

$$(\delta(G)-(|A|-1))+(\delta(G)-(|A|-1)) = (2\delta(G)-|A|)-|A|+2 \geqslant n-|A|+2 > |B|.$$

x és y közös B-beli, azaz kék szomszédjának léte bizonyítja az állítást és így megoldja a feladatot.

Igazából a bizonyítás azt is adja, hogy x összes szomszédját és A összes csúcsát összefűzik a kék élek.

2. megoldás (Több versenyző megoldása alapján)**.** Most is feltesszük, hogy az élszínezés a piros és kék színeket használja. Legyen x egy tetszőleges csúcs. Legyen P az x-ből piros éleken történő sétával elérhető csúcsok halmaza. Legyen K az x-ből kék éleken történő sétával elérhető csúcsok halmaza. P és $V(G)-P$ közti összes él kék, K és $V(G)-K$ közti összes él piros.

P és K csúcshalmazokon alapulva $V(G)$-t négy diszjunkt halmazra bonthatjuk fel:

$$V(G) = (P \cap K) \,\dot\cup\, (P \cap \overline{K}) \,\dot\cup\, (\overline{P} \cap K) \,\dot\cup\, (\overline{P} \cap \overline{K}). \tag{1}$$

$P \cap K$ és $\overline{P} \cap \overline{K}$ között nem vezethet él, hiszen egy olyan él sem piros, sem kék színt nem kaphatna. Hasonlóan nincs él $P \cap \overline{K}$ és $\overline{P} \cap K$ között.

Feltevésünk alapján $P \cap K$ nemüres, hiszen tartalmazza x-et. Ha $P \cap \overline{K}$ vagy $\overline{P} \cap K$ üres lenne, akkor $P \cup K$ P-vel vagy K-val egybeesne. Feltehetjük, hogy $P \cup K = P$. Mivel $P \cup K$ tartalmazza x egész szomszédságát és x-et, ezért legalább $\delta(G)+1$ csúcsa lenne, továbbá a piros élek összefűzik ezeket a pontokat. Ebben az esetben készen vagyunk. Feltesszük, hogy $P \cap \overline{K}$ és $\overline{P} \cap K$ is nemüres. Ha $\overline{P} \cap \overline{K}$ üres, akkor egy $y \in P \cap \overline{K}$ csúcs összes szomszédja P-be esik. Ekkor ismét készen vagyunk. Tehát feltehetjük, hogy (1) jobb oldalán mind a négy tag nem üres halmaz. Ha valamelyikből kiveszünk egy csúcsot, akkor ez a csúcs és szomszédai legalább $\delta(G)+1$ csúcsot adnak, amelyekről tudjuk, hogy a négy tag közül csak háromba eshetnek. Speciálisan

$$\begin{aligned}
|P \cap K| + |P \cap \overline{K}| + |\overline{P} \cap K| &\geqslant \delta(G)+1,\\
|P \cap K| + |P \cap \overline{K}| + |\overline{P} \cap \overline{K}| &\geqslant \delta(G)+1,\\
|P \cap K| + |\overline{P} \cap K| + |\overline{P} \cap \overline{K}| &\geqslant \delta(G)+1,\\
|P \cap \overline{K}| + |\overline{P} \cap K| + |\overline{P} \cap \overline{K}| &\geqslant \delta(G)+1.
\end{aligned}$$

Az egyenlőtlenségek összege

$$3n \geqslant 4(\delta(G)+1) > 3n,$$

ami ellentmondás.

Megjegyzések: A $\delta(G)+1$-es határ természetes, hiszen elképzelhető, hogy gráfunk ekkora komponensekből áll.

A $\delta(G)$-re adott egyenlőtlenség az optimális feltétel, ha $4|n$. Ezt a következő élszínezett gráf mutatja: Legyen $V(G) = A \dot\cup B \dot\cup C \dot\cup D$, $|A| = |B| = |C| = |D|$. Két pont pontosan akkor nincs összekötve, ha egyik A-beli, másik C-beli, illetve ha egyik B-beli, a másik D-beli. Az A-B és C-D élek legyenek pirosak, az A-D és B-C élek legyenek kékek (a többi él színe tetszőlegesen választható). Ekkor $\delta(G) = 3n/4-1$ és a legnagyobb összefüggő, azonos színű élekből álló gráf pontszáma $n/2$.

Érkezett 14 dolgozat. Teljes megoldást adott Backhausz Tibor, Grósz Dániel, Gyenizse Gergő, Kiss Viktor, Kovács Kristóf, Nagy Csaba, Nagy Dániel, Ozsvárt László, Soltész Dániel, Szakács Nóra, Tomon István és Udvari Balázs. Értékelhető részeredményeket ért el Csige Tamás.

3. feladat (Károlyi Gyula)**.** A d-dimenziós $\mathbb{R}^d$ térben egy $n \times n \times \cdots \times n$-es kockarács összes (azaz n^d számú) pontját lefogtuk $2n-3$ hipersíkkal. Bizonyítsuk be, hogy ezek közül kiválasztható n hipersík úgy, hogy már azok is lefogják a rács összes pontját.

1. megoldás (Tomon István megoldása alapján)**.** A feladat állítása $d = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $d \geqslant 2$. Továbbá azt is feltesszük, hogy $n \geqslant 4$, mert $n \leqslant 3$ esetén az állítás triviálisan igaz.

Jelölje $e_i, i = 1, \ldots, d$, az $\mathbb{R}^d$ térbeli standard bázisvektorokat. Egy ponthalmaz hipersíkokkal való fedését nevezzük *tengelymerőleges* fedésnek, ha létezik olyan standard bázisvektor, amely merőleges a fedésben résztvevő mindegyik hipersíkra.

Az alábbiakban a következő, a kitűzöttnél általánosabb állítást bizonyítjuk be.

Állítás. *Legyenek $A_1, \dots, A_d \subset \mathbb{R}$ véges halmazok, $a_i = |A_i|, i = 1, \dots, d$ és $a_1 \leqslant \dots \leqslant a_d$. Legyen $C = A_1 \times \dots \times A_d \subset \mathbb{R}^d$ és tegyük fel, hogy C pontjait lefedi $a_1 + a_2 - 3$ hipersík. Megmutatjuk, hogy ebből a fedésből kiválaszthatók olyan hipersíkok, melyek C egy tengelymerőleges fedését adják.*

Ebből a feladat eredeti állítása már következik, hiszen ha $A_1 = \dots = A_d = \{0, \dots, n-1\}$, akkor $a_1 = \dots = a_d = n$ és $C = A_1 \times \dots \times A_d$ éppen egy $n \times \dots \times n$-es kockarács, amit $2n - 3$ hipersík lefed, s ebből kiválasztható egy tengelymerőleges fedés, azaz kiválasztható n olyan hipersík, amely lefedi C-t.

Az állítást dimenzió szerinti indukcióval igazoljuk.

Először tegyük fel, hogy $d = 2$, $C = A_1 \times A_2$ és $a_1 + a_2 - 3$ egyenes lefedi C-t. A fedésben résztvevő $a_1 + a_2 - 3$ egyenes közül hagyjuk el az összes tengelymerőlegest, és legyen C' az a ponthalmaz, amelyet úgy kapunk C-ből, hogy elhagyjuk az összes olyan pontot, amely tengelymerőleges egyenesen fekszik. Ha b_1 az e_1-re merőleges egyenesek száma és b_2 az e_2-re merőleges egyenesek száma, akkor C'-nek $(a_1-b_1)(a_2-b_2)$ pontja van. Ha $C' = \emptyset$, akkor $a_1 = b_1$ vagy $a_2 = b_2$, és ekkor nyilvánvalóan kiválasztható C-nek egy tengelymerőleges fedése. Tegyük fel, hogy C' nem üres. Ekkor C'-t lefedi az eredeti fedésből el nem hagyott $a_1 + a_2 - 3 - b_1 - b_2$ egyenes. Ha $a_1 - b_1 = 1$, akkor a C'-ben lévő $a_2 - b_2$ pont mind egy e_2-vel párhuzamos szakaszon van, így ezeknek a lefedéséhez $a_2 - b_2$ egyenes kell. Azonban $a_2 - b_2 > a_2 - b_2 - 2 = a_1 + a_2 - 3 - b_1 - b_2$, ami ellentmondás. Nyilván ugyanez a helyzet, ha $a_2 - b_2 = 1$. Most tegyük fel, hogy $a_1 - b_1 \geqslant 2$ és $a_2 - b_2 \geqslant 2$. Ekkor C' konvex burka egy téglalap, melynek határán $2(a_1-b_1)+2(a_2-b_2)-4$ pontja van C'-nek. Bármely nem tengelymerőleges egyenes legfeljebb két pontot tartalmazhat a téglalap határáról, így az $a_1+a_2-3-b_1-b_2$ egyenes legfeljebb $2(a_1+a_2-3-b_1-b_2) < 2(a_1-b_1)+2(a_2-b_2)-4$ pontot fedhet le a téglalap határán, azaz nem fedheti le C'-t, ami ellentmondás. Ezzel a $d = 2$ esetet bebizonyítottuk.

Ezután tegyük fel, hogy $d \geqslant 3$ és hogy $d-1$-re igaz az állítás. Megmutatjuk, hogy ekkor d-re is igaz az állítás. Hagyjuk el a fedésből a tengelymerőleges hipersíkokat és C-ből a tengelymerőleges hipersíkokon fekvő pontokat. Így kapjuk a C' téglarácsot. Jelölje b_i az e_i-re merőleges hipersíkok számát $i = 1, \dots, d$ esetén. Ekkor C'-nek $(a_1-b_1)\cdots(a_d-b_d)$ pontja van. Legyenek $A'_1, \dots, A'_d \subset \mathbb{R}$ azok a halmazok, melyekre $C' = A'_1 \times \dots \times A'_d$, és $a'_i = |A'_i| = a_i - b_i$, $i = 1, \dots, d$. Ha $C' = \emptyset$, akkor $a_i - b_i = 0$ valamely $1 \leqslant i \leqslant d$-re és ekkor a fedésből kiválasztható b_i darab e_i-re merőleges hipersík, amely lefedi C-t.

Most megmutatjuk, hogy ha $C' \neq \emptyset$, akkor ellentmondáshoz jutunk. Tegyük fel, hogy az $a'_1, \dots, a'_d$ számok közül $a'_p \leqslant a'_q$ $(p \neq q)$ a két legkisebb. Ekkor

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 - 3 - (b_1 + \dots + b_d) &\leqslant a_p + a_q - 3 - (b_1 + \dots + b_d) \\ &\leqslant a_p + a_q - 3 - b_p - b_q = a'_p + a'_q - 3. \end{aligned}$$

Legyen $t_1 \in A'_p$ tetszőleges és tekintsük az

$$S = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_p = t_1\}$$

hipersíkot. Ekkor $S \cap C'$ egy $(d-1)$-dimenziós téglarács, melynek mérete $a'_1 \cdots a'_{p-1} a'_{p+1} \cdots a'_d$. Jelölje a C'-t lefedő hipersíkokat rendre $H_1, \dots, H_k$ ($k = a_1 + a_2 - 3 - (b_1 + \cdots b_d)$). Ekkor $L_i = S \cap H_i$, $i = 1, \dots, k$ ($(d-2)$-dimenziós) hipersíkok S-ben. Mivel $C' \cap S$ mérete $a'_1 \cdots a'_{p-1} a'_{p+1} \cdots a'_d$ és $C' \cap S$-t lefedi a $k \leqslant a'_p + a'_q - 3$ darab S-beli $L_1, \dots, L_k$ hipersík, így az indukciós feltevés alapján ezekből kiválasztható $L_{j_1}, \dots, L_{j_m}$ S-ben tengelymerőleges fedése $C' \cap S$-nek. Ekkor $m \geqslant \min\{a'_1, \dots, a'_{p-1}, a'_{p+1}, \dots a'_d\} = a'_q$. Tegyük fel, hogy $L_{j_1}, \dots, L_{j_m}$ merőleges az e_u standard bázisvektorra ($p \neq u$). Ekkor $L_{j_1}, \dots, L_{j_m}$ merőleges e_p-re is, így H_{j_r} normálvektora $n_{j_r} = \alpha_{j_r} e_p + \beta_{j_r} e_u$ alakban írható alkalmas $\alpha_{j_r}, \beta_{j_r}$ számokra $r = 1, \dots, m$ esetén. Legyen $l \neq p, u$ és S' egy e_l-re merőleges hipersík. Ekkor $H_{j_r} \cap S'$, $r = 1, \dots, m$ nem tengelymerőleges S'-ben. Rögzítsünk egy $1 \leqslant l \leqslant d$ indexet úgy, hogy $l \neq p, u$ és legyen $t_2 \in A'_l$ tetszőleges. Tekintsük a

$$T = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_l = t_2\}$$

hipersíkot. Ekkor $C' \cap T$ egy $a'_1 \cdots a'_{l-1} a'_{l+1} \cdots a'_d$ méretű téglarács, amelyet lefed a k darab $H_1 \cap T, \dots, H_k \cap T$ T-beli hipersík, amelyekből az indukciós hipotézis alapján kiválasztható egy T-ben tengelymerőleges fedés. Azonban ez a tengelymerőleges fedés legalább $M \geqslant \min\{a'_1, \dots, a'_{l-1}, a'_{l+1}, \dots, a'_d\} = a'_p$ elemet tartalmaz. Legyenek ezek $H_{i_1} \cap T, \dots, H_{i_M} \cap T$. A fentiek alapján a $H_{i_1}, \dots, H_{i_M}$ mind különbözőek a $H_{j_1}, \dots, H_{j_m}$ hipersíkoktól, így $m + M \geqslant a'_p + a'_q > a'_p + a'_q - 3 \geqslant k$, ami ellentmondás. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

2. megoldás (Gyenizse Gergő megoldásának felhasználásával)**.** Feltehető, hogy $d \geqslant 2$, hiszen $d = 1$ esetén az állítás evidens. A feladatbeli kockarács

$$K = A_1 \times \cdots \times A_d$$

alakú, ahol $A_1, \dots, A_d$ valós számokból álló n-elemű halmazok. Vezessük be az alábbi jelöléseket, feltéve hogy $a \in A_i$, $b \in A_j$ és $i \neq j$:

$$\begin{aligned} S(x_i = a) &:= \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_i = a\}, \\ K(x_i = a) &:= A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times \{a\} \times A_{i+1} \times \cdots \times A_d, \\ S(x_i = a, x_j = b) &:= \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_i = a,\ x_j = b\}. \end{aligned}$$

Nyilván $K(x_i = a)$ egy $(d-1)$-dimenziós n^{d-1}-elemű kockarács, amely részhalmaza az $S(x_i = a)$ hipersíknak. Továbbá $S(x_i = a, x_j = b)$ egy $(d-2)$-dimenziós affin altér. (A $K(\dots)$, illetve $S(\dots)$ jelölés a „kocka”, illetve a „sík” kezdőbetűjéből ered.) A feladatnál erősebb alábbi állítást bizonyítjuk.

Állítás. *Ha $\mathbb{E}$ az $\mathbb{R}^d$ legfeljebb $2n-3$ hipersíkjából álló halmaz és $K \subseteq \bigcup_{H \in \mathbb{E}} H$, akkor van olyan $i \in \{1, \dots, d\}$, hogy minden $a \in A_i$-re $S(x_i = a) \in \mathbb{E}$.*

Az állítást d szerinti teljes indukcióval igazoljuk. A $d = 1$ eset triviális. A $d = 2$ (síkbeli eset) ugyanúgy bizonyítható, mint az 1. megoldásban.

Legyen $d \geqslant 3$, és tegyük fel, hogy $(d-1)$-dimenziós kockarácsokra az állítás igaz. Fel fogjuk használni azt a közismert tényt, hogy $\mathbb{R}^d$-ben két különböző de nem diszjunkt hipersík metszete $(d-2)$-dimenziós affin altér. (Ez könnyen adódik a vektorterek altereire vonatkozó dimenzióegyenlőségből, ha az origót a két hipersík valamelyik közös pontjába eltoljuk.)

Tegyük fel indirekt módon, hogy az állítás nem igaz. Ekkor minden $\ell \in \{1, \dots, d\}$ esetén le tudunk rögzíteni egy $a_\ell \in A_\ell$ számot úgy, hogy

$$S(x_\ell = a_\ell) \notin \mathbb{E}\,.$$

Mivel $S(x_\ell = a_\ell) \notin \mathbb{E}$, a $(d-1)$-dimenziós $K(x_\ell = a_\ell)$ kockarácsot az $S(x_\ell = a_\ell)$ hipersíknak bizonyos $\mathbb{E}$-beli hipersíkokkal vett metszetei fedik le. Ezek a metszetek a fenti megjegyzés szerint $(d-2)$-dimenziósak, és számuk legfeljebb $|\,\mathbb{E}\,| \leqslant 2n - 3$. Az indukciós hipotézis miatt van olyan $\pi(\ell) \in \{1, \ldots, d\} \setminus \{\ell\}$, hogy minden $b \in A_{\pi(\ell)}$-re az $S(x_\ell = a_\ell, x_{\pi(\ell)} = b)$ affin altér (amely $S(x_\ell = a_\ell)$-nek hipersíkja) egy $\mathbb{E}$-beli hipersík metszete $S(x_\ell = a_\ell)$-lel. Ez a $\pi(\ell)$ egyértelmű, mert ha egy tőle különböző γ is hasonló tulajdonságú lenne, akkor $|A_{\pi(\ell)}| + |A_\gamma| = 2n$ metszet keletkezne, holott $|\,\mathbb{E}\,| < 2n$. Tehát π egy egyértelműen meghatározott $\{1, \ldots, d\} \to \{1, \ldots, d\}$ *fixpontmentes* leképezés azzal a tulajdonsággal, hogy

$$(\forall \ell \in \{1, \ldots, d\})\,(\forall b \in A_{\pi(\ell)})\,(\exists H \in \mathbb{E}) \\ \Big(S(x_\ell = a_\ell, x_{\pi(\ell)} = b) = H \cap S(x_\ell = a_\ell)\Big). \qquad (2)$$

Most megmutatjuk, hogy π *involúció*, azaz minden $i \in \{1, \ldots, d\}$-re $i = \pi(\pi(i))$. Indirekt módon tegyük fel ennek az ellenkezőjét. Ekkor azt is feltehetjük (hiszen ez csak indexelés kérdése), hogy $\pi(1) = 2$ és $\pi(2) = 3$.

Ha a (2) összefüggést $\ell = 1$-re alkalmazva fellépő $H \in \mathbb{E}$ hipersíkok mindegyike különbözne az $\ell = 2$ esetben fellépő hipersíkoktól, akkor $\mathbb{E}$-nek legalább $|A_{\pi(1)}| + |A_{\pi(2)}| = 2n$ eleme lenne, ami lehetetlen. Ezért van olyan $H \in \mathbb{E}$, amely $\ell = 1$ és $\ell = 2$ esetén is fellép (2)-nak megfelelően. Ehhez a közös $H \in \mathbb{E}$ hipersíkhoz létezik olyan $b_2 \in A_2 = A_{\pi(1)}$ és $b_3 \in A_3 = A_{\pi(2)}$, hogy

$$H \cap S(x_1 = a_1) = S(x_1 = a_1, x_2 = b_2) \text{ és } H \cap S(x_2 = a_2) = S(x_2 = a_2, x_3 = b_3).$$

Ennélfogva bármely $y_3, \ldots, y_d, z_1, z_4, \ldots, z_d \in \mathbb{R}$ esetén

$$u = (a_1, b_2, y_3, \ldots, y_d) \in H \text{ és } v = (z_1, a_2, b_3, z_4, \ldots, z_d) \in H. \qquad (3)$$

Először tegyük fel, hogy $a_2 = b_2$. Nyilvánvaló, hogy $S(x_2 = a_2)$ minden pontja előáll $\lambda u + (1-\lambda)v$ alakban, (3)-nek megfelelő alkalmas u és v pontokkal. Ezért $S(x_2 = a_2) \subseteq H$. Mivel H nem tartalmazhat valódi részhalmazként egy másik hipersíkot, az $S(x_2 = a_2) = H \in \mathbb{E}$ ellentmondáshoz jutunk.

Legyen most $a_2 \neq b_2$. Ekkor $\mathbb{R}^d \setminus \big(S(x_2 = a_2) \cup S(x_2 = b_2)\big)$ minden pontja előáll $\lambda u + (1-\lambda)v$ alakban, (3) szerinti u-val és v-vel. Így $\mathbb{R}^d \setminus \big(S(x_2 = a_2) \cup S(x_2 = b_2)\big) \subseteq H$, azaz $\mathbb{R}^d$ előáll három hipersík, jelesül a (d-dimenzióban 0 Lebesgue-mértékű) $S(x_j = a_2)$, $S(x_j = b_2)$ és H hipersíkok uniójaként, ami ismét ellentmondás. Ezzel beláttuk, hogy π involúció. (Megjegyzendő, hogy páratlan d esetén innen az állítás máris következik, hiszen akkor nincs fixpontmentes $\{1, \ldots, d\} \to \{1, \ldots, d\}$ involúció.)

A következő lépésben azt fogjuk igazolni, hogy bármely $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ esetén

$$\text{ha } j \notin \{i, \pi(i)\}, \text{ akkor } \pi(j) \in \{i, \pi(i)\}. \qquad (4)$$

Indirekt módon tegyük fel, hogy ez nem igaz. Az egyszerűbb jelölés érdekében azt is feltehetjük, hogy $(i, \pi(i), j, \pi(j)) = (1, 2, 3, 4)$, azaz $\pi(1) = 2$ és $\pi(3) = 4$. A korábbi megfontoláshoz hasonlóan, az (2) összefüggést $\ell = 1$-re és $\ell = 3$-ra alkalmazva megint csak lesz egy közös $H \in \mathbb{E}$. Ezért alkalmas $b_2 \in A_{\pi(1)} = A_2$ és $b_4 \in A_{\pi(3)} = A_4$ esetén $S(x_1 = a_1, x_2 = b_2) = H \cap S(x_1 = a_1)$ és $S(x_3 = a_3, x_4 = b_4) = H \cap S(x_3 = a_3)$.

Tehát bármely $s_3, \ldots, s_d, t_1, t_2, t_5, \ldots, t_d \in \mathbb{R}$ esetén $\bar{u} = (a_1, b_2, s_3, \ldots, s_d) \in H$ és $\bar{v} = (t_1, t_2, a_3, b_4, t_5, \ldots, t_d) \in H$. Azonban $\mathbb{R}^d$ bármely eleme $\lambda\bar{u} + (1-\lambda)\bar{v} \in H$ alakú, ami ellentmondás és bizonyítja (4)-et.

Az előkészületek után a $d \geqslant 3$ esetben az állítás könnyen adódik. Legyen $j \in \{1, \ldots, d\} \setminus \{1, \pi(1)\}$. (4)-ből kapjuk, hogy $\pi(j) = 1$ vagy $\pi(j) = \pi(1)$. Azonban mindkét eset ellentmondáshoz vezet: ha $\pi(j) = 1$, akkor akkor $j = \pi(\pi(j)) = \pi(1)$, ha pedig $\pi(j) = \pi(1)$, akkor $j = \pi(\pi(j)) = \pi(\pi(1)) = 1$.

3. megoldás (Varjú Péter, versenyen kívül). d szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy van a lefogó hipersíkok között n olyan, amelyek mindegyike merőleges ugyanarra a koordinátatengelyre, és amelyek együtt már lefogják a rácsot.

A $d = 2$ (síkbeli eset) ugyanúgy bizonyítható, mint az 1. megoldásban. Tegyük fel, hogy az állítás $d-1$-re igaz. Ha valamely i-re ($1 \le i \le n$) a $V_i = \{x_1 = i\} \subset \mathbb{R}^d$ nincs a lefogó hipersíkok között, akkor a rácsnak a V_i-vel való R_i metszetére és a lefogó hipersíkok V_i-vel való metszeteire alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, így van olyan $L_1^{(i)}, \ldots, L_n^{(i)}$ a lefogó hipersíkok között, hogy az $L_k^{(i)} \cap V_i$ $d-2$-dimenziós síkok merőlegesek pl. az x_2-tengelyre, és együtt lefedik R_i-t. Ha V_j ($j \neq i$) szintén nincs a lefedő hipersíkok között, akkor a V_j-hez definiált $L_1^{(j)} \cap V_j, \ldots, L_n^{(j)} \cap V_j$ $d-2$ dimenziós síkok is mind az x_2-tengelyre lesznek merőlegesek, ellenkező esetben ugyanis $L_1^{(i)}, \ldots, L_n^{(i)}, L_1^{(j)}, \ldots, L_n^{(j)}$ $2n$ számú különböző hipersík lenne, ami szintén lehetetlen $2n > 2n-3$ miatt. Ezt is indirekt úton bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $L_k^{(i)} = L_s^{(j)}$. Ekkor $L_k^{(i)} \cap V_i$ párhuzamos $L_s^{(j)} \cap V_j$-vel, hiszen V_i párhuzamos V_j-vel, tehát $L_s^{(j)} \cap V_j$ merőleges az x_2-tengelyre. Ha $L_s^{(j)} \cap V_j$ egy, az x_2-tengelytől különböző tengelyre is merőleges, akkor az $L_s^{(j)} \cap V_j$ $d-2$-dimenziós síknak a V_j $d-1$-dimenziós síkra vonatkozó kodimenziója legalább 2, ami lehetetlen.

Most vegyük észre, hogy ha $L_k^{(i)} \cap V_i$ merőleges az x_2-tengelyre, akkor az $L_k^{(i)}$ hipersík merőleges az $[x_1, x_2]$ síkra. Valóban, az $L_k^{(i)} \cap V_i$ 2 kodimenziós sík $\mathbb{R}$-ben merőleges az x_1-tengelyre, az x_2 tengelyre és az $L_k^{(i)}$ sík n_i normálvektorára, tehát n_i-nek párhuzamosnak kell lenni az $[x_1, x_2]$ síkkal.

Azt kaptuk tehát, hogy ha csak az $[x_1, x_2]$ síkra merőleges lefogó hipersíkokat tartjuk meg, akkor már azok is lefedik a rácsot (ha egy V_i a lefogó hipersíkok között van, akkor ő is merőleges az $[x_1, x_2]$ síkra). Mármost vetítsünk mindent az $[x_1, x_2]$ síkra; ezzel visszavezettük a problémát a $d = 2$ esetre.

Megjegyzés. A feladat állítása éles abban az értelemben, hogy $d \geqslant 2$ esetén a kockarács lefedhető $2n-2$ hipersíkkal úgy, hogy a fedő hipersíkok egyike sem hagyható el.

Érkezett 6 dolgozat. Teljes megoldást adott Gyenizse Gegrő, Nagy Dániel és Tomon István. Értékelhető részeredményeket ért el Kiss Viktor és Mészáros Szabolcs.

4. feladat (Maróti Miklós). Legyen G, H két véges csoport, és legyen $\varphi, \psi\colon G \to H$ két szürjektív, de nem injektív homomorfizmus. Igazoljuk, hogy létezik G-nek az egységelemtől különböző olyan eleme, amelynek képe φ és ψ mellett azonos.

Megoldás (Szakács Nóra). Azt igazoljuk, hogy ha $\varphi, \psi\colon G \to H$ két olyan szürjektív homomorfizmus a G véges csoportról H-ra, amely kizárólag G egységeleméhez rendeli ugyanazt az elemet, akkor φ és ψ szükségképpen injektív is. Ehhez elég belátni, hogy $|G| \leq |H|$, azaz elég megadni egy $G \to H$ injektív leképezést. Megmutatjuk, hogy a $\tau\colon G \to H$, $g \mapsto (g\varphi)^{-1} \cdot g\psi$ leképezés injektív. Ha ugyanis a $g_1, g_2 \in G$ elemekre $g_1\tau = g_2\tau$, akkor $(g_1\varphi)^{-1} \cdot g_1\psi = (g_2\varphi)^{-1} \cdot g_2\psi$, amiből $g_1\psi \cdot (g_2\psi)^{-1} = g_1\varphi \cdot (g_2\varphi)^{-1}$ következik. Mivel φ és ψ homomorfizmus, ez az egyenlőség ekvivalens azzal, hogy $(g_1g_2^{-1})\psi = (g_1g_2^{-1})\varphi$. Tehát a $g_1g_2^{-1}$ elemhez φ és ψ ugyanazt az elemet rendeli, ezért a feltevésünk értelmében $g_1g_2^{-1}$ az egységelem, azaz $g_1 = g_2$. Ezzel beláttuk, hogy τ valóban injektív.

Érkezett 12 dolgozat. Megoldotta Backhausz Tibor, Gerencsér Máté, Gyenizse Gergő, Kiss Viktor, Mészáros Szabolcs, Nagy Csaba, Ozsvárt László, Szakács Nóra és Tomon István. Kissé hiányos megoldást adott Csige Tamás. Javítható hibával megoldotta Nagy Dániel.

5. feladat (Totik Vilmos)**.** Legyenek n, k pozitív egészek. Az $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ és $a \in \mathbb{R}^k$ vektorok esetén legyen $f_a(x) := \|x - a\|^{2n}$, ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi norma, és tekintsük az f_a $(a \in \mathbb{R}^k)$ függvények által generált $Q_{n,k}$ vektorteret. Melyik az a legnagyobb N egész szám, amelyre $Q_{n,k}$ tartalmazza az $x_1, \ldots, x_k$ összes olyan polinomját, amelynek teljes fokszáma legfeljebb N?

Megoldás (Kitűző)**.** A megoldásban „fokszám" mindig a teljes fokszámot jelenti.

Tetszőleges a esetén

$$f_a(x) = \|x - a\|^{2n} = \left(\|x - a\|^2\right)^n = \left(\sum_{j=1}^{k} (x_j - a_j)^2\right)^n$$

az $x_1, \ldots, x_k$ változók legfeljebb $2n$-edfokú polinomja, ezért $Q_{n,k}$ egy altere az összes, legfeljebb $2n$-edfokú polinomok Π_{2n} lineáris terének, ezért polinomoknak egy véges dimenziós vektortere. Ez a vektortér zárt az $\mathbb{R}^k$ kompakt halmazain egyenletes konvergencia által definiált topológiában (a Π_{2n} elemeinek a konvergenciája ebben a topológiában ekvivalens azzal, hogy a polinomsorozat együtthatóiból álló sorozatok konvergensek). Másrészt, ha $P(x) = \sum_{j=1}^{l} c_j f_{a_j}(x)$, akkor $P(x + a)$ $= \sum_{j=1}^{l} c_j f_{a_j - a}(x)$, tehát $Q_{n,k}$ zárt az $x \mapsto x + a$ eltolásokra nézve is. Ezért, ha $P \in Q_{n,k}$, akkor

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x_j} = \lim_{h \to 0} \frac{P(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_k) - P(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k)}{h}$$

is $Q_{n,k}$-ban van, ami azt jelenti, hogy $Q_{n,k}$ zárt a parciális deriválásra, és így a tetszőleges rendű parciális deriválásra.

Mivel $\|x\|^{2n} = (\|x\|^2)^n = f_0(x) \in Q_{n,k}$, ezért ennek a függvénynek tetszőleges x_j szerinti parciális deriváltja is $Q_{n,k}$-ban van, vagyis $n\|x\|^{2n-2}2x_j \in Q_{n,k}$. Mégegyszer differenciálva az eredményt x_j szerint azt kapjuk, hogy $2n\|x\|^{2n-2} + 4n(n-1)\|x\|^{2n-4}x_j^2 \in Q_{n,k}$. Ezeket a függvényeket összegezve a $j = 1, 2, \ldots, k$ indexekre az adódik, hogy $(nk + 2n(n-1))\|x\|^{2n-2}$, és így $\|x\|^{2n-2}$ is $Q_{n,k}$-ban van. Következésképpen, az összes $\|x\|^{2n-2}P_1(x)$ alakú polinom, ahol P_1 az x koordinátáinak legfeljebb elsőfokú polinomja, $Q_{n,k}$-hoz tartozik.

Ha az előbb bizonyított

$$\|x\|^{2n} \in Q_{n,k} \Longrightarrow \|x\|^{2n-2} \in Q_{n,k}$$

implikációt (ill. annak bizonyítását) ismételten alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy $\|x\|^{2n-2m} \in Q_{n,k}$ bármely $m = 0, 1, \ldots, n$ esetén.

Ezek után m szerinti teljes indukcióval könnyű belátni, hogy az $\|x\|^{2n-2m}P_m(x)$ alakú polinomok minden $m = 0, 1, \ldots, n$ esetén $Q_{n,k}$-hoz tartoznak, ahol P_m az $x_1, \ldots, x_k$ változók legfeljebb m-edfokú tetszőleges polinomja. Valóban, ezt már bizonyítottuk $m = 0, 1$-re, és most tegyük fel, hogy az állítás igaz valamilyen $m < n$ esetén. Akkor tetszőleges $\|x\|^{2n-2m}x_1^{s_1} \cdots x_k^{s_k}$, $s_1 + \cdots + s_k \le m$, is $Q_{n,k}$-hoz tartozik, ahonnan x_j szerinti differenciálással azt kapjuk, hogy a

$$\begin{aligned} 2(n-m)\|x\|^{2n-2m-2}x_1^{s_1} \cdots x_{j-1}^{s_{j-1}} x_j^{s_j+1} x_{j+1}^{s_{j+1}} \cdots x_k^{s_k} \\ +s_j\|x\|^{2n-2m}x_1^{s_1} \cdots x_{j-1}^{s_{j-1}} x_j^{s_j-1} x_{j+1}^{s_{j+1}} \cdots x_k^{s_k} \end{aligned}$$

polinom is $Q_{n,k}$-ban van. Az indukciós feltevés miatt ennek az összegnek a második tagja $Q_{n,k}$-beli, ezért az

$$\|x\|^{2n-2m-2}x_1^{s_1} \cdots x_{j-1}^{s_{j-1}} x_j^{s_j+1} x_{j-1}^{s_{j-1}} \cdots x_k^{s_k}$$

kifejezések is $Q_{n,k}$-ban vannak. Ezek között előfordul az $\|x\|^{2n-2m-2}$-nek tetszőleges, legfeljebb $(m+1)$-ed fokú egytagúval való szorzata, kivéve magát a $\|x\|^{2n-2m-2}$ kifejezést, amiről viszont már korábban láttuk, hogy $Q_{n,k}$-hoz tartozik. Ezzel az indukciós lépést bebizonyítottuk.

Másrészt vegyük észre, hogy az

$$(x, a) = \sum_{j=1}^{k} x_j a_j, \qquad x = (x_1, \ldots, x_k),\ a = (a_1, \ldots, a_k),$$

jelöléssel

$$P_a(x) = (\|x\|^2 - 2(x, a) + \|a\|^2)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \|x\|^{2n-2m}\Big(2(x, a) + \|a\|^2\Big)^m,$$

és itt a jobb oldalon $\|x\|^{2n-2m}P_m(x)$, $m = 0, \ldots, n$, alakú polinomok összege áll. Következésképpen, $Q_{n,k}$ megegyezik az $\|x\|^{2n-2m}P_m(x)$, $m = 0, \ldots, n$, alakú polinomok lineáris kombinációinak, azaz ezen polinomok összegeinek halmazával.

Ha $k = 1$, akkor $Q_{n,1}$, vagyis az $x^{2n-2m}P_m(x)$, $m = 0, \ldots, n$, $x \in \mathbb{R}$ alakú polinomok összegeinek halmaza tartalmazza az összes, legfeljebb $2n$-edfokú polinomot (hiszen tartalmazza az összes x^p, $0 \le p \le 2n$, hatványt), tehát ekkor a feladatban definiált N szám egyenlő $2n$-nel.

Legyen most $k \ge 2$. Az $m = n$ eset azt adja, hogy $Q_{n,k}$ tartalmazza az összes, legfeljebb n-edfokú polinomot. Ugyanakkor belátjuk, hogy $x_1^{n+1} \notin Q_{n,k}$, tehát ekkor a feladat kérdésére a válasz $N = n$. Valóban, az indirekt bizonyításhoz tegyük fel, hogy lehetséges egy

$$x_1^{n+1} = \sum_{m=0}^{n} (\|x\|^2)^{n-m} P_m(x)$$

előállítás. Akkor ez egy algebrai azonosság, és így érvényes komplex $x_1, \dots, x_n$ változókra is. Legyen $x_2 = ix_1$, $x_3 = x_4 = \dots = x_k = 0$. Ezen választás esetén $\|x\|^2 = 0$, tehát az előző azonosság az

$$x_1^{n+1} = P_n(x_1, ix_1, 0, \dots, 0)$$

alakot ölti, ami nyilvánvalóan lehetetlen, hiszen a jobb oldal az x_1 változónak egy legfeljebb n-edfokú (komplex) polinomja.

Megjegyzés. A $Q_{n,k}$ feladatban szereplő előállítása speciális esetként tartalmazza Jose L. Martinez-Morales egy eredményét, miszerint $m, n \geq 0$ esetén $Q_{2(n+m),2}$ tartalmazza az $r^{n+2m} \cos(n\theta)$ függvényt, ahol $re^{i\theta} = x_1 + ix_2$ (Functions on the plane as combinations of powers of distances to points. Abstr. Appl. Anal. 2010, Art. ID 713241).

Érkezett 3 dolgozat. A feladatot megoldotta Backhausz Tibor, Nagy Csaba és Tomon István.

6. feladat (Bárány Imre)**.** Legyenek $C_1, \dots, C_d$ kompakt és összefüggő halmazok $\mathbb{R}^d$-ben, és tegyük fel, hogy mindegyik C_i konvex burka tartalmazza az origót. Bizonyítandó, hogy minden i-re van olyan $c_i \in C_i$, amelyekre az origó benne van a $c_1, \dots, c_d$ pontok konvex burkában.

Megoldás (A kitűző megoldása alapján)**.** Jelölje egy K halmaz konvex burkát $\mathrm{conv}K$, relatív belsejét $\mathrm{relint}(K)$.

Az indirekt bizonyításhoz tegyük fel, hogy nem igaz az állítás, és legyenek $a_1 \in C_1, \dots, a_d \in C_d$ azok a pontok, melyekre az $S = \mathrm{conv}\{a_1, \dots, a_d\}$ szimplex és az O origó távolsága a legkisebb, továbbá legyen $z \in S$ az origóhoz legközelebbi pont. Legyen most H az origót tartalmazó, Oz-re merőleges hipersík. Minden i-re létezik $b_i \in C_i \cap H$, mert $O \in \mathrm{conv}C_i$ és C_i összefüggő. Ha van olyan a_{i_0}, amelyre $z \in \mathrm{conv}\{a_i \,|\, i \neq i_0\}$, akkor a $\mathrm{conv}\{b_{i_0}, a_i \,|\, i \neq i_0\}$ szimplex közelebb van az origóhoz mint S, ami ellentmondás. Ebből adódik, hogy az S szimplex $(d-1)$-dimenziós és z az S relatív belsejében, $\mathrm{relint}(S)$-ben van.

Legyen $e_1, e_2, \dots, e_d$ az $\mathbb{R}^d$ standard bázisa, és legyen Q a

$$\mathrm{conv}\{e_1, -e_1, e_2, -e_2, \dots, e_d, -e_d\}$$

keresztpolitóp határa. Definiáljuk az $f\colon Q \to \mathbb{R}^d$ leképezést úgy, hogy $f(e_i) = a_i$, $f(-e_i) = b_i$ és aztán terjesszük ki f-et Q-ra szimpliciálisan. Vegyük észre, hogy

- Q bármely lapjának az f melletti képe olyan szimplex, aminek csúcsai egy-egy pont C_i-ből,
- f lineáris homeomorfizmus $\mathrm{conv}\{e_1, \dots, e_d\}$ és S között,
- $f(Q)$ minden pontja az S síkja és a H között (vagy ezeken) van,
- ha egy y pontra $f(y)$ az S síkjában van, akkor $y \in \mathrm{conv}\{e_1, \dots, e_d\}$.

Ha az Oz egyenesnek csak z a közös pontja $f(Q)$-val, akkor $f(Q) \setminus \mathrm{relint}(S)$ merőleges vetülete S hipersíkjára nem tartalmazza z-t. Így ez a vetület a z pontból centrálisan kivetíthető S határára. Mivel fentiek alapján $f(Q) \setminus \mathrm{relint}(S) = f\big(Q \setminus \mathrm{relint}(\mathrm{conv}\{e_1, \dots, e_d\})\big)$, ezért végül kapunk egy folytonos leképezést $Q \setminus$

relint(conv$\{e_1,\ldots,e_d\}$)-ből conv$\{e_1,\ \ldots,e_d\}$ határára, ami a határon identitás. De ez ellentmond annak, hogy a $(d-1)$-dimenziós gömbnek (amivel $Q\setminus$relint(conv$\{e_1,\ \ldots,e_d\}$) homeomorf) nem retraktuma a $(d-2)$ dimenziós gömbfelület (amivel conv$\{e_1,\ldots,e_d\}$ határa homeomorf); ld. Patterson, Topológia vagy Hatcher, Algebraic topology könyveket.

Ha viszont az Oz egyenesnek van egy z-től különböző x metszéspontja $f(Q)$-val, akkor a konstrukció miatt az x pont csak az $[O,z)$ szakaszon lehet, és ezért közelebb van O-hoz, mint z. Ugyanakkor x egy conv$\{c_1,\ldots,c_d\}$, $c_i\in C_i$, $1\le i\le k$, szimplexben van, ami ellentmond annak, hogy S volt az O-hoz legközelebbi szimplex.

Ez az ellentmondás igazolja az állítást.

Érkezett 3 dolgozat. Értékelhető részmegoldást adott Szakács Nóra.

7. feladat (Totik Vilmos)**.** Bizonyítsuk be, hogy nemnegatív valós számok tetszőleges $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatára

$$\liminf_{n\to\infty}\left(n^2\left(4a_n(1-a_{n-1})-1\right)\right)\leqslant\frac{1}{4}.$$

Megoldás (Ryszard Szwarz, versenyen kívül)**.** Könnyű látni, hogy az állítás ekvivalens a következővel: ha létezik olyan c konstans és N szám, hogy

$$a_n(1-a_{n-1})\ge\frac{1}{4}+\frac{c}{16n^2}$$

teljesül $n\ge N$ esetén , akkor $c\le 1$. Ezt fogjuk bebizonyítani.

Feltehetjük, hogy $c>0$. Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges. Ha $c'=c-\varepsilon$, akkor létezik olyan $N'\ge N$, hogy

$$a_n(1-a_{n-1})\ge\frac{1}{4}+\frac{c'}{4(4n^2-1)},$$

feltéve, hogy $n\ge N'$. Ha $d:=c'/4$, akkor

$$a_n(1-a_{n-1})\ge\frac{1}{4}+\frac{d}{4n^2-1}\quad(n\ge N'). \tag{5}$$

Azt kell megmutatni, hogy bármilyen kicsi is volt $\varepsilon>0$, ebből $d\le 1/4$ következik.

Mivel $d\ge 0$, vagyis $a_n(1-a_{n-1})\ge 1/4$, és $a_{n-1}(1-a_{n-1})\le 1/4$, tudjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat nem-csökkenő, tehát létezik a $\lim_{n\to\infty}a_n=:\overline{a}$ határérték, amely eleget tesz a $4\overline{a}(1-\overline{a})\ge 1$ egyenlőtlenségnek. Ez azt jelenti, hogy $\overline{a}=1/2$, és $a_n=(1-\delta_n)/2$ teljesül alkalmas $\delta_n\in[0,1]$ számokkal. Ha ezt az előállítást (5)-be helyettesítjük, akkor a

$$\delta_{n-1}-\delta_n-\delta_{n-1}\delta_n\ge\frac{d}{n^2-\frac{1}{4}} \tag{6}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ebből a

$$\delta_{n-1}-\delta_n\ge\frac{d}{n-\frac{1}{2}}-\frac{d}{n+\frac{1}{2}}$$

becslés adódik. Ezek $n+1$-től végtelenig történő összeadásával a

$$\delta_n\ge\frac{d}{n+\frac{1}{2}}\quad(\ n\ge N) \tag{7}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Vezessük be a

$$D := \inf_{n\geq N'} \delta_n\left(\frac{n+1}{2}\right), \quad \varepsilon_n := \delta_n\left(\frac{n+1}{2}\right) - D \tag{8}$$

jelöléseket. (7) szerint $D \geq d$. (8)-at (6)-ba helyettesítve kapjuk:

$$\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n \geq \frac{D^2-D+d}{n^2-\frac{1}{4}} + \frac{D\varepsilon_n}{n-\frac{1}{2}} + \frac{D\varepsilon_{n-1}}{n+\frac{1}{2}}.$$

Tehát

$$\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n \geq \frac{D^2-D+d}{n^2-\frac{1}{4}} = (D^2-D+d)\left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right).$$

Ezeket összeadva

$$\varepsilon_n \geq \frac{D^2-D+d}{n+\frac{1}{2}}$$

adódik, amelyből D definíciója miatt

$$0 \geq D^2 - D + d = \left(D - \frac{1}{2}\right)^2 + d - \frac{1}{4}.$$

Ebből már látszik, hogy $d \leq 1/4$.

Megjegyzés. A $c \leq 1$ becslés éles, mivel

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4(4n^2-1)} = \frac{n}{2n+1}\left(1 - \frac{n-1}{2(n-1+1)}\right).$$

Érkezett 8 dolgozat. Megoldotta a feladatot Gerencsér Máté, Gyenizse Gergő, Nagy Csaba, Nagy Dániel és Tomon István. Értékelhető részeredményt ért el Virosztek Dániel.

8. feladat (Krisztin Tibor)**.** Adott $a \leqslant 1/e$ nullától különböző valós szám esetén legyenek $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ olyan nem valós számok, amelyekre $ze^z + a = 0$ teljesül, továbbá legyenek $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ tetszőlegesek. Mutassuk meg, hogy az $f(x) := \Re\big(\sum_{j=1}^n c_j e^{z_j x}\big) = \mathrm{Re}\big(\sum_{j=1}^n c_j e^{z_j x}\big)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvénynek minden 1 hosszúságú zárt intervallumban van zérushelye.

Megoldás (Gerencsér Máté és a kitűző megoldása alapján)**.** Vegyük észre, hogy ha $z \in \mathbb{C}$-re fennáll $ze^z + a = 0$ és $c \in \mathbb{C}$, akkor $\frac{d}{dx}ce^{zx} = ce^{z(x-1)}ze^z = -ace^{z(x-1)}$ teljesül, továbbá $\mathbb{R} \ni x \mapsto \Re(ce^{zx}) \in \mathbb{R}$ analitikus, és $\frac{d}{dx}\Re(ce^{zx}) = -a\Re(ce^{z(x-1)})$. Innen következik, hogy f analitikus, és $f'(x) = -af(x-1)$. $f \equiv 0$ esetén az állítás triviális. Tegyük fel, hogy $f \not\equiv 0$.

2. Ha $\Re z_j = \Re z_k$, akkor a $ze^z + a = 0$ egyenlet alapján $|z_j|e^{\Re z_j} = |a| = |z_k|e^{\Re z_k}$-ből $|z_j| = |z_k|$ következik. Így $z_k = z_j$ vagy $z_k = \overline{z_j}$. Ha z-re fennáll $ze^z + a = 0$, akkor $\overline{z}$-re is.

Ha r, ϕ, μ, ν valósak, $c = re^{i\phi}$, $z = \mu + i\nu$, akkor $\Re(ce^{zx}) = re^{\mu x}\cos(\phi + \nu x)$. Így $c, d \in \mathbb{C}$, $z = \mu + i\nu$ esetén $\Re(ce^{zx} + de^{\overline{z}x})$ írható $ae^{\mu x}\sin(\nu x + b)$ alakban alkalmas valós a, b számokkal.

A fentiek alapján — az indexek felcserélésével — $f(x)$ írható

$$f(x)=\sum_{j=1}^{m} a_j e^{\mu_j x}\sin(\nu_j x+b_j)$$

alakban, ahol $a_j, b_j, \mu_j, \nu_j \in \mathbb{R}$, $\mu_j+i\nu_j$-re teljesül a $ze^z+a=0$ egyenlet, $\nu_j>0$, $j\in\{1,\dots,m\}$, továbbá

$$\mu_1>\mu_2>\ldots>\mu_m.$$

Mivel $f\not\equiv 0$, az is feltehető, hogy $a_1\neq 0$.

3. Állítás: $\nu_1>\pi$. Legyen $z=\mu+i\nu$ a $ze^z+a=0$ megoldása, és tegyük fel, hogy $0<\nu\le\pi$. Ekkor $z+ae^{-z}=0$ is teljesül, és így μ,ν-re

$$\mu=-ae^{-\mu}\cos\nu,\quad \nu=ae^{-\mu}\sin\nu.$$

Innen $a\neq 0$ és $\nu>0$ miatt $\nu\neq\pi$. Ezért $\mu=-\nu\cot\nu$ és $a=A(\nu)$ adódik, ahol $A(\nu)=\frac{\nu}{\sin\nu}e^{-\nu\cot\nu}$, $\nu\in(0,\pi)$. Az $A:(0,\pi)\to(0,\infty)$ függvény folytosan differenciálható, $A(\nu)\to 1/e$, ha $\nu\to 0+$, és

$$A'(\nu)=e^{-\nu\cot\nu}\frac{(\sin\nu-\nu\cos\nu)^2+\nu^2\sin^2\nu}{\sin^3\nu}>0.$$

Ekkor az $a=A(\nu)$ egyenlet nem teljesülhet, ellentmondás. Tehát $\nu_1>\pi$.

4. A 2. lépés alapján

$$f(x)=e^{\mu_1 x}\left(a_1\sin(\nu_1 x+b_1)+\sum_{j=2}^{m}a_j e^{(\mu_j-\mu_1)x}\sin(\nu_j x+b_j)\right),$$

ahol $a_1\neq 0$, $\mu_1>\mu_j$, $j=2,\dots,m$. Innen $\nu_1>\pi$ (3. lépés) alapján következik olyan x_0 létezése, hogy az (x_0,∞) intervallumon f-nek végtelen sok zérushelye van, és a szomszédosak távolsága 1-nél kisebb.

5. Tegyük fel, hogy a és b az f két szomszédos zérushelye, amelyekre $x_0<b-1<a<b$ teljesül. Ilyenek vannak a 4. lépés miatt. Ekkor a középérték-tétel miatt van $c\in(a,b)$, amelyre $f'(c)=0$. Az $f'(x)=-af(x-1)$ egyenlet és $a\neq 0$ alapján $f(c-1)=0$ következik. Továbbá, a $c-1$ zérushelyre $c-1\in(a-1,b-1)\subset(a-1,a)$ teljesül. Így lesz f-nek a-tól balra, a-tól 1-nél kisebb távolságra is zérushelye.

Mivel f zérushelyei nem torlódhatnak a végesben (f analitikus), ezzel az eljárással balra lépegetve a következő zérushelyre, minden $x<b$ esetén az $(x-1,x)$ intervallumban lesz f-nek zérushelye. $x\ge b$ esetén a 4. lépés eredménye garantálja zérushely létezését $(x-1,x)$-ben.

Megjegyzések. Az állítás nyílt intervallumra is igaz. Az $a>1/e$ esetben az állítás nem igaz, mivel ekkor $\nu_1\in(0,\pi)$, és így $f(x)=e^{\mu_x}\sin(\nu_1 x)$ zérushelyeinek a távolsága 1-nél nagyobb.

Érkezett 2 dolgozat. Megoldotta a feladatot Gerencsér Máté és Tomon István.

9. feladat (Hatvani László)**.** Legyen $x\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}$ differenciálható függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha minden $t>1$ esetén teljesül az

$$x'(t)=-x^3(t)+\frac{t-1}{t}x^3(t-1)$$

egyenlőség, akkor $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

1. megoldás (Nagy Csaba megoldása alapján)**.** Vezessük be az

$$x^\infty := \limsup_{t\to\infty} x(t), \qquad M_y := \max_{[y,y+1]} x(t)$$

jelöléseket. Ekkor $x^\infty = \limsup_n M_n$, ahol $n \in N$. Először belátjuk, hogy $x^\infty \leqslant 0$.

Ha $M_y \leqslant 0$ valamely y-ra, akkor $M_{y+1} \leqslant 0$. Legyen ugyanis $c \in [y+1, y+2]$ olyan, hogy $M_{y+1} = x(c)$ (több ilyen c is létezhet). Ha $c = y+1$, akkor $M_{y+1} = x(y+1) \leqslant M_y \leqslant 0$. Ha $c > y+1$, akkor $x'(c) \geqslant 0$, így az egyenletből

$$0 \leqslant x'(c) = -x^3(c) + \frac{c-1}{c} x^3(c-1),$$

ezért

$$x^3(c) \leqslant \frac{c-1}{c} x^3(c-1). \tag{9}$$

Mivel $c - 1 \in (y, y+1]$, $x(c-1) \leqslant M_y \leqslant 0$, így $M_{y+1} = x(c) \leqslant 0$. Tehát mindkét esetben $M_{y+1} \leqslant 0$, ebből indukcióval következik, hogy minden $k \in N$ esetén $M_{y+k} \leqslant 0$ és ekkor $x^\infty \leqslant 0$.

A továbbiakban feltesszük, hogy $M_n > 0$ minden n-re.

Ha $M_{y+1} = x(c)$ és $c > y+1$, akkor (9) miatt

$$M_{y+1} = x(c) \leqslant \sqrt[3]{\frac{c-1}{c}} x(c-1) \leqslant \sqrt[3]{\frac{y+1}{y+2}} M_y. \tag{10}$$

Ha $c = y+1$, akkor is $M_{y+1} \leqslant M_y$. Indukcióval adódik $M_{y+k} \leqslant M_y$. Ekkor az is teljesül, hogy ha $y \leqslant z$, akkor $M_y \geqslant M_z$. Valóban, legyen $x(c) = M_z$. Ekkor $c \in [y+k, y+k+1]$ valamilyen k egész számra, így $M_z = x(c) \leqslant M_{y+k} \leqslant M_y$. M_n tehát egy monoton csökkenő pozitív sorozat. Tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} M_n = d > 0$. Azt állítjuk, hogy minden n-re

$$M_{n+4} \leqslant \sqrt[3]{1 - \frac{d^2}{d^2+1} \cdot \frac{1}{n+5}} \cdot M_n. \tag{11}$$

Két esetet különböztetünk meg: *(a)* van olyan $t \in [n+1, n+4]$, amire $x'(t) > 0$. Ekkor t nem lehet maximumhely, így $M_t = x(c)$ valamilyen $c > t$-re, ezért (10)-ből $M_t \leqslant \sqrt[3]{\frac{t}{t+1}} \cdot M_{t-1}$. Kapjuk, hogy

$$M_{n+4} \leqslant M_t \leqslant \sqrt[3]{\frac{t}{t+1}} \cdot M_{t-1} \leqslant \sqrt[3]{\frac{n+4}{n+5}} \cdot M_n.$$

Mivel

$$\frac{n+4}{n+5} = 1 - \frac{1}{n+5} \leqslant 1 - \frac{d^2}{d^2+1} \cdot \frac{1}{n+5}$$

és $M_n > 0$, (11) teljesül. A *(b)* esetben minden $t \in [n+1, n+4]$ esetén $x'(t) \leqslant 0$ és $x(t)$ monoton csökkenő az $[n+1, n+4]$ intervallumon. A Lagrange-féle középértéktétel szerint van olyan $t \in [n+2, n+3]$, amire

$$x'(t) = x(n+3) - x(n+2) \geqslant x(n+3) - x(n+1).$$

A monotonitás és $x(n+1) = M_{n+1} > 0$ miatt

$$x'(t) = -x^3(t) + \frac{t-1}{t}x^3(t-1) \leqslant -x^3(n+3) + \frac{n+2}{n+3}x^3(n+1),$$

tehát

$$x(n+3) + x^3(n+3) \leqslant x(n+1) + \frac{n+2}{n+3}x^3(n+1).$$

Legyen $k = x(n+1) = M_{n+1} \geqslant d > 0$ és $r = \frac{x(n+3)}{x(n+1)} = \frac{M_{n+3}}{M_{n+1}} \in (0,1)$. Ezekkel a jelölésekkel az előző egyenlőtlenség $rk + r^3k^3 \leqslant k + \frac{n+2}{n+3}k^3$. Egyszerűsítve k-val és felhasználva $r^3 < r$-t kapjuk, hogy $r^3(1+k^2) \leqslant 1 + \frac{n+2}{n+3}k^2$, amiből $k \geqslant d$ miatt átrendezéssel

$$\sqrt[3]{1 - \frac{d^2}{d^2+1} \cdot \frac{1}{n+5}} \geqslant r = \frac{M_{n+3}}{M_{n+1}} \geqslant \frac{M_{n+4}}{M_n}$$

adódik, ami éppen (11). Képezzük (11) alapján az alábbi szorzatokat:

$$\prod_{i=0}^{m-1} M_{4i+5} \leqslant \prod_{i=0}^{m-1} \left(\sqrt[3]{1 - \frac{d^2}{d^2+1} \cdot \frac{1}{4i+6}} M_{4i+1} \right).$$

Egyszerűsítés után és $1 - x \leqslant e^{-x}$ $(x \geq 0)$ miatt

$$(M_{4m+1})^3 \leqslant (M_1)^3 \cdot \prod_{i=0}^{m-1} \left(1 - \frac{d^2}{d^2+1} \cdot \frac{1}{4i+6} \right) < (M_1)^3 \exp\left(\frac{-d^2}{d^2+1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{4i+6} \right)$$

adódik. Ezért M_{4m+1} tart 0-ba, ami ellentmond $d > 0$-nak, tehát $x^\infty \leqslant 0$.

Ha $x(t)$ megoldása a feladatban szereplő egyenletnek, akkor $-x(t)$ is, amiből kapjuk, hogy $x^\infty \geqslant 0$, vagyis $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

2. megoldás (Kitűző)**.** Azt fogjuk belátni, hogy $\lim\limits_{t\to\infty} x^4(t) = 0$.

Mivel

$$\left(\frac{1}{4}x^4(t)\right)' = -x^6(t) + \frac{t-1}{t}x^3(t)x^3(t-1) \leq -\left(1 - \frac{t-1}{2t}\right)x^6(t) + \frac{t-1}{2t}x^6(t-1),$$

könnyű látni, hogy az $M(t) := \max\limits_{t-1\leq s\leq t}\{x^4(s)\}$ nem-növekvő. Bebizonyítjuk, hogy $\lim\limits_{t\to\infty} M(t) = 0$. Ha ez nem igaz, akkor létezik olyan $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ sorozat és $\varepsilon > 0$, hogy $t_{i-1} + 1 \leq t_i \leq t_{i-1} + 3$, $i = 2, 3, \ldots$, és $x^4(t_i) \geq \varepsilon^4$. Mivel M korlátos, x is korlátos, és a feladatban megkívánt egyenlőség szerint x' is korlátos. Vagyis van olyan $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, hogy $t_i - \delta \leq t \leq t_i + \delta$ esetén $x^4(t) > (\varepsilon/2)^4$.

Egészítsük ki az $x^4/4$ függvényt úgy, hogy monoton legyen:

$$\begin{aligned}
V(t) &:= \frac{1}{4}x^4(t) + \frac{1}{2}\int_{t-1}^{t} x^6(s)\,ds;\\
V'(t) &= -x^6(t) + \frac{t-1}{t}x^3(t)x^3(t-1) + \frac{1}{2}(x^6(t) - x^6(t-1)) \leq\\
&\leq -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t-1}{t}\right)x^6(t) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t-1}{t}\right)x^6(t-1) \leq 0.
\end{aligned}$$

Ekkor

$$V(t_i+\delta) \le V(0) - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^6 \sum_{k=1}^{i} \int_{t_k-\delta}^{t_k+\delta} \left(1 - \frac{t-1}{t}\right) dt \to -\infty, \text{ ha } i \to \infty,$$

ami ellentmond annak, hogy $V(t) \ge 0$.

Érkezett 4 dolgozat. Megoldotta a feladatot Gerencsér Máté, Gyenizse Gergő és Nagy Csaba. Értékelhető részeredményt ért el Mészáros Szabolcs.

10. feladat (Pap Gyula)**.** Legyenek $X_0, \xi_{i,j}, \varepsilon_k \ \ (i,j,k \in \mathbb{N})$ független, nemnegatív egész értékű valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\xi_{i,j} \ \ (i,j \in \mathbb{N})$ azonos eloszlásúak, $\varepsilon_k \ \ (k \in \mathbb{N})$ is azonos eloszlásúak, $\mathbb{E}(\xi_{1,1}) = 1$, továbbá $\mathbb{E}(X_0^\ell) < \infty$, $\mathbb{E}(\xi_{1,1}^\ell) < \infty$ és $\mathbb{E}(\varepsilon_1^\ell) < \infty$ valamely $\ell \in \mathbb{N}$ esetén. Tekintsük az $X_n := \varepsilon_n + \sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j} \ \ (n \in \mathbb{N})$ valószínűségi változókat, ahol $\sum_{j=1}^{0} \xi_{n,j} := 0$. Vezessük be az $M_n := X_n - X_{n-1} - \mathbb{E}(\varepsilon_n) \ \ (n \in \mathbb{N})$ sorozatot. Bizonyítandó, hogy van olyan legfeljebb $\ell/2$ fokú P_ℓ polinom, melyre $\mathbb{E}(M_n^\ell) = P_\ell(n) \ \ (n \in \mathbb{N})$.

Megoldás (Gerencsér Máté megoldása alapján)**.** Először megmutatjuk, hogy van olyan legfeljebb ℓ fokú Q_ℓ polinom, melyre $\mathbb{E}(X_n^\ell) = Q_\ell(n) \ \ (n \in \mathbb{N})$. Ezt az állítást ℓ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás triviális $\ell = 0$ esetén. Most tegyük fel, hogy az állítás igaz $0, 1, \dots, \ell-1$ esetén. Ekkor

$$\mathbb{E}(X_n^\ell) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} \varepsilon_n^{\ell-i} \left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j}\right)^i\right] = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} \mathbb{E}(\varepsilon_1^{\ell-i})\, \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j}\right)^i\right].$$

A polinomiális tétellel

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j}\right)^i &= \sum_{\substack{i_1+\dots+i_{X_{n-1}}=i,\\ i_1,\dots,i_{X_{n-1}} \in \mathbb{Z}_+}} \frac{i!}{i_1! \cdots i_{X_{n-1}}!}\, \xi_{n,1}^{i_1} \cdots \xi_{n,X_{n-1}}^{i_{X_{n-1}}} \\ &= \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+mk_m=i,\\ k_1,\dots,k_m \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \leqslant m \leqslant i}} \frac{i!}{(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}\cdots(m!)^{k_m}} S_{k_1,\dots,k_m}(\xi_{n,1},\dots,\xi_{n,X_{n-1}}),\end{aligned}$$

ahol $S_{k_1,\dots,k_m}(y_1,\dots,y_{X_{n-1}})$ az

$$y_1 \dots y_{k_1} y_{k_1+1}^2 \dots y_{k_1+k_2}^2 \dots y_{k_1+\dots+k_{m-1}+1}^m \dots y_{k_1+\dots+k_m}^m$$

polinom által generált X_{n-1} változós szimmetrikus polinom. Az $S_{k_1,\dots,k_m}(\xi_{n,1},\dots,\xi_{n,X_{n-1}})$ összeg tagjai azonos eloszlásúak, a tagszám

$$\begin{aligned}&\binom{X_{n-1}}{k_1}\binom{X_{n-1}-k_1}{k_2}\cdots\binom{X_{n-1}-k_1-\dots-k_{m-1}}{k_m} \\ &\qquad = \frac{X_{n-1}(X_{n-1}-1)\cdots(X_{n-1}-k_1-k_2-\dots-k_m+1)}{k_1!k_2!\cdots k_m!}\end{aligned}$$

független a tagoktól, ezért az $\mathbb{E}[S_{k_1,\dots,k_m}(\xi_{n,1},\dots,\xi_{n,X_{n-1}})]$ várható érték meghatározására alkalmazható a Wald-azonosság. Az $S_{k_1,\dots,k_m}(\xi_{n,1},\dots,\xi_{n,X_{n-1}})$ összeg tagszáma X_{n-1} polinomja, melynek fokszáma $k_1+\cdots+k_m \leqslant k_1+2k_2+\cdots+mk_m = i$. Ez a fokszám csak az $S_i(\xi_{n,1},\dots,\xi_{n,X_{n-1}})$ összeg esetén i, amikor a tagszám $\binom{X_{n-1}}{i}$, a tagok közös várható értéke $\mathbb{E}(\xi_{n,1}\dots\xi_{n,i}) = \mathbb{E}(\xi_{n,1})\dots\mathbb{E}(\xi_{n,i}) = 1$, és a $\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}}\xi_{n,j}\right)^i$ kifejtésében hozzá tartozó együttható $i!$. Ezeket felhasználva

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}}\xi_{n,j}\right)^i\right] = \mathbb{E}[X_{n-1}(X_{n-1}-1)\cdots(X_{n-1}-i+1)] + \mathbb{E}[Q'_{i-1}(X_{n-1})],$$

ahol Q'_{i-1} legfeljebb $i-1$ fokú polinom. Az $\mathbb{E}(X_n^\ell)$ kifejtése alapján

$$\mathbb{E}(X_n^\ell) = \mathbb{E}[X_{n-1}(X_{n-1}-1)\cdots(X_{n-1}-\ell+1)] + \mathbb{E}[Q'_{\ell-1}(X_{n-1})] + \sum_{i=0}^{\ell-1}\mathbb{E}[Q''_i(X_{n-1})],$$

ahol Q''_i legfeljebb i fokú polinom. Az indukciós feltétel alapján

$$\mathbb{E}(X_n^\ell) = \mathbb{E}(X_{n-1}^\ell) + Q'''_{\ell-1}(n-1),$$

ahol $Q'''_{\ell-1}$ legfeljebb $\ell-1$ fokú polinom. Így

$$\mathbb{E}(X_n^\ell) = \mathbb{E}(X_0^\ell) + \sum_{k=1}^n Q'''_{\ell-1}(k-1) = Q_\ell(n),$$

ahol Q_ℓ legfeljebb ℓ fokú polinom.

Ezután hozzáfogunk a feladat állításának bizonyításához.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n^\ell) &= \mathbb{E}\left[\left((\varepsilon_n - \mathbb{E}(\varepsilon_n)) + \sum_{j=1}^{X_{n-1}}(\xi_{n,j}-1)\right)^\ell\right] \\ &= \sum_{i=0}^\ell \binom{\ell}{i}\mathbb{E}[(\varepsilon_1-\mathbb{E}(\varepsilon_1))^{\ell-i}]\,\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}}(\xi_{n,j}-1)\right)^i\right].\end{aligned}$$

Újra a polinomiális tétellel

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}}(\xi_{n,j}-1)\right)^i \\ &\quad= \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+mk_m=i,\\ k_1,\dots,k_m\in\mathbb{Z}_+,\ 1\leqslant m\leqslant i}} \frac{i!}{(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}\cdots(m!)^{k_m}} S_{k_1,\dots,k_m}(\xi_{n,1}-1,\dots,\xi_{n,X_{n-1}}-1).\end{aligned}$$

Ismét használhatjuk a Wald-azonosságot az $\mathbb{E}[S_{k_1,\dots,k_m}(\xi_{n,1}-1,\dots,\xi_{n,X_{n-1}}-1)]$ várható értékek meghatározására, azonban most $\mathbb{E}(\xi_{n,j}-1)=0$ $(j\in\mathbb{N})$ miatt $k_1\geqslant 1$ esetén az $S_{k_1,\dots,k_m}(\xi_{n,1}-1,\dots,\xi_{n,X_{n-1}}-1)$ összegben a tagok közös várható értéke 0, ezért $\mathbb{E}[S_{k_1,\dots,k_m}(\xi_{n,1}-1,\dots,\xi_{n,X_{n-1}}-1)]=0$. Így

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}}(\xi_{n,j}-1)\right)^i\right] \\ &\quad= \sum_{\substack{2k_2+\cdots+mk_m=i,\\ k_2,\dots,k_m\in\mathbb{Z}_+,\ 1\leqslant m\leqslant i}} \frac{i!}{(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}\cdots(m!)^{k_m}} S_{0,k_2,\dots,k_m}(\xi_{n,1}-1,\dots,\xi_{n,X_{n-1}}-1).\end{aligned}$$

Mivel az $S_{0,k_2,\dots,k_m}(\xi_{n,1}-1,\dots,\xi_{n,X_{n-1}}-1)$ összeg tagszáma X_{n-1} polinomja, melynek fokszáma $k_2+\dots+k_m \leqslant (2k_2+3k_2+\dots+mk_m)/2 = i/2$, ezért

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}}(\xi_{n,j}-1)\right)^i\right] = \mathbb{E}[R_i(X_{n-1})],$$

ahol R_i legfeljebb $i/2$ fokú polinom. Az első állítás alapján $\mathbb{E}[R_i(X_{n-1})] = R_i'(n)$, ahol R_i' legfeljebb $i/2$ fokú polinom. Az $\mathbb{E}(M_n^\ell)$ kifejtése alapján ebből következik, hogy $\mathbb{E}(M_n^\ell) = P_\ell(n)$, ahol P_ℓ legfeljebb $\ell/2$ fokú polinom.

2. megoldás (Kitűző)**.** Független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegeinek momentumaival kapcsolatban felhasználjuk a következő lemmát:

Lemma. *Legyenek* Z_k $(k\in\mathbb{N})$ *független, azonos eloszlású valószínűségi változók úgy, hogy* $\mathbb{E}\big[|Z_1|^\ell\big] < \infty$ *valamely* $\ell\in\mathbb{N}$ *esetén.*

(i) *Ha* $\mathbb{E}(Z_1)\neq 0$, *akkor van olyan* ℓ *fokú* Q_ℓ *polinom, melynek főegyütthatója* $\big[\mathbb{E}(Z_1)\big]^\ell$, *és*

$$\mathbb{E}\big[(Z_1+\dots+Z_N)^\ell\big] = Q_\ell(N) \qquad (N\in\mathbb{N}).$$

(ii) *Ha* $\mathbb{E}(Z_1) = 0$, *akkor van olyan legfeljebb* $\ell/2$ *fokú* R_ℓ *polinom, hogy*

$$\mathbb{E}\big[(Z_1+\dots+Z_N)^\ell\big] = R_\ell(N) \qquad (N\in\mathbb{N}).$$

A Lemma bizonyítása. (i) A polinomiális tétellel

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[(Z_1+\dots+Z_N)^\ell\big] &= \sum_{\substack{\ell_1+\dots+\ell_N=\ell,\\ \ell_1,\dots,\ell_N\in\mathbb{Z}_+}} \frac{\ell!}{\ell_1!\cdots\ell_N!}\,\mathbb{E}(Z_1^{\ell_1}\cdots Z_N^{\ell_N})\\
&= \sum_{\substack{\ell_1+\dots+\ell_N=\ell,\\ \ell_1,\dots,\ell_N\in\mathbb{Z}_+}} \frac{\ell!}{\ell_1!\cdots\ell_N!}\,\mathbb{E}(Z_1^{\ell_1})\cdots\mathbb{E}(Z_1^{\ell_N})\\
&= \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+sk_s=\ell,\\ k_1,\dots,k_s\in\mathbb{Z}_+,\ 1\leqslant s\leqslant\ell}} \binom{N}{k_1}\binom{N-k_1}{k_2}\cdots\binom{N-k_1-\dots-k_{s-1}}{k_s}\\
&\qquad\times\frac{\ell!}{(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}\cdots(s!)^{k_s}}\big[\mathbb{E}(Z_1)\big]^{k_1}\cdots\big[\mathbb{E}(Z_1^s)\big]^{k_s}.
\end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned}
&\binom{N}{k_1}\binom{N-k_1}{k_2}\cdots\binom{N-k_1-\dots-k_{s-1}}{k_s}\\
&\qquad= \frac{N(N-1)\cdots(N-k_1-k_2-\dots-k_s+1)}{k_1!k_2!\cdots k_s!}
\end{aligned}$$

polinomja az N változónak, melynek fokszáma $k_1+\dots+k_s\leqslant\ell$, így valóban van olyan legfeljebb ℓ fokú Q_ℓ polinom, hogy $\mathbb{E}\big[(Z_1+\dots+Z_N)^\ell\big] = Q_\ell(N)$. Mivel ℓ fokú tag csak $k_1+\dots+k_s=\ell$ esetén keletkezhet, ami csak úgy lehet, hogy $s=1$ és $k_1=\ell$, és az ekkor keletkező tag $N(N-1)\cdots(N-\ell+1)\big[\mathbb{E}(Z_1)\big]^\ell$, ezért Q_ℓ valóban ℓ-fokú, és főegyütthatója $\big[\mathbb{E}(Z_1)\big]^\ell$.

(ii). Újra a polinomiális tétellel

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[(Z_1+\cdots+Z_N)^\ell\big] &= \sum_{\substack{\ell_1+\cdots+\ell_N=\ell,\\ \ell_1,\dots,\ell_N\in\mathbb{Z}_+}} \frac{\ell!}{\ell_1!\cdots\ell_N!}\,\mathbb{E}(Z_1^{\ell_1}\cdots Z_N^{\ell_N})\\
&= \sum_{\substack{\ell_1+\cdots+\ell_N=\ell,\\ \ell_1,\dots,\ell_N\in\mathbb{Z}_+\setminus\{1\}}} \frac{\ell!}{\ell_1!\cdots\ell_N!}\,\mathbb{E}(Z_1^{\ell_1})\cdots\mathbb{E}(Z_1^{\ell_N})\\
&= \sum_{\substack{2k_2+3k_3+\cdots+sk_s=\ell,\\ k_2,\dots,k_s\in\mathbb{Z}_+,\ 2\leqslant s\leqslant\ell}} \binom{N}{k_2}\binom{N-k_2}{k_3}\cdots\binom{N-k_2-\cdots-k_{s-1}}{k_s}\\
&\qquad\times\frac{\ell!}{(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}\cdots(s!)^{k_s}}\big[\mathbb{E}(Z_1^2)\big]^{k_2}\cdots\big[\mathbb{E}(Z_1^s)\big]^{k_s}.
\end{aligned}
$$

Most az

$$
\begin{aligned}
&\binom{N}{k_2}\binom{N-k_2}{k_3}\cdots\binom{N-k_2-\cdots-k_{s-1}}{k_s}\\
&\qquad=\frac{N(N-1)\cdots(N-k_2-k_3-\cdots-k_s+1)}{k_2!k_3!\cdots k_s!}
\end{aligned}
$$

polinom fokszáma $k_2+\cdots+k_s\leqslant\ell/2$, így kapjuk a Lemma második állítását.

A megoldás folytatása. Először megmutatjuk, hogy van olyan legfeljebb ℓ fokú P_ℓ polinom, hogy $\mathbb{E}(X_n^\ell)=P_\ell(n)$ $(n\in\mathbb{N})$. Ezt az állítást ℓ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Jelölje $\mathcal{F}_n$ az $X_1,\dots,X_n$ valószínűségi változók által generált σ-algebrát. Mivel $\mathbb{E}(X_n\,|\,\mathcal{F}_{n-1})=X_{n-1}+\mathbb{E}(\varepsilon_n)$, így $\mathbb{E}(X_n)=\mathbb{E}(X_{n-1})+\mathbb{E}(\varepsilon)$, amiből $\mathbb{E}(X_n)=n\,\mathbb{E}(\varepsilon)+\mathbb{E}(X_0)$ $(n\in\mathbb{N})$, ezért az állítás igaz $\ell=1$ esetén. Most tegyük fel, hogy az állítás igaz $1,\dots,\ell-1$ esetén. Mivel

$$
X_n^\ell=\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}}\xi_{n,j}+\varepsilon_n\right)^\ell=\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}\left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}}\xi_{n,j}\right)^k\varepsilon_n^{\ell-k},
$$

és a $\xi_{n,j}$, ε_n $(j\in\mathbb{N})$ valószínűségi változók függetlenek egymástól és az $\mathcal{F}_{n-1}$ σ-algebrától, így

$$
\mathbb{E}(X_n^\ell\,|\,\mathcal{F}_{n-1})=\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}\,\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{N}\xi_{n,j}\right)^k\right]\Bigg|_{N=X_{n-1}}\mathbb{E}(\varepsilon_n^{\ell-k}).
$$

A Lemma (i) állítása és $\mathbb{E}(\xi_{1,1})=1$ alapján $\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^N\xi_{n,j}\Big)^k\Big]$ az N változó k fokú polinomja, melynek főegyütthatója 1. Ezért van olyan legfeljebb $\ell-1$ fokú $Q_{\ell-1}$ polinom, hogy $\mathbb{E}(X_n^\ell\,|\,\mathcal{F}_{n-1})=X_{n-1}^\ell+Q_{\ell-1}(X_{n-1})$ $(n\in\mathbb{N})$. Az indukciós feltevés alapján van olyan legfeljebb $\ell-1$ fokú $\widetilde{P}_{\ell-1}$ polinom, melyre $\mathbb{E}[Q_{\ell-1}(X_{n-1})]=\widetilde{P}_{\ell-1}(n-1)$ $(n\in\mathbb{N})$. Ezért $\mathbb{E}(X_n^\ell)=\mathbb{E}(X_{n-1}^\ell)+\widetilde{P}_{\ell-1}(n-1)$ $(n\in\mathbb{N})$, amiből $\mathbb{E}(X_n^\ell)=\sum_{i=1}^n\widetilde{P}_{\ell-1}(i-1)+\mathbb{E}(X_0^\ell)=P_\ell(n)$ $(n\in\mathbb{N})$, ahol P_ℓ legfeljebb ℓ fokú polinom.

Ezután hozzáfogunk a feladat állításának bizonyításához. Nyilván

$$M_n = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} \big(\xi_{n,j} - \mathbb{E}(\xi_{n,j})\big) + \big(\varepsilon_n - \mathbb{E}(\varepsilon_n)\big),$$

ezért

$$M_n^\ell = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \left(\sum_{j=1}^{X_{n-1}} \big(\xi_{n,j} - \mathbb{E}(\xi_{n,j})\big) \right)^k \big(\varepsilon_n - \mathbb{E}(\varepsilon_n)\big)^{\ell-k}.$$

Mivel a $\xi_{n,j} - \mathbb{E}(\xi_{n,j})$, $\varepsilon_n - \mathbb{E}(\varepsilon_n)$ $(j \in \mathbb{N})$ valószínűségi változók függetlenek egymástól és az $\mathcal{F}_{n-1}$ σ-algebrától, így

$$\mathbb{E}(M_n^\ell \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{N} \big(\xi_{n,j} - \mathbb{E}(\xi_{n,j})\big) \right)^k \right] \Bigg|_{N=X_{n-1}} \mathbb{E}\left[(\varepsilon_n - \mathbb{E}(\varepsilon_n))^{\ell-k} \right].$$

A Lemma (ii) állítása alapján $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^N \big(\xi_{n,j} - \mathbb{E}(\xi_{n,j})\big)\right)^k\right]$ az N változó legfeljebb $k/2$ fokú polinomja, ezért $\mathbb{E}(M_n^\ell \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) = R_\ell(X_{n-1})$ $(n \in \mathbb{N})$, ahol R_ℓ legfeljebb $\ell/2$ fokú polinom. Felhasználva az $\mathbb{E}(X_n^k)$ $(k = 1, \ldots, \ell)$ momentumokról bizonyított állítást, azt kapjuk, hogy $\mathbb{E}(M_n^\ell) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_n^\ell \,|\, \mathcal{F}_{n-1})) = T_\ell(n)$ $(n \in \mathbb{N})$, ahol T_ℓ legfeljebb $\ell/2$ fokú polinom.

Érkezett 4 dolgozat. Megoldotta a feladatot Gerencsér Máté, Gyenizse Gergő, Tomon István és Virosztek Dániel.

Szeged, 2012. február 17.

A Versenybizottság