JELENTÉS A 2010. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 2010. október 22. és november 2. között rendezte meg a 2010. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, valamint 2010-ben egyetemet vagy főiskolát végzettek vehettek részt.

A Bolyai János Matematikai Társulat a verseny megrendezésére a következő bizottságot kérte fel: Ruzsa Imre (elnök), Ambrus Gergely és Matolcsi Máté (titkárok), Abért Miklós, Buczolich Zoltán, Keleti Tamás, Lempert László, Makai Endre, Móri Tamás, T. Sós Vera. A versenybizottság 11 feladatot tűzött ki.

A versenyre 4 versenyző összesen 18 megoldást nyújtott be, melyek közül 15 volt helyes (vagy lényegében helyes). Ezek értékelése után a versenybizottság a következő döntést hozta:

I. díjban részesül **Lovász László Miklós**, az ELTE harmadéves hallgatója.

II. díjat a Bizottság nem ad ki.

III. díjban részesül **Tomon István**, az ELTE másodéves hallgatója.

Indoklás:

Lovász teljes megoldást adott az 1., 2., 3., 4., 5., 6., 11. feladatokra. A 8. feladatra adott megoldása apró hibát tartalmaz. A 7. és 10. feladatoknál részeredményt bizonyít.

Tomon jó megoldást adott az 1., 2., 3., 5. feladatokra. A 4. feladatra adott megoldása hiányos.

A feladatok és megoldásaik

Minden feladat sorszáma után feltüntejük a kitűzők nevét.

1. Feladat (Balog Antal) Legyen p prím. Jelölje $N(p)$ azon x egész számok számát, melyekre $1 \leq x \leq p$ és

$$x^x \equiv 1 \pmod p\,.$$

Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan $c < 1/2$ és $p_0 > 0$ számok, hogy

$$N(p) \leq p^c,$$

amennyiben $p \geq p_0$.

Megoldás (a kitűző megoldása alapján). A megoldás során közismert elemi számelméleti összefüggések mellett felhasználjuk azt is, hogy

$$d(n) =: \sum_{d|n} 1 \leq n^\epsilon \tag{1}$$

minden $\epsilon > 0$–ra, amennyiben $n \geq n_0(\epsilon)$.
Picit általánosabban legyen $N(p\,; a)$ azon x egész számok száma, melyekre

$$x^x \equiv a \pmod p, \quad 1 \leq x \leq p.$$

Jelölje továbbá $\operatorname{ord}(a)$ az a rendjét modulo p. Azt bizonyítjuk be, hogy minden $t|p-1$–re

$$S(t) =: \sum_{\operatorname{ord}(a)|t} N(p\,; a) \leq p^{1/3+\epsilon}\, t^{2/3} \tag{2}$$

minden $\epsilon > 0$–ra, amennyiben $p \geq p_0(\epsilon)$. A $t = 1$ eset nyilván a feladat megoldása $c = 1/3 + \epsilon$ kitevővel.

$\operatorname{ord}(a)|t$ pontosan azt jelenti, hogy $a^t \equiv 1 \pmod p$, azaz $S(t)$ azon x egész számok száma, melyekre

$$x^{tx} \equiv 1 \pmod p, \quad 1 \leq x \leq p-1 \tag{3}$$

($x = p$ nyilván nem megoldás.) Legyen g egy primitív gyök modulo p, és legyen $\operatorname{ind}(a)$ az a indexe g–re vonatkoztatva, azaz $a \equiv g^{\operatorname{ind}(a)} \pmod p$. Ezen a nyelven (3) azzal ekvivalens, hogy

$$tx \operatorname{ind}(x) \equiv 0 \pmod{p-1}, \quad 1 \leq x \leq p-1,$$

illetve

$$x \operatorname{ind}(x) \equiv 0 \pmod{\frac{p-1}{t}}, \quad 1 \leq x \leq p-1. \tag{4}$$

Ezek után csoportosítjuk (4) megoldásait

$$\operatorname{lnko}(x, \frac{p-1}{t}) = d$$

szerint (lnko a legnagyobb közös osztót jelöli), azaz rögzített $d|(p-1)/t$ mellett legyen $x = yd$, ahol

$$\operatorname{ind}(dy) \equiv 0 \pmod{\frac{p-1}{td}}, \quad 1 \leq y \leq \frac{p-1}{d}, \quad \operatorname{lnko}(y, \frac{p-1}{td}) = 1. \tag{5}$$

Legyen az (5)–öt kielégítő y–ok halmaza $\mathcal{Y}_d$ és legyen az általuk képviselt mod p maradékosztályok halmaza $\mathcal{W}_d$. Nyilván $\#\mathcal{Y}_d = \#\mathcal{W}_d$, továbbá

$$S(t) =: \sum_{\operatorname{ord}(a)|t} N(p\,; a) = \sum_{d|\frac{p-1}{t}} \#\mathcal{Y}_d = \sum_{d|\frac{p-1}{t}} \#\mathcal{W}_d. \tag{6}$$

Két triviális becslés is adható $\#\mathcal{Y}_d$–re (5)–ből. Az első feltételnek pontosan td maradék-osztály tesz eleget, míg a másodiknak pontosan $(p-1)/d$ egész szám tesz eleget, azaz

$$\#\mathcal{Y}_d \leq \min(td, \frac{p-1}{d}) \tag{7}$$

Csak ezeket használva már bizonyítható egy a tételünkhöz hasonló állítás $1/3$ helyett $1/2$ kitevővel. A következőkben egy harmadik, kicsit mélyebb becslést is adunk $\#\mathcal{Y}_d$–re, ami (7)–tel együtt elegendő lesz.
Bevezetünk egy utolsó jelölést,

$$s(b) = \#\{(y_1, y_2) \ : \ y_1, y_2 \in \mathcal{Y}_d, \ y_1 y_2 \equiv b \pmod p\}.$$

Vegyük észre, hogy $s(b)$ csak akkor nem 0, ha b egyike a $w_1 w_2$ alakú maradékosztályoknak, amelyekből (5) első feltételéből következően nincs sok, hiszen

$$\operatorname{ind}(d^2 w_1 w_2) \equiv \operatorname{ind}(dy_1) + \operatorname{ind}(dy_2) \equiv 0 \pmod{\frac{p-1}{td}},$$

azaz legfeljebb td ilyen maradékosztály lehet. Ebből pedig

$$(\#\mathcal{Y}_d)^2 = \sum_b s(b) \leq td \max_b (s(b)). \tag{8}$$

Tetszőleges b–hez, ha $s(b)$ számolja az y_1, y_2 párt, akkor $y_1y_2 = b + \ell p$, és (5) második feltételéből $b + \ell p \le (p-1)^2/d^2$. Ilyen ℓ legfeljebb $1 + p/d^2$ lehet, azaz (1)–re hivatkoava

$$s(b) \le \sum_{\ell} d(b + \ell p) \le (1 + \frac{p}{d^2})p^{\epsilon},$$

amennyiben $p \ge p_0(\epsilon)$. Ezt (8)–ba írva (7) úgy módosul, hogy

$$\#\mathcal{Y}_d \le \min\left(dt, \frac{p-1}{d}, (\sqrt{td} + \sqrt{\frac{pt}{d}})p^{\epsilon}\right). \tag{9}$$

$d \le (p/t)^{1/3}$–ra az első, $d > (p/t)^{2/3}$–ra a második, míg a maradék esetben a harmadik becslést használva a minimumból, a tétel állítása most már egy rutin számítással következik, amikor (9)–et (6)–ba írjuk, és ismét hivatkozunk (1)–re.

A feladatra Lovász László Miklós és Tomon István adtak helyes megoldást.

2. Feladat (Abért Miklós, Lippner Gábor, Csóka Endre, Terpai Tamás) Legyen G megszámlálhatóan végtelen, d-reguláris, összefüggő, csúcstranzitív gráf. Mutassuk meg, hogy G-ben van teljes párosítás.

Megoldás (Lovász László Miklós) Feltehető, hogy G-ben nincs se többszörös él, se hurokél. Ha van hurokél, a csúcstranzitivitás miatt minden csúcson ugyanannyi van, ezért ezeket elhagyhatjuk, és kisebb d_1-re d_1-reguláris, csúcstranzitív lesz, és az összefüggőség se romolhatott el. Ha van többszörös él, akkor ha minden párhuzamos élt eltörlünk (tehát ahol volt valamennyi él két csúcs között, ott egy marad), akkor az összefüggőség nem romlik el, és ami eredetileg automorfizmus volt, az marad. Ebből az is következik, hogy - esetleg kisebb d_2-re - d_2 -reguláris. A továbbiakban tehát feltesszük, hogy G egyszerű.
Először belátjuk, hogy minden véges halmaznak a foka legalább d (egy halmaz fokán a belőle kimenő éleket értjük, legyen H foka $d(H)$). Legyen k a legkisebb szám, ami előfordul véges halmaz fokaként, és legyen X egy minimális halmaz, aminek a foka k. (Mivel véges méretű halmazokat nézünk, van ilyen.) Tegyük fel, hogy van X-ben legalább két pont, v_1, és v_2. Ekkor van egy automorfizmus, ami v_1-et v_2-be viszi. Legyen X képe X_1, nyilván ennek is k a foka. Ekkor $X_1 \cap X$ tehát nemüres (v_2 mindkettőben benne van), ezért

$$d(X \cap X_1) + d(X \cup X_1) \le d(X) + d(X_1) = 2k$$

Mivel $X_1 \cup X$ is véges, a bal oldalon mindkét tag legalább k, így csak az lehet, hogy mindkettő egyenlő k-val. De ekkor $X \cap X_1 \subset X$, így mivel feltettük, hogy X minimális k-fokú halmaz, a kettő egyenlő, ez csak úgy lehet, hogy $X_1 = X$ (mivel a méretük egyforma). De ekkor az automorfizmust megszorítva X-re, annak egy automorfizmusát kapjuk. Mivel tetszőleges két X-beli v_1, v_2 pontra igaz, hogy van olyan automorfizmus, ami egymásba viszi őket, ez azt jelenti, hogy minden X-beli pontra az X-beli foka ugyanaz, legyen ez a. Ha X mérete l, akkor $l \ge a+1$, mivel egyszerű a gráf. Ekkor egy X-beli csúcs-ból $d-a$ él jön ki. Tehát X foka összesen $l(d-a) \ge (a+1)(d-a) \ge d$. Itt ez azért legalább d, mert $a = d$ nem lehet, hiszen ekkor nem jönne ki él X-ből, nem lenne összefüggő a gráf, tehát két pozitív egész szám összege $d+1$, ekkor a szorzatuk legalább d (Itt használjuk ki, hogy a gráf összefüggő).
Belátunk egy lemmát. Vizsgáljuk meg annak a feltételét, hogy ha egy tetszőleges G_1 véges gráfban a pontok két részre vannak osztva, A és B, mikor van olyan részhalmaza az éleknek, hogy minden csúcs foka legfeljebb egy, és minden A-beli csúcs foka pontosan egy. Fel fogjuk használni Tutte tételét arról, hogy mikor létezik teljes párosítás egy (véges) gráfban (ez a tétel szerepelt a tananyagban). A tétel a következő: akkor és csak akkor létezik teljes párosítás egy $G = (V, E)$

gráfban, ha bárhogy vesszünk egy $X \subset V$ halmazt, ha nézzük $G-X$-ben a páratlan komponensek számát, ez legfeljebb annyi, mint X mérete. (A tétel implicite kiköti, hogy minden komponens páros legyen, ha X-nek az üres halmazt vesszük.) Legyen B mérete b, vegyünk hozzá a gráfhoz b vagy $b+1$ csúcsot, ezek alkossák a C halmazt, úgy, hogy páros sok csúcs legyen. Bármely két C-beli csúcs között menjen él, és minden C-beli csúcsból minden B-beli csúcsba menjen él. Ekkor ebben a bővebb gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha eredetileg volt olyan, amit akartunk. Ugyanis ha az eredetiben volt, akkor amelyik B-beli csúcsnak nem jutott pár, azt kiegészíthetjük egy C-be menő éllel, majd ami kimarad C-ben, azokat is összepárosíthatjuk, a paritás miatt lehetséges lesz. Ha viszont a nagyobb gráfban van teljes párosítás, akkor egy A-beli csúccsal szomszédos él az eredeti gráfban is benne volt, így ha csak azokat az éleket vesszük, azok jók lesznek. Ezután Tutte tételét alkalmazzuk a bővebb gráfra. Vizsgáljuk meg, mi történhet, ha elhagyunk egy X halmazt $A \cup B \cup C$-ből. Először vegyük észre, hogy C-t vagy egészében érdemes belevenni, vagy egyik C-beli csúcsot se. Ugyanis ha van C-ből csúcs, ami nincs X-ben, akkor ha a többi C-beli csúcsot is kihagyjuk, csökken az X-beli csúcsok száma, viszont legfeljebb eggyel csökkenhet a páratlan komponensek száma (a komponensek nem változhatnak, csak az lehet, hogy az a komponens, amelyikben a C-beli csúcsok voltak, párosból páratlan méretű lesz). Ha viszont a teljes C benne van X-ben, nézzük mi történik, ha kivesszük őket. Két eset van. Az egyik, hogy volt B-beli csúcs, ami nincs benne X-ben. Ekkor az olyan komponensek, amelyekben szerepelt B-beli csúcs, egy komponensé válnak. Ilyenből legfeljebb b volt, és új komponens nem jöhetett létre. Ha minden B-beli csúcs benne volt X-ben, ekkor amikor kivesszük C-t, ők egy külön komponenst alkotnak, más komponensek nem egyesülnek. Ekkor azonban nem egyesültek komponensek. Tehát a komponensek száma mindkét esetben legfeljebb $b-1$-el csökkent (lehet hogy nőtt eggyel), viszont X mérete legalább b-vel csökkent. Tehát csak az olyan X halmazokat kell nézni, amelyek $A \cup B$-nek részhalmazai. Ekkor ha elhagyjuk, akkor a komponensek úgy néznek ki, hogy van egy, ami tartalmazza az összes megmaradt $B \cup C$-beli csúcsot, és esetleg vannak még A-beli komponensek. Vegyük észre, hogy az nem lehet, hogy X mérete pontosan eggyel kevesebb, mint a páratlan komponensek száma, mivel a gráfnak összesen páros sok csúcsa van. Ezért elég azt kikötni, hogy a tisztán A-beli csúcsokból álló páratlan komponensek számánál nagyobb-egyenlő legyen az X mérete. Viszont ezzel az eredeti gráfra kaptunk egy feltételt. Tehát azt kaptuk, hogy G_1-ben akkor és csak akkor van olyan párosítás, amiben minden A-beli csúcsnak jut él, ha bárhogy hagyunk el a csúcsoknak egy X részhalmazát, a maradék gráfnak az olyan páratlan komponenseinek a száma, amelyekben csak A-beli csúcsa van, legfeljebb annyian vannak, mint X mérete.

Most visszatérünk a feladatban szereplő G gráfhoz. Bebizonyítjuk, hogy bárhogy jelölünk ki véges sok csúcsot, legyenek ezek az A halmazban, van olyan részhalmaza az éleknek, hogy ezeknek a foka pontosan 1. Vegyük először bele a B halmazba az összes A-beli csúcs A-n kívüli szomszédját. Ellenőrizzuk ezt a lemma feltételét az eredeti G gráfban az $A \cup B$ csúcsok által feszített G_1 részgráfra. Ebben tudjuk, hogy minden pont foka legfeljebb d, és minden halmaznak, ami csak A-beli csúcsokból áll, a foka legalább d (mivel minden A-beli csúcs minden szomszédját bevettük). Tegyük fel, hogy van egy X halmaz, ami megsérti a feltételt, legyen a mérete k, és tegyük fel, hogy a maradék gráfnak $A_1, A_2, ..., A_{k+1}$ mind A-beli csúcsokból álló páratlan komponensek. Számoljuk meg, hány él megy X és valamelyik A_i között. Egyrész legalább $(k+1)d$, mivel minden A_i-ből megy ki legalább d él, és ezek csak X-be mehetnek. Viszont legfeljebb kd, mivel minden X-beli csúcs foka legfeljebb d. Ez ellentmondás. ($d = 0$ nem lehet, nem lenne a gráf összefüggő). Ezzel beláttuk, hogy a csúcsok egy tetszőleges részhalmazához van az éleknek egy részhalmaza, amelyre minden A-beli csúcs foka pontosan egy.

Alkalmazni fogjuk az ítélekkalkulus kompaktsági tételét. Ez a következő: Ha vannak ítéletváltozóink, és felettük egy Γ formulahalmaz, akkor és csak akkor lehet minden Γ-beli formulát kielégíteni, ha minden véges részhalmazát ki lehet elégíteni. Vegyünk be minden e élre egy A_e ítélétváltozót, az, hogy ez igaz, annak fog megfelelni, hogy az élt belevesszük az élek részhalmazába. Minden v csúcshoz vegyük be a következő formulákat: Ha $e_1, ..., e_d$ azok az élek, amelyek illeszkednek v-re, akkor

$$(A_{e_1} \cup A_{e_2} \cup ... \cup A_{e_d})$$

legyen egy formula, és minden $i \neq j$ élpárra vegyük be, hogy

$$\neg(A_{e_i} \cap A_{e_j})$$

(Az első akkor teljesül egy csúcsra, ha a foka legalább egy, a második minden élpárra akkor teljesül, ha legfeljebb egy.) Tegyük fel, hogy ezekből véges sok adva van. Ekkor csak véges sok csúcs lehet, ami szomszédos valamelyik formulában szereplő éllel. Ezért ha ezek a csúcsok az A halmazt alkotják, ha vesszük az előbb bizonyított állítás szerint azt az élhalmazt, amire minden A-beli csúcs foka egy, akkor az kielégíti ezt a véges sok formulát. Tehát a kompaktsági tétel szerint lehet úgy választani az ítéletváltozókat, hogy az összes formulát kielégítse, vagyis létezik teljes párosítás.

A feladatra Király Csaba, Lovász László Miklós és Tomon István adtak helyes megoldást.

3. Feladat (Gyárfás András) Egy n elemű alaphalmazon legfeljebb hány különböző $A_1, \ldots, A_t$ részhalmaz adható meg úgy, hogy bármely $1 \leq i < j < k \leq t$ esetén $A_i \cap A_k \subseteq A_j$?

Megoldás (Tomon István) Legyen H egy n elemű halmaz, és $A_1, \ldots A_t \subset H$ előírt tulajdonságú részhalmazok. Ekkor a feltételek alapján minden $x \in H$-ra és minden $i < j$-re igaz, hogy ha $x \in A_i$ és $x \in A_j$ akkor $x \in A_i, A_{i+1}, \ldots A_j$. Tehát ha I_x jelöli azon indexek halmazát, amelyekre $x \in A_i$, akkor I_x minden x esetén egy egész számokból álló intervallum. Mivel az $A_1, \ldots A_t$ halmazok páronként különbözők, ezért minden $1 \leq i \leq t-1$ esetén létezik olyan $x \in H$, hogy $x \in A_i$ de $x \notin A_{i+1}$, vagy fordítva $x \notin A_i$ de $x \in A_{i+1}$. Az első esetben az I_x intervallum végpontja i, míg a második esetben az I_x kezdőpontja $i+1$. Rendeljük hozzá minden i-hez $(1 \leq i \leq t-1)$ az egyik olyan $x \in H$ elemet, amelyre az A_i és A_{i+1} halmazok különböznek x-ben. Ekkor az előzőek alapján minden x-et legfeljebb 2 különböző i-hez rendelhettünk. Ezenkívül ha A_1 nem üres, akkor minden $y \in A_1$-et legfelejbb csak egy i-hez rendelhettünk, illetve ha A_t nem üres, akkor minden $z \in A_t$-t is csak legfeljebb egy i-hez rendelhettünk. Mivel ha $t \geq 2$ akkor A_1 és A_t közül legalább az egyik nem üres, így lesz olyan H-beli elem, amit legfelejbb egy i-hez rendeltünk. Így azt kapjuk, hogy az (i, x) számpárok száma egyrészt $t-1$ (hiszen ennyi i van), másrészt legfeljebb $2|H|-1$ (az x-ek szerint leszámolva). Tehát $t-1 \leq 2|H|-1$, azaz $t \leq 2n$.

Megmutatjuk, hogy $t = 2n$ fennállhat. Legyen $H = \{1, 2, \ldots, n\}$, és $1 \leq j \leq n$ esetén legyen $A_j = \{1, 2, \ldots, j\}$, és $n+1 \leq j \leq 2n-1$ esetén legyen $A_j = \{j+1-n, j+2-n, \ldots, n\}$, és $A_{2n} = \emptyset$. Ez $2n$ darab páronként különböző halmaz, amelyek könnyen láthatóan kielégítik a feltételeket.

A feladatra Király Csaba, Kutas Péter, Lovász László Miklós és Tomon István adtak helyes megoldást.

4. Feladat (Kós Géza) Bizonyítsuk be, hogy ha $n \geq 2$ és $I_1, I_2, \ldots, I_n$ főideálok egy egységelemes, kommutatív gyűrűben úgy, hogy bármely nemüres $H \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén $\sum\limits_{h \in H} I_h$ is főideál, akkor

$$I_2 I_3 I_4 \ldots I_n + I_1 I_3 I_4 \ldots I_n + \cdots + I_1 I_2 \ldots I_{n-1}$$

szintén főideál.

Megoldás (a kitűző megoldása alapján).

Lemma. Ha A, B és $A+B$ mindegyike főideál, akkor $A \cap B$ is főideál, és $(A+B)\cdot(A\cap B) = AB$. (Avagy, ha két elemnek létezik legnagyobb közös osztója és az előáll lineáris kombinációként, akkor létezik legkisebb közös többszörösük is, továbbá a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös szorzata megegyezik a két eredeti elem szorzatával.)

Bizonyítás.
Legyen $A = \mathbf{1}a$, $B = \mathbf{1}b$ és $A + B = \mathbf{1}d$. Ekkor léteznek olyan u, v, p, q gyűrűelemek, amikre $d = au + bv$, $a = pd$ és $b = qd$. Megmutatjuk, hogy $A \cap B = \mathbf{1}pqd$.
Mivel $\mathbf{1}pqd \subset \mathbf{1}pd = \mathbf{1}a = A$ és $\mathbf{1}pqd \subset \mathbf{1}qd = \mathbf{1}b = B$, teljesül, hogy $\mathbf{1}pqd \subset A \cap B$.
A fordított tartalmazás bizonyításához legyen $w \in A\cap B$ egy tetszőleges elem; azt kell igazolnunk, hogy $w \in \mathbf{1}pqd$. Legyen s, illetve t olyan gyűrűelem, amire $w = as = bt$. Ekkor

$$pds = as = w = bt = qdt, \quad \text{és}$$
$$w = pds = p(au + bv)s = pu \cdot as + pvs \cdot b = pu \cdot qdt + pvs \cdot qd = pqd \cdot (tu + vs) \in \mathbf{1}pqd.$$

Tehát az is igaz, hogy $A \cap B \subset \mathbf{1}pqd$, vagyis valóban $A \cap B = \mathbf{1}pqd$.
Végül,

$$(A + B) \cdot (A \cap B) = \mathbf{1}d \cdot \mathbf{1}pqd = \mathbf{1}pd \cdot \mathbf{1}qd = A \cdot B. \qquad \square$$

A feladat megoldása. Legyen tetszőleges $J_1, J_2, \ldots, J_k$ ideálokra

$$S(J_1, \ldots, J_k) = J_2J_3J_4 \ldots J_k + J_1J_3J_4 \ldots J_{k-1} + \ldots + J_1J_2 \ldots J_{k-1}.$$

Azt kell igazolnunk, hogy $S(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ főideál.
Az állítást indukcióval bizonyítjuk. $n = 2$-re az állítás triviális. Legyen most $n \geq 3$, tegyük fel, hogy kisebb n-ekre az állítás igaz, és legyen

$$F = I_1 + I_2 \quad \text{és} \quad M = S(I_1, I_3, I_4, \ldots, I_n) \cap S(I_2, I_3, I_4, \ldots, I_n).$$

A feltételek szerint F főideál. Ezen kívül bebizonyítjuk a következőket:
(1) M főideál;
(2) $S(I_1, I_2, \ldots, I_n) = FM$.

Az indukciós feltevés szerint $S(I_1, I_3, I_4, \ldots, I_n)$ és $S(I_2, I_3, I_4, \ldots, I_n)$ is főideál; az (1) igazolásához a Lemma alapján elég megmutatnunk, hogy az összegük is főideál.

$$\begin{gathered} S(I_1, I_3, I_4, \ldots, I_n) + S(I_2, I_3, I_4, \ldots, I_n) = \\ = \big(I_1 \cdot S(I_3, \ldots, I_n) + I_3I_4 \ldots I_n\big) + \big(I_2 \cdot S(I_3, \ldots, I_n) + I_3I_4 \ldots I_n\big) = \\ = (I_1 + I_2) \cdot S(I_3, \ldots, I_n) + I_3I_4 \ldots I_n = \\ = F \cdot S(I_3, \ldots, I_n) + I_3I_4 \ldots I_n = S(F, I_3, I_4, \ldots, I_n). \end{gathered}$$

Az $F = I_1 + I_2, I_3, \ldots, I_n$ sorozatra is teljesül, hogy bármely nemüres részhalmazának összege főideál. Az indukciós feltevés szerint tehát $S(F, I_3, I_4, \ldots, I_n)$ főideál. Ezzel az (1) állítást igazoltuk.

Mivel $I_3I_4 \ldots I_n$ szerepel az $S(I_1, I_3, I_4, \ldots, I_n)$-et és $S(I_2, I_3, I_4, \ldots, I_n)$-et definiáló összegekben,

$$\begin{gathered} I_1I_3I_4 \ldots I_n \subset I_1 \cdot \big(S(I_1, I_3, I_4, \ldots, I_n) \cap S(I_2, I_3, I_4, \ldots, I_n)\big) \subset \\ \subset (I_1 + I_2) \cdot \big(S(I_1, I_3, I_4, \ldots, I_n) \cap S(I_2, I_3, I_4, \ldots, I_n)\big) = FM. \end{gathered}$$

és hasonlóan $I_2I_3I_4 \ldots I_n \subset FM$.

A Lemma alapján $(I_1+I_2)\cdot(I_1\cap I_2)=I_1I_2$, ezért tetszőleges $3\le i_1<i_2<\ldots<i_{n-3}\le n$ esetén

$$\begin{aligned} I_1I_2I_{i_1}I_{i_2}\ldots I_{i_{n-3}} &\subset I_1I_2\cdot S(I_3,I_4,\ldots,I_n)= \\ &=(I_1+I_2)\cdot\big((I_1\cap I_2)\cdot S(I_3,I_4,\ldots,I_n)\big)\subset \\ \subset (I_1+I_2)\cdot&\Big(\big(I_1\cdot S(I_3,I_4,\ldots,I_n)\big)\cap\big(I_2\cdot S(I_3,I_4,\ldots,I_n)\big)\Big)\subset \\ \subset (I_1+I_2)\cdot&\big(S(I_1,I_3,I_4,\ldots,I_n)\cap S(I_2,I_3,I_4,\ldots,I_n)\big)=FM. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk, hogy az $I_2I_3I_4\ldots I_n$, $I_1I_3I_4\ldots I_n$, $\ldots$, $I_1I_2\ldots I_{n-1}$ ideálok mind részei FM-nek, tehát

$$S(I_1,I_2,\ldots,I_n)=I_2I_3I_4\ldots I_n+I_1I_3I_4\ldots I_n+\cdots+I_1I_2\ldots I_{n-1}\subset FM.$$

A fordított irányú tartalmazás is teljesül, mert

$$FM=\big(S(I_1,I_3,I_4,\ldots,I_n)\cap S(I_2,I_3,I_4,\ldots,I_n)\big)\cdot(I_1+I_2)\subset$$

$$\subset S(I_2,I_3,I_4,\ldots,I_n)\cdot I_1+S(I_1,I_3,I_4,\ldots,I_n)\cdot I_2\subset S(I_1,I_2,\ldots,I_n).$$

Tehát $S(I_1,I_2,\ldots,I_n)=FM$, ezzel (2)-t is igazoltuk és $S(I_1,I_2,\ldots,I_n)=FM$-et felírtuk két főideál szorzataként.

A feladatra Lovász László Miklós adott helyes megoldást. Tomon István megoldása hiányos.

5. Feladat (Solymosi József) Adottak a síkon a $v_1,\ldots,v_n$ és $w_1,\ldots,w_n$ vektorok a következő tulajdonságokkal: minden $1\le i\le n$-re $|v_i-w_i|\le 1$, valamint minden $1\le i<j\le n$ esetén $|v_i-v_j|\ge 3$ és $v_i-w_i\ne v_j-w_j$. Igazoljuk, hogy a $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$ és $W=\{w_1,\ldots,w_n\}$ halmazokra a $V+(V\cup W)$ összeghalmaz elemszáma legalább $cn^{3/2}$ valamely univerzális $c>0$ konstansra.

Megoldás (Lovász László Miklós) Készítsünk el egy $n\times n$-es táblázatot, az i-edik sor j-edik eleme legyen a v_i+v_j vektor. Minden összeghez nézzük meg, hányszor fordul elő. (Ha egy összeg felírható v_i+v_j alakban, ahol $i\ne j$, akkor persze legalább kétszer szerepel.) Színezzük ki a mezőket pirossal és kékkel: egy mező legyen piros, ha a benne szereplő összeg előfordul legalább $\sqrt{n}$-szer az egész táblázatban, különben legyen kék. Két eset van: vagy van olyan sor, amiben legalább a mezők fele piros, vagy nincs. Ha nincs, akkor minden sorban van legalább $n/2$ kék mező, ez összesen legalább $n^2/2$ kék mező. Mivel minden összeg, ami valamelyik kék mezőhöz tartozik, legfeljebb $\sqrt{n}$-szer fordul elő, ez összesen legalább $1/2n\sqrt{n}$ különböző összeg, ami $V+V$-ben van.
Legyen minden i-re $u_i=w_i-v_i$. A feltételek szerint $u_i\ne u_j$, ha $i\ne j$, és $|u_i|\le 1$.
Tegyük fel akkor, hogy van olyan sor, amiben van $n/2$ piros mező. Legyen ez az i-edik sor. Ha két különböző elemét vesszük, v_i+v_j, és v_i+v_k, ezek távolsága $|v_j-v_k|\ge 3$. Tehát ez $t\ge n/2$ darab különböző összeg, legyenek ezek $S_1,S_2,...,S_t$. Ha $S_j\in V+V$ előáll v_l+v_k alakban, akkor $S_j+u_k=v_l+v_k+u_k=v_l+w_k\in V+W$. Legyen $H=\{S_j+u_k|\exists l: S_j=v_l+v_k\}$. Ekkor tehát H minden eleme benne van $V+W$-ben. Minden S_j-hez legalább $\sqrt{n}$ különböző elemet tettünk be H-ba, mivel egy S_j szerepel legalább $\sqrt{n}$-szer a táblázatban, tehát van legalább $\sqrt{n}$ olyan k, hogy létezik l, amire $v_l+v_k=S_j$. (Itt kihasználjuk, hogy egy oszlopban vagy sorban legfeljebb egyszer szerepelhet egy összeg, mivel a v_i-k különbözőek.) Mivel az u_i-k különbözők, egy S_j-hez csupa különböző elemet tettünk be, legalább $\sqrt{n}$-et. Már csak azt kell ellenőrizni, hogy különböző S_j,S_m-hez definiált elemek nem eshetnek egybe. Ez azért van, mert ekkor $|S_j-S_m|\ge 3$, de mindkettőhöz legfeljebb egy hosszú vektort adtunk hozzá, így a távolságuk még mindig legalább egy lesz. Tehát $|H|\ge 1/2n\sqrt{n}$.

Azt kaptuk, hogy vagy $V+V$, vagy $V+W$ elemszáma legalább $1/2n\sqrt{n}$. Mivel mindkettő benne van $V+(V\cup W)$-ban, $V+(V\cup W)$ elemszáma mindenképp legalább $1/2n\sqrt{n}$.

A feladatra Lovász László Miklós és Tomon István adtak helyes megoldást.

6. Feladat (Buczolich Zoltán) Létezik-e olyan $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre minden $d\in\mathbb{R}$ esetén $g_{m,d}(x)=f(x,mx+d)$ szigorúan monoton nő $\mathbb{R}$-en, ha $m\geq 0$, és egyetlen nem üres nyílt intervallumon sem monoton, ha $m<0$?

Megoldás (Lovász László Miklós) Létezik ilyen függvény. Először konstruálunk egy g szigorúan monoton növő, folytonos függvényt $\mathbb{R}$-en, amelynek deriváltja λ-majdnem-mindenhol nulla (nem lesz mindenhol differenciálható). A konstrukció a következő: Először $[0,1]$-re csináljuk. Ezt mértékelméleti módszerekkel konstruáljuk. Konstruálunk egy μ mértéket, ami szinguláris λ-ra nézve, minden pont mértéke nulla, és minden nemüres belsejű intervallumnak pozitív a mértéke. Először vegyük a Cantor-halmazt. Ezen tudunk egy szinguláris μ_0 mértéket definiálni. Ugyanis létezik egy megfeleltetés a $[0,1]$-nek olyan pontjai között, amelyek nem diadikus törtek (tehát egyértelmű a kettes számrendszerben a felírása). Egy számnak feleltessük meg azt a számot, amit úgy kapunk, hogy vesszük kettes számrendszerben a kettedestörtalakját (ebben tehát végtelen sok 1-es és 0-s is van), ebben minden 1-est kicserélünk 2-re, majd hármas számrendszerben olvassuk le. Ekkor a Cantor-halmaz egy részhalmazának feleltessük meg a képének a mértékét. (Ez igazából a Cantor-függvényhez tartozó Lebesgue-Stieltes mérték.) Ez szinguláris, folytonos, de nem lesz minden nemüres belsejű intervallum mértéke pozitív. Végtelen sok μ_n szinguláris, folytonos mértéket fogunk összeadni, úgy, hogy μ_n minden halmazon legfeljebb $(1/2)^n$ lesz (ez ekvivalens azzal, hogy $\mu_n([0,1])\leq(1/2)^n$. Ekkor az összeg is korlátos mérték lesz, és minden halmaz mértéke egyre nő, ahogy egyre többet adunk össze, de egy pont mértéke végig nulla lesz, tehát az összeg is folytonos lesz. A μ_n-et a következőképpen konstruáljuk. Az eredeti μ_0-t meg tudjuk feleltetni egy mértéknek ami $[0,(1/3)^n]$-en van, és akkor bármilyen ilyen hosszú intervallumon. Vegyük ezeket tehát minden $[\frac{k}{3^n},\frac{k+1}{3^n}]$ intervallumon, ahol $0\leq k<3^n$ egész. Ez szinguláris lesz, de a maximuma nem lesz $(1/2)^n$, úgyhogy osszuk le megfelelően nagy pozitív számmal, hogy ez is teljesüljön. Ekkor μ_n-re igaz, hogy $\mu_n([\frac{k}{3^n},\frac{k+1}{3^n}])>0$. Így ha ezeket összeadjuk, arra is igaz lesz, mivel mindegyik nemnegatív. Legyen tehát μ az összeg, láttuk hogy minden pont mértéke nulla, és megszámlálható sok szinguláris mértéket adtunk össze, tehát az összeg is szinguláris. Legyen $a<b$, és nézzük $[a,b]$ mértékét (a szélét mindegy, hogy bevesszük-e). Mivel elég nagy n-re létezik k, hogy $[\frac{k}{3^n},\frac{k+1}{3^n}]$ benne van, ez pozitív lesz. Most ha $f(x)=\mu([0,x])$, akkor f szigorúan monoton növő, folytonos, és $f'=0$ majdnem mindenütt (szerepelt a tananyagban, hogy $f'=0$ majdnem mindenütt ekvivalens azzal, hogy a mérték szinguláris). Tehát van ilyen függvényünk $[0,1]$-en. Ekkor van ilyen függvényünk minden egész n-re $[n,n+1]$-en, és mivel konstans hozzáadása nem változtat a tulajdonságán, ezeket összeilleszthetjük. Legyen tehát $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ilyen függvény.

A következő tétel szerepelt a tananyagban: Ha $a<b$ valós számok, és $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton növő, akkor f λ-majdnem-mindenütt differenciálható, ez az f' λ-integrálható, és az integrálja

$$\int_a^b f'd\lambda\leq f(b)-f(a)$$

Továbbá itt akkor és csak akkor van egyenlőség, ha f abszolút folytonos.

Vizsgáljuk g-t. Azt látjuk be, hogy tetszőleges $[a,b], a<b$ intervallumban és tetszőleges $K>0$-hoz léteznek olyan $c_1<c_2$ pontok, hogy $\frac{g(c_2)-g(c_1)}{c_2-c_1}>K$. Ha ugyanis nem, akkor g, az $[a,b]$ intervallumon Lipschitz lenne, tehát abszolút folytonos lenne. Viszont ez ekvivalens azzal, hogy

$$\int_a^b f'=f(b)-f(a)$$

Itt a bal oldal biztosan nulla, hiszen majdnem mindenütt nulla, de ez ellentmondás, mert f szigorúan monoton növő.
Legyen $f(x,y) = x + g(y)$. Ekkor ha $m \geq 0$, akkor $f(x, mx+d) = x + g(mx+d)$, itt x szigorúan monoton növő, $g(mx+d)$ konstans, ha $m = 0$, szigorúan monoton növő, ha $m > 0$. Mindenképpen az összeg szigorúan monoton növő. Legyen $m < 0$, és nézzük a $h(x) = h_{m,d}(x) = x + g(mx+d)$ függvényt. Tegyük fel, hogy egy $[a,b], a < b$ intervallumon monoton (a feladatban nyílt nemüres intervallum szerepel, de ez mindegy, nézhetjük a nemüres belsejű zárt intervallumokat). Két eset van: monoton növő, vagy monoton csökkenő. g-t az $[mb+d, ma+d]$ intervallumon kell vizsgálni (mivel $a < b, m < 0 \to mb < ma \to mb + d < ma + d$). Van olyan $c \in (mb+d, ma+d)$-ben (majdnem minden pont ilyen), ahol $g'(c) = 0$. Mivel $mx + d$ lineáris, nyilván van (egyetlen) $x \in (a,b)$, hogy $mx + d = c$. Ekkor $h'(x) = 1 + g'(mx+d)m = 1$. Ekkor h nem lehet monoton csökkenő $[a,b]$-n, tehát monoton növő. Azonban legyen $K = -1/m$, K tehát pozitív. Van tehát olyan $mb + d \leq c_1 < c_2 \leq ma + d$, hogy

$$\frac{g(c_2) - g(c_1)}{c_2 - c_1} > K \leftrightarrow g(c_2) - g(c_1) > K(c_2 - c_1)$$

Mivel $mx+d$ lineáris, és m negatív, léteznek egyértelműen $x_1 < x_2$, hogy $mx_1+d = c_2, mx_2+d = c_1$. Ekkor

$$h(x_2)-h(x_1) = x_2-x_1+g(mx_2+d)-g(mx_1+d) = x_2-x_1+g(c_1)-g(c_2) < x_2-x_1+K(c_1-c_2) =$$

$$= x_2 - x_1 + 1/m(c_2 - c_1) = x_2 - x_1 + x_1 - x_2 = 0$$

Tehát $h(x_2) - h(x_1) < 0$, vagyis h nem is monoton növő. Ez ellentmondás, vagyis h semmilyen intervallumon se monoton. Tehát az $f(x,y) = x + g(y)$ függvény valóban jó lesz.

A feladatra Lovász László Miklós adott helyes megoldást.

7. Feladat (Buczolich Zoltán, Julien Brémont) Van-e olyan $a_n \geq 0$, ℓ^2-beli sorozat, melyre

$$\sum_{n\geq 1}\Big(\sum_{k\geq 1}\frac{a_{kn}}{k}\Big)^2 = +\infty \ ?$$

Megoldás (Buczolich Zoltán megoldása alapján). Van ilyen sorozat. Minden $M \in \mathbb{N}$ esetén válasszuk ki különböző prímek egy $\mathcal{P}_M = \{p_{j,M} : j = 1, ..., l_M\}$ halmazát. Különböző M-ekre legyenek ezek a halamzok diszjunktak. Továbbá, kihasználva, hogy $\sum_{p \text{ prím}} \frac{1}{p} = \infty$ úgy választjuk a $\mathcal{P}_M$-eket, hogy

$$\sum_{j=1}^{l_M} \frac{1}{p_{j,M}} > \sqrt{2}M. \tag{10}$$

Ezután válasszuk m_M-et úgy, hogy

$$\frac{(m_M - 1)^{l_M}}{m_M^{l_M}} > \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Legyen $N_M = \{p_{1,M}^{a_1} \cdots p_{l_M,M}^{a_{l_M}} : 1 \leq a_j \leq m_M,\ j = 1, ..., l_M\}$, és
$N'_M = \{p_{1,M}^{a_1} \cdots p_{l_M,M}^{a_{l_M}} : 1 \leq a_j \leq m_M - 1,\ j = 1, ..., l_M\}$.
Az N_M halmazok különböző M-ekre diszjunktak, és $\#N_M = m_M^{l_M}$, és $\#N'_M = (m_M - 1)^{l_M}$.

Ha $n \in N_M$ akkor legyen $a_n = \frac{1}{M\sqrt{m_M^{l_M}}}$. Ha pedig $n \notin \cup_M N_M$, akkor legyen $a_n = 0$.
Ekkor könnyen látható, hogy $(a_n) \in \ell_2$.
Továbbá,

$$\sum_{n\geq 1}(\sum_{k\geq 1}\frac{a_{kn}}{k})^2 \geq \sum_{M=1}^{\infty}\sum_{n\in N'_M}(\sum_{k\geq 1}\frac{a_{kn}}{k})^2 \geq$$

$$\sum_{M=1}^{\infty}\sum_{n\in N'_M}(\sum_{k\in \mathcal{P}_M}\frac{a_{kn}}{k})^2 = \sum_{M=1}^{\infty}\sum_{n\in N'_M}\frac{1}{M^2 m_M^{l_M}}(\sum_{j=1}^{l_M}\frac{1}{p_{j,M}})^2 \geq$$

(kihasználva (10)-et és aztán (11)-et)

$$\sum_{M=1}^{\infty}\sum_{n\in N'_M}\frac{2}{m_M^{l_M}} = \sum_{M=1}^{\infty}\frac{2(m_M-1)^{l_M}}{m_M^{l_M}} \geq \sum_{M=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

A feladatra nem született helyes megoldás.

8. Feladat (Halász Gábor, Lempert László) Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ véges Lebesgue mértékű, összefüggő nyílt halmaz, és $u : D \to \mathbb{R}$ harmonikus függvény. Mutassuk meg, hogy vagy u konstans, vagy pedig majdnem minden $p \in D$ -re az

$$f'(t) = (\mathrm{grad}\ u)(f(t)), \quad f(0) = p$$

kezdetiérték-problémának nincsen (mindenütt differenciálható) $f : [0, \infty) \to D$ megoldása.

Megoldás (a kitűzők megoldása alapján). A feladatot általánosabban $\mathbb{R}^n$-ben oldjuk meg. Előrebocsájtjuk, hogy a differenciálegyenlet jobboldala lokálisan Lipschitz lévén, ha a fenti kezdeti érték problémának (röviden: k.é.p. -nek) van megoldasa egy $[0, T]$ intervallumon, akkor az a megoldás egyértelmű. A továbbiakban a fenti k.é.p. -re (K) -ként hivatkozunk. Legyen D_∞ azon $p \in D$ pontok halmaza, amikre (K) -nak van $x : [0, \infty) \to D$ megoldása.

1. Lemma. *D_∞ mérhető.*

Bizonyítás. Azt látjuk be, hogy tetszőleges T -re azon $p \in D$ pontok D_T halmaza, amelyekre (K)-nak van $x : [0, T] \to D$ megoldása, nos ez a D_T halmaz mérhető (valójában nyílt is). Ha $K \subset D$ kompakt, válasszunk egy $\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sima vektormezőt, ami megegyezik grad u -val K -n, és 0 D egy kompakt részén kívül. Mivel ξ tartója kompakt, a

$$dy/dt = \xi(y), \qquad y(0) = p$$

k.é.p. -nek tetszőleges $p \in \mathbb{R}^n$ -re van $y = y_p : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ megoldása, és az

$$\mathbb{R}^n \times [0, \infty) \ni (p, t) \mapsto y_p(t) \in \mathbb{R}^n$$

leképezés folytonos. Nyilván D_T azon p pontokból áll, amikre valamely kompakt $K \subset D$ -vel $y_p[0, T] \subset K$. Ez utóbbi halmaz pedig $K_T = \bigcap_j \{p : y_p[0, T] \subset G_j\}$—ahol G_j a K egy nyílt környezetbázisa—, vagyis nyílt halmazok megszámlálható metszete. Választva D -beli kompakt halmazoknak egy K^i megszámlálható bázisát, kapjuk, hogy

$$D_T = \bigcap_i K_T^i \qquad \text{és így} \quad D_\infty = \bigcap_{T=1}^{\infty} D_T$$

is mérhető. $\square$

Mivel a grad u vektormező divergenciája $= \Delta u = 0$, azért a lokális folyama mértéktartó; ez a lokális folyam D_∞ -t önmagába képezi, és így megszorítása D_∞ -en mértéktartó és injektív transzformációk egy $g_t : D_\infty \to D_\infty$ családját adja, $0 \le t < \infty$.

$$du(g_t(p))/dt = \big(\text{grad } u(g_t(p)), dg_t(p)\big) = |\text{grad } u(g_t(p)|^2 \tag{12}$$

miatt u monoton nő a trajektóriák mentén.
Ha a feladat állítása nem lenne igaz, akkor grad $u \neq 0$ m.m. és $\mu(D_\infty) > 0$. Válasszuk ki D_∞ -nek egy olyan q Lebesgue–sűrűségi pontját, ahol grad u nem 0, és tekintsük az $E = \{p \in D_\infty : u(p) \ge u(q)\}$ halmazt. Az implicit függvény tétel szerint $\{q' \in D : u(q') = u(q)\}$ egy sima hiperfelület lesz q egy környezetében, amiért is $\mu(E) > 0$ (másképpen q nem lehetne sűrűségi pont). Mivel u növekszik a trajektóriák mentén, $g_1(E) \subset E$. Sőt, (12) szerint a növekedés szigorú q egy környezetében. Következésképpen q külső pontja $g_1(E)$ -nek, tehát $\mu(g_1(E)) < \mu(E)$. Ez azonban ellentmond annak, hogy g injektív és mértéktartó.

A feladatra Lovász László Miklós adott lényegében helyes megoldást, apró hibával.

9. Feladat (Szűcs András) Minden M m-dimenziós, zárt C^∞ sokasághoz rendeljünk hozzá egy $G(M)$, $2m$-dimenziós, zárt C^∞ sokaságot a következőképpen. Ágyazzuk be M-et valamilyen $\mathbb{R}^q$ euklideszi térbe. Jelölje $\mathbb{RP}^q$ a q-dimenziós valós projektív teret. A $G(M) \subseteq M \times \mathbb{RP}^q$ sokaság az olyan (x, e) párokból áll, amelyekre $x \in M \subseteq \mathbb{R}^q$, és az $e \subseteq \mathbb{R}^{q+1} = \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ egydimenziós lineáris altér benne van a $T_xM \subseteq \mathbb{R}^q \subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ érintőtér és a $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{q+1}$ vektor által kifeszített $(m+1)$-dimenziós lineáris altérben. Bizonyítsuk be, hogy ha N egy n-dimenziós zárt C^∞ sokaság, akkor $P = G(M\times N)$ és $Q = G(M)\times G(N)$ kobordánsak, azaz létezik egy $(2m+2n+1)$-dimenziós kompakt, peremes C^∞ sokaság, amelynek pereme P és Q diszjunkt uniója.

Megoldás (A kitűző megoldása alapján). Emlékeztető: Két zárt C^∞ n-dimenziós sokaság kobordáns, ha létezik egy $(n + 1)$-dimenziós kompakt peremes sokaság, melynek pereme a két n-dimenziós sokaság diszjunkt uniója. Ez egy ekvivalencia relációt definiál az n dimenziós zárt sokaságok halmazán. Az ekvivalenciát $\sim$ fogja jelölni. Az ekvivalencia osztályok N_n halmazát n-dimenziós kobordizmuscsoportnak nevezzük. Az összeadást a sokaságok diszjunkt uniója definiálja. Az N_n csoportok direkt összegén a sokaságok szorzása definiál egy szorzást, ez lesz a kobordizmus gyűrű.
A bizonyításban tekintett minden sokaság zárt C^∞ sokaság lesz, és minden diffeomorfizmus C^∞ lesz, ezt a továbbiakban nem írjuk ki.

2. Lemma. *$G(M)$ kobordáns M^2 -tel.*

A Lemmából nyilvánvaló a feladat állítása, ugyanis: $G(M \times N) \sim (M \times N)^2 = M^2 \times N^2 \sim G(M) \times G(N)$.
A Lemma bizonyítása. A definíció alapján $G(M) = P(TM \oplus E^1)$, ahol E^1 az $M \times \mathbb{R}$ triviális nyaláb, és P a projektivizálást jelöli (a feladat szövege szerinti értelemben, tehát a szokásos ideális pontok hozzávételével). Ekkor van egy $P(TM \oplus E^1) \to M$ fibrálás, $\mathbb{RP}^m$ fibrumokkal.
A lemma bizonyitása egy egyszerű geometriai konstrukcióval történik. Tekintsük az $M^2 \times [-1, 1]$ peremes sokaságot. Ezen tekintsük a következő T involuciót: $(x, y, t) \mapsto (y, x, -t)$. Ennek fixponthalmaza $\{(x, x, 0) \mid x \in M\}$, ami diffeomorf az M sokasággal. Tekintsük a fixponthalmaznak egy kis T-invariáns csőszerű nyílt U környezetét, amelynek határa diffeomorf az $S(TM \oplus E^1)$ gömbfelszínnyalábbal. Ekkor $M^2 \times [-1, 1] \setminus U$ egy T-invariáns peremes sokaság, amelynek pereme $[M^2 \times \{-1, 1\}] \cup \partial U$. Ezt a peremes sokaságot faktorizálva a T hatása szerint, kapunk egy kobordizmust M^2 és $P(TM \oplus E^1)$ között.

A feladatra nem született helyes megoldás.

10. Feladat (Major Péter, Elekes Márton) Tekintsük a $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ teret a szorzattopológiával (ahol $\{0,1\}$ diszkrét tér). Legyen $T : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ a bal-eltolás, azaz $(Tx)(n) = x(n+1)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Megadható-e véges sok Borel-halmaz: $B_1, \ldots, B_m \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ úgy, hogy a

$$\{T^i(B_j) \mid i \in \mathbb{N}, 1 \le j \le m\}$$

halmazrendszer által generált σ-algebra egybeesik a Borel-halmazok rendszerével?

Megoldás (Elekes Márton megoldása alapján) Nem adhatók meg ilyen B_j halmazok. Ezt indirekt bizonyítjuk.

Ismert (pl. Laczkovich: Valós függvénytan), hogy $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ egy teljes metrikus tér, így érvényes benne a Kategória-tétel, valamint, hogy a tér szeparábilis is. (Valójában homeomorf a Cantor-halmazzal, de ezt nem használjuk.) Emlékeztetőül, egy halmaz első kategóriájú, ha előáll megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként. Jelölje $\mathcal{M}$ az első kategóriájú halmazok rendszerét. $\mathcal{M}$ nyilván zárt a részhalmazképzésre és a megszámlálható unióra.

1. Lemma $B \in \mathcal{M} \Rightarrow T(B) \in \mathcal{M}$.

Bizonyítás. Könnyen látszik abból, hogy $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid x(0) = 0\} \cup \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid x(0) = 1\}$ alakba írható, és T mindkét részen homeomorfizmus. □

2. Lemma $B \notin \mathcal{M}, B$ *Borel* $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall i \ge N\ \ \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus T^i(B) \in \mathcal{M}$.

Bizonyítás. Ismert (pl. Laczkovich: Valós függvénytan), hogy ha egy teljes szeparábilis metrikus térben egy Borel halmaz nem első kategóriájú, akkor valamely nemüres nyíltat első kategóriájú híján tartalmaz. Itt nyilván mondhatunk bázisnyíltat is, hiszen $\mathcal{M}$ lefelé zárt.
Tehát $U \setminus B \in \mathcal{M}$ valamely U bázisnyíltra. A szorzattopológia definíciója alapján legyen $U = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid x(0) = i_0, \ldots, x(m) = i_m\}$ alakú, valamely $i_0, \ldots i_m \in \{0,1\}$ számokra. Ekkor könnyű látni, hogy $T^i(U) = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ minden $i \ge m+1$-re. De ekkor $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus T^i(B) = T^i(U) \setminus T^i(B) \subset T^i(U \setminus B) \in \mathcal{M}$ minden $i \ge m+1$-re, így $N := m+1$ megfelel. □

$B_j \in \mathcal{M}$ esetén az 1. Lemma ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy $T^i(B_j) \in \mathcal{M}$ minden i-re. $B_j \notin \mathcal{M}$ esetén pedig a. 2. Lemma alapján $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus T^i(B_j) \in \mathcal{M}$ véges sok i-re kivételével. A három típusú halmazt három csoportba gyűjtve adódik, hogy $\{T^i(B_j) \mid i \in \mathbb{N}, 1 \le j \le n\} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$ alakba írható, ahol $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ megszámlálható, $\mathcal{E}$ véges, $\forall C \in \mathcal{C}$ esetén $C \in \mathcal{M}$, és $\forall D \in \mathcal{D}$ esetén $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus D \in \mathcal{M}$.
Legyen $X = \cup_{C \in \mathcal{C}} C \cup \cup_{D \in \mathcal{D}} \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus D$. Ekkor $X \in \mathcal{M}$. Legyen $Y = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus X$. A Kategória-tételből következik, hogy Y végtelen, hiszen különben $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ első kategóriájú lenne. Könnyű látni, hogy az $\{A \cap Y \mid A \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{E}\}$ halmazrendszer által generált σ-algebra tartalmazza $\{y\}$-t minden $y \in Y$-ra. De ez a σ-algebra véges, mivel $A \cap Y = \emptyset$ minden $A \in \mathcal{C}$-ra, $A \cap Y = Y$ minden $A \in \mathcal{D}$-ra, $\mathcal{E}$ véges, és egy véges halmazrendszer véges σ-algebrát generál. Ellentmondás.

A feladatra nem született helyes megoldás.

11. Feladat (Székely Gábor)Az X és Y valós értékű véletlen változók maximálkorrelációja az $f(X)$ és $g(Y)$ változók korrelációjának szuprémuma az olyan f és g Borel mérhető, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeken, amelyekre $f(X)$ és $g(Y)$ véges szórású. Legyen U a $[0, 2\pi]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, valamint n és m pozitív egészek. Számítsuk ki $\sin(nU)$ és $\sin(mU)$ maximálkorrelációját.

Megoldás (Lovász László Miklós) Minden n-re létezik olyan f_n Borel-mérhető függvény, hogy $f_n(\sin(\alpha)) = |\sin(n\alpha)|$. Ugyanis létezik az U_{n-1} Chebysev polinóm, ami $n-1$-ed fokú, csupa azonos paritású tag van benne, és $\sin(n\alpha) = \sin(\alpha)U_{n-1}(\cos(\alpha))$. Legyen $f_n(x) = |xU_{n-1}(\sqrt{1-x^2})|$, ha $-1 \leq x \leq 1$, egyébként bármi, hogy Borel-mérhető legyen. (Ez lehetséges, mert $[-1,1]$-en folytonos, így akár úgy is választható, hogy az egész $\mathbb{R}$-en folytonos legyen.) Ekkor $f_n(\sin(\alpha)) = |\sin(\alpha)| \cdot |U_{n-1}(|\cos(\alpha)|)|$. Mivel U_{n-1}-ben csupa azonos paritású tag van, a függvény maga vagy páros, vagy páratlan, így $|U_{n-1}(|x|)| = |U_{n-1}(x)|$. Ebből $f_n(\sin(\alpha)) = |\sin(\alpha)U_{n-1}(|\cos(\alpha)|)| = |\sin(\alpha)U_{n-1}(\cos(\alpha))| = |\sin(n\alpha)|$.
Ekkor ha nézzük $f_m(\sin(nU))$ és $f_n(\sin(mU))$-t, mindkettő $|\sin(mnU)|$-val egyenlő. Mivel m, n pozitív egészek, mnU egy egyenletes eloszlású $[0, 2\pi mn]$-en. Ekkor $|\sin(mnU)|$ nemnulla szórású, de véges szórású, mivel az abszolút értéke mindenhol legfeljebb egy. Azt kaptuk, hogy ha $X = \sin(nU), Y = \sin(mU)$, akkor léteznek olyan f, g Borel mérhető függvények, amelyekre $f(X) = g(Y)$, és mindkettő véges nemnulla szórású. De ekkor ezek korrelációja is egy, és mivel minden korreláció legfeljebb egy, ezért a maximálkorrelációjuk egy.

A feladatra Lovász László Miklós adott helyes megoldást.