JELENTÉS A 2009. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 2009. október 30. és november 9. között rendezte meg a 2009. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, valamint 2009-ben egyetemet vagy főiskolát végzettek vehettek részt.

A Bolyai János Matematikai Társulat a verseny megrendezésére a következő bizottságot kérte fel: Győry Kálmán (elnök), Figula Ágota és Kovács Tünde (titkárok), Bérczes Attila, Bódi Béla, Bódi Viktor, Daróczy Zoltán, Fazekas István, Gaál István, Gilányi Attila, Hajdu Lajos, Kormos János, Kozma László, Losonczi László, Lovas Rezső, Major Péter, Maksa Gyula, Molnár Lajos, Nagy Péter, Páles Zsolt, Pap Gyula, Pethő Attila, Pintér Ákos, Száz Árpád, Székelyhidi László, Szilasi József, Sztrik János, Tamássy Lajos, Tengely Szabolcs, Terdik György, Tran Quoc Binh.

A versenybizottság 12 feladatot tűzött ki. A feladatokat sorrendben Gyárfás András, Győry Kálmán, Ruzsa Imre, Pintér Ákos és Volker Ziegler, Bódi Béla, Figula Ágota, Muzsnay Zoltán és Nagy Péter Tibor, Elekes Márton, Páles Zsolt, Szilasi József és Tamássy Lajos, Molnár Lajos, Székely Gábor és Móri Tamás bocsátotta a bizottság rendelkezésére.

A versenyre 20 versenyző 98 megoldást nyújtott be, melyek közül 84 volt hibátlan. Ezek értékelése után a versenybizottság a következő döntést hozta:

I. díjban részesül **Strenner Balázs**, az ELTE 5. éves matematikus hallgatója;

II. díjban részesül **Lovász László Miklós**, az ELTE 2. éves matematika BSc hallgatója;

III. díjban részesülnek **Horváth Márton**, **Hubai Tamás** és **Rácz Béla**, az ELTE 2009-ben végzett matematikus hallgatói;

Dicséretben részesül **Nagy Csaba** az ELTE 3. éves matematika BSc hallgatója.

Indoklás:

Strenner Balázs mind a 12 feladatra nyújtott be megoldást; az 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9. és 11. feladatokra adott megoldása teljes, a 12. feladatra adott megoldása kissé hiányos, a 10. feladat megoldása során nem jutott lényeges eredményre.

Lovász László Miklós a 7., 10. és a 12. feladatok kivételével minden feladatot megoldott. Kiemelkedő a 9. feladatra adott megoldása.

Horváth Márton megoldotta az 1., 2., 3., 6., 7., 8. és 9. feladatokat. Kiemelkedő a 3. feladatra adott megoldása.

Hubai Tamás megoldotta az 1., 2., 6., 8., 9. és 11. feladatokat, kissé hiányosan oldotta meg a 12. feladatot, részeredményt ért el a 3. feladatban és az 5. feladat megoldása során nem jutott lényeges eredményre.

Rácz Béla megoldotta az 1., 2., 4., 5., 6., 9. és 11. feladatokat, a 8. feladatra adott megoldása kissé hiányos.

Nagy Csaba megoldotta az 1., 2., 6., 8. és 9. feladatokat.

A feladatok és megoldásaik

1. feladat (Gyárfás András) Egy kártyapakli minden kártyáján a szabályos 17-szög látható oldalaival és átlóival együtt, csúcsai 1-től 17-ig vannak számozva. Minden kártyán az összes szakasz (oldalak és átlók) az 1,2,...,105 színek valamelyikével van kiszínezve úgy, hogy a következő tulajdonság teljesül: a 17-szög bármely 15 csúcsa közötti 105 szakasz csupa különböző színnel van színezve a pakli legalább egy kártyáján. Minimum hány kártya kell a pakliba?

Megoldás: (Gyárfás András)
Nevezzük a csúcsok egy 15 pontú részhalmazát egy kártyán tarkának, ha minden szakaszának különböző a színe. A kérdés az, hogy minimum hány kártya kell ahhoz, hogy bármely 15 csúcs tarka részhalmaz legyen legalább egy kártyán. A válasz $34 = \frac{\binom{17}{2}}{4}$.
A bizonyítás két részből áll.
A. 34 kártya elég:
Ehhez azt használjuk, hogy a 17 pontú teljes gráf élhalmazát 34 négy hosszú körre lehet partícionálni. (A szabályos 17-szög forgásszimmetrikus megoldást kínál: $1, 2, 10, 8, 1$ és $3, 6, 12, 8, 3$ körök nyolc élén a 17-szög csúcsai közt fellépő nyolc távolság mindegyike megjelenik. Ezért a körpár forgatásai a kívánt partíciót adják.) Ha megvan a fenti partíció, akkor az i. kör így definiálja az i. kártya színezését ($i = 1, 2, \cdots 34$): a $C_i = \{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ kör éleit 1-es színnel színezzük. Legyen $X_i = \{1, 2, \cdots, 17\} \backslash C_i$. Az a_i-ből és c_i-ből X_i-hez menő $13 - 13$ szakaszt $2, \cdots, 14$ színekkel, b_i-ből és d_i-ből X_i-hez menő $13 - 13$ szakaszt $15, ..., 27$ színekkel, végül X_i-n belüli szakaszokat $28, \cdots, 105$ színekkel színezzük. Az $a_i c_i$, $b_i d_i$ szakaszok színe bármi lehet (a 105 színből). Ez a színezés megfelel!

B. 34-nél kevesebb kártya nem elég. Ez - mivel $34 = \frac{\binom{17}{2}}{4}$ - adódik a következő állításból : bármely kártyán legfeljebb négy tarka részhalmaz lehet.

Állítás bizonyítása: Egy kártyán nevezzünk egy szakaszt egyedinek, ha színe nem ismétlődik a kártyán. Kézenfekvő módon adódik, hogy az egyedi szakaszok száma legalább $\binom{15}{2} - \left(\binom{17}{2} - \binom{15}{2}\right) > \binom{12}{2}$, ezért az egyedi szakaszok végpontjai legalább 13 elemű V_j halmazt definiálnak a j-edik kártyán. Vegyük észre, hogy V_j részhalmaza kell, hogy legyen a j. kártya tetszőleges tarka részhalmazának! Ebből következik, hogy $|V_j| = 15$ esetén legfeljebb egy, $|V_j| = 14$ esetén legfeljebb három tarka részhalmaz van a j. kártyán. Végül, legyen $|V_j| = 13$. Ha öt csúcspár is kiegészítené V_j-t tarkává, akkor lenne három, melynek mindhárom párja ilyen. De ekkor e három csúcs és V_j között minden szakasz színe egymástól és V_j párjainak színeitől is különbözne, így $\binom{13}{2} + 3 \cdot 13 > 105$ szín lenne, ami ellentmondás. Tehát legfeljebb négy csúcspár egészítheti ki V_j-t tarkává.

Általánosítás. 17 helyett bármely $n = 8k + 1$ alakú számra ($k \geq 2$) is átvihető a kérdés - ekkor n-szög van a kártyákon, $\binom{n-2}{2}$ színnel színezve - legalább $\frac{\binom{n}{2}}{4}$ kártya kell ahhoz, hogy bármely $n - 2$ csúcs tarka legyen valamely kártyán.

A feladatra Borbély József, Borda Bence, Gosztonyi Balázs, Grósz Dániel, Horváth Márton, Hubai Tamás, Hujter Bálint, Jankó Zsuzsanna, Király Csaba, Korándi Dániel, Lovász László

Miklós, Mészáros Gábor, Nagy Csaba, Rácz Béla, Strenner Balázs, Szűcs Gábor, Tomon István, Wolosz János adtak helyes megoldást.

2. feladat (Győry Kálmán) Legyenek $p_1, \dots, p_k$ prímszámok, és legyen S az egész számok azon részhalmaza, melynek elemei nem oszthatók $p_1, \dots, p_k$-tól különböző prímszámmal. Az egészek egy véges A részhalmaza esetén jelöljük $\mathcal{G}(A)$-val azt a gráfot, melynek csúcsai az A elemei, élei pedig azon $a, b \in A$ párok, melyekre $a - b \in S$. Létezik-e minden $m \geq 3$-ra egészeknek olyan m elemű A részhalmaza, melyre

i. $\mathcal{G}(A)$ teljes?

ii. $\mathcal{G}(A)$ összefüggő, de minden csúcsának a fokszáma legfeljebb 2?

Megoldás:

i. Legyen q egy $p_1, \dots, p_k$-tól különböző prímszám, és legyen m egy q-nál nagyobb egész szám. Ekkor bármely, egészekből álló m elemű A halmaznak van legalább két eleme, melyek kongruensek (mod q). Az ilyen elemek különbsége nem lehet S-beli, azaz az ilyen elemek nem lehetnek $\mathcal{G}(A)$-ban éllel összekötve. Tehát $m > q$ esetén $\mathcal{G}(A)$ nem lehet teljes.

ii. Legyen $m \geq 3$ egész és $P = p_1 \cdots p_k$. Tekintsük a következő számsorozatot:

$$a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + P^{n-1}, \qquad n = 2, 3, \dots, m.$$

Ekkor tetszőleges $1 \leq j < i \leq m$ egészek esetén

$$a_i - a_j = P^{i-1} + \dots + P^j.$$

Ha most $j = i - 1$, úgy $a_i - a_j \in S$, míg ha $j < i - 1$, úgy

$$a_i - a_j = P^j(1 + P + \dots + P^{i-1-j}).$$

Ám az utóbbi esetben $1+P+\dots+P^{i-1-j}$ nagyobb mint 1 és relatív prím $p_1, \dots, p_k$-hoz. Ezért ekkor $a_i - a_j \notin S$. Ezzel beláttuk, hogy $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ esetén az $a_1, \dots, a_m$ számok egy utat határoznak meg $\mathcal{G}(A)$-ban, melyben minden csúcs fokszáma legfeljebb 2. Tehát minden $m \geq 3$ esetén van egészekből álló m elemű A halmaz a kívánt tulajdonsággal.

A megoldás a versenyzők közös ötlete alapján készült. A feladatra Borbély József, Borda Bence, Gosztonyi Balázs, Grósz Dániel, Horváth Márton, Hubai Tamás, Jankó Zsuzsanna, Király Csaba, Korándi Dániel, Kutas Péter, Lovász László Miklós, Mészáros Gábor, Nagy Csaba, Rácz Béla, Strenner Balázs, Szabó Tamás, Tomon István, Wolosz János adtak teljes megoldást. Szűcs Gábor megoldása hiányos.

3. feladat (Ruzsa Imre) Bizonyítsuk be, hogy léteznek pozitív c és n_0 konstansok az alábbi tulajdonsággal. Ha A egész számokból álló véges halmaz, $|A| = n > n_0$, akkor

$$|A - A| - |A + A| \leq n^2 - cn^{8/5}.$$

Megoldás: (Horváth Márton)
Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk, először az indukciós lépést nézzük meg (és az alapján meghatározunk egy n_0 küszöbindexet), majd ezután a kezdőlépéshez meghatározzuk a c konstans értékét, melyről azonban már most feltesszük, hogy 1/12-nél kisebb.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n-1$-re, ebből bizonyítjuk, hogy igaz n-re. Legyen tehát A egy egész számokból álló halmaz, melynek elemszáma n. Nyilván $|A-A| \le n^2$ (csak ennyiféle különbséget tudunk felírni A elemeiből), így $|A+A| \ge cn^{8/5}$ esetén igaz az állítás erre az A halmazra, ezért a továbbiakban feltehetjük, hogy $|A+A| < cn^{8/5}$. Legyen az $A+A$ halmaz elemei $a_1, a_2, \dots, a_k$ (ahol $k = |A+A|$), és jelölje b_i, hogy az a_i összeg hányféleképpen jön ki, azaz hány olyan rendezett számpár van A-ban, melyeknek az összege a_i. A b_i-k összege az összes rendezett számpár száma, azaz $\sum_{i=1}^k b_i = n^2$. Mivel az a_i számot b_i-féleképpen tudjuk felírni összegként, ezért $\sum_{i=1}^k \binom{b_i}{2}$ darab olyan egyenletet tudunk felírni, mely két A elemeiből képzett összeg egyenlőségét fejezi ki. Ezt becsüljük alulról a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenség segítségével:

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{b_i}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} b_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} b_i \ge \frac{(\sum_{i=1}^{k} b_i)^2}{2k} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} b_i =$$
$$\frac{n^4}{2k} - \frac{n^2}{2} \ge \frac{n^4}{2cn^{8/5}} - \frac{n^2}{2} \ge 6n^{12/5} - \frac{n^2}{2} > 5n^{12/5},$$

ahol az utolsó lépésben feltesszük, hogy n elég nagy. Van olyan $a \in A$ szám, mely legalább $5n^{7/5}$ összeg-egyenletben szerepel (ha minden szám ennél kevesebb egyenletben szerepelne, akkor összesen kevesebb, mint $n \cdot 5n^{7/5} = 5n^{12/5}$ egyenlet lenne, ellentmondásban az előző becsléssel.) A továbbiakban csak azokat az összeg-egyenleteket tekintsük, melyben szerepel az a szám. Ebből zárjuk ki azokat az összegeket, melyben az egyik oldalon $a+a$ összeg szerepel, ezekből legfeljebb n darab lehet (hiszen a másik oldal első tagja legfeljebb ennyiféle lehet, és a másik tag már egyértelműen meghatározott). Zárjuk ki azokat is, melyekben az egyenlet két oldalán álló két összeg csak a tagjai sorrendjében különbözik, ezekből szintén legfeljebb n lehet (csak ebben az esetben szerepelhet a másik oldalon is a). Elég nagy n esetén $5n^{7/5} - 2n > 4n^{7/5}$ fennáll. A kizárások miatt ezen összeg-egyenletekben pontosan egyszer szerepel a. Ha nem különböztetjük meg a csak sorrendben különböző összegeket, akkor is marad $n^{7/5}$ darab egyenlet. Minden egyenletet írjunk fel úgy, hogy a bal oldalán szerepeljen a. Ekkor az egyenletek jobb oldalán legalább $n^{7/10}$-féle szám szerepel, mert ennél kevesebb számból az összes pár is kevesebb lenne, mint ahány egyenletünk van (és egy számpár legfeljebb egyszer szerepelhet az egyenletek jobb oldalán, mert meghatározzák, hogy az a-hoz mit kell hozzáadni). Ha $a+b=e+f$, ahol $b,e,f \in A\setminus\{a\}$, akkor $a-e=f-b, a-f=e-b, e-a=b-f$ és $f-a=b-e$.

Vizsgáljuk meg, hogy mennyi lehet az $A-A$ halmaz elemszáma. Ezt úgy számoljuk ki, hogy megnézzük az $A\setminus\{a\} - A\setminus\{a\}$ halmaz elemszámát, és ehhez hozzáadjuk azt, amennyi új különbség keletkezik az a szám hozzávételével. Az a számmal lehet egyrészt $a-a$ alakú különbséget csinálni, de ennek az értéke 0, amit már nyilván számoltunk. Lehet $a-e$ alakú különbséget csinálni, ahol $e \in A\setminus\{a\}$, és így $n-1$-féle lehet, de az előbb megállapítottuk, hogy $n^{7/10}$-féle számmal ezt felírva olyan különbséget kapunk, amit fel lehet írni $A\setminus\{a\}$ halmazbeli számok különbségeként, ami így már nem lesz új különbség. Az $a-e$ alakú különbségekről ugyanezt el lehet mondani, összesen tehát legfeljebb $2(n-1) - 2n^{7/10}$-nel növekedett a különbséghalmaz elemszáma. Az $A\setminus\{a\}$ halmaz egy $n-1$ elemű halmaz, így arra igaz az indukciós feltevésünk, azaz

$$|A \setminus \{a\} - A \setminus \{a\}| - |A \setminus \{a\} + A \setminus \{a\}| \le (n-1)^2 - c(n-1)^{8/5}.$$

Ha ezt felírjuk az A halmazra, akkor a különbséghalmaz elemszáma legfeljebb $2(n-1)-2n^{7/10}$-nel nő, az összeghalmaz elemszáma nyilván nem csökken, tehát:

$$|A - A| - |A + A| \le (n-1)^2 - c(n-1)^{8/5} + 2(n-1) - 2n^{7/10}.$$

Erről szeretnénk belátni, hogy legfeljebb $n^2 - cn^{8/5}$, azaz

$$(n-1)^2 - c(n-1)^{8/5} + 2(n-1) - 2n^{7/10} \le n^2 - cn^{8/5}.$$

Mivel $(n-1)^2 + 2(n-1) \le n^2$, ezért elegendő belátni, hogy $cn^{8/5} - c(n-1)^{8/5} \le 2n^{7/10}$ (ezek összege a kívánt egyenlőtlenség). Ehhez becsüljük $(n-1)^{8/5}$-t a binomiális sor segítségével:

$$(n-1)^{8/5} = n^{8/5}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{8/5} = n^{8/5}\left(1 - \frac{8}{5}\frac{1}{n} + \binom{8/5}{2}\frac{1}{n^2} - \binom{8/5}{3}\frac{1}{n^3} + \dots\right) \ge n^{8/5} - \frac{8}{5}n^{3/5}.$$

A binomiális sor második tagjától kezdve a tagok és a binomiális együtthatók előjele is váltakozó, így minden tag pozitív, ezért azokat alulról becsülhettük 0-val. Ezt a becslést felhasználva:

$$cn^{8/5} - c(n-1)^{8/5} \le cn^{8/5} - c\left(n^{8/5} - \frac{8}{5}n^{3/5}\right) = \frac{8}{5}cn^{3/5},$$

ami elég nagy n esetén kisebb, mint $2n^{7/10}$ (mivel $3/5 < 7/10$), ami hiányzott a becsléshez.

A fentiek során meghatározunk egy n_0 küszöbindexet, melytől kezdve az összes becslésünk igaz. Ehhez az n_0-hoz van megfelelő c konstans, hiszen $|A - A| - |A + A| \le n^2 - 1$ nyilván mindig igaz, és így $c = \min\left(n_0^{-8/5}, 1/12\right)$ megfelelő konstans, amivel igaz az állítás n_0-ra, és a fentiekből következik, hogy minden $n > n_0$-ra is. Megjegyezzük, hogy ezzel a konstanssal az állítás n_0-nál kisebb n-ekre is igaz (ahogy n_0-ra).

Végezetül nézzük meg, hogy mit használtunk a $8/5$ kitevőről. A bizonyítás legvégén használtuk, hogy $3/5 < 7/10$. A bizonyítást végignézve arra jutunk, hogy ugyanez az egyenlőtlenség k kitevő esetén

$$\begin{aligned} k - 1 &< \frac{4-k-1}{2} \\ 2k - 2 &< 3 - k \\ 3k &< 5 \\ k &< \frac{5}{3} \end{aligned}$$

lenne. Tehát az állítás igaz $8/5$ helyett minden $5/3$-nál kisebb kitevőre is. Ebből az is következik, hogy a tetszőleges pozitív c konstanshoz található n_0 küszöbindex, hiszen az állítás igaz nagyobb kitevőre is, és a kettő hányadosa végtelenhez tart (még egy konstanssal szorozva is), így elég nagy n esetén nagyobb lesz a kívánt c értéknél.

A feladatra Grósz Dániel, Horváth Márton, Lovász László Miklós, Strenner Balázs adtak teljes megoldást. Kiemelkedő Horváth Márton megoldása, melyben a kérttől erősebb becslést bizonyít. Részeredményeket ért el Borbély József, Hubai Tamás, Király Csaba és Tomon István. Ők a feladatban kitűzött becslésnél gyengébbet bizonyítottak.

4. feladat (Pintér Ákos és Volker Ziegler) Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \frac{x^n + x^m - 2}{x^{\gcd(m,n)} - 1}$$

polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett minden $n > m > 0$ egész szám esetén.

Megoldás: (Strenner Balázs)
Először vizsgáljuk meg a $p(x) = x^n + x^m - 2$ polinom gyökeit.

$$|z^n + z^m - 2| \geq 2 - |z^n| - |z^m| > 0, \qquad \text{ha} \quad |z| < 1,$$

tehát az egységkör belsejében nincs gyök. Legyen most $|z| = 1$, és $z^n + z^m - 2 = 0$. Ekkor $|z^n| = 1$, $|z^m| = 1$, tehát $|z^n + z^m| \leq 2$. Egyenlőség akkor teljesül, ha z^n és z^m egy irányba néznek, azaz $z^n = z^m$. Mivel $z^n + z^m = 2$, így $z^n = z^m = 1$. Mivel létezik $k, l \in \mathbb{Z}$, hogy $kn + lm = \gcd(n, m)$, ezért $z^{\gcd(n,m)} = z^{kn+lm} = (z^n)^k (z^m)^l = 1$. Másszóval $p(x)$-nek a $|z| = 1$ körvonalon fekvő gyökei éppen a $q(x) = x^{\gcd(n,m)} - 1$ polinom gyökei. (Látható, hogy ezek mind gyökei $p(x)$-nek.) Továbbá ezek mind egyszeres gyökök. Tegyük fel ugyanis, hogy $|z| = 1$ és z a $p(x)$-nek legalább kétszeres gyöke. Ekkor z gyöke a $p'(x)$-nek is, sőt, gyöke a következőnek is:

$$np(x) - xp'(x) = (nx^n + nx^m - 2n) - (nx^n + mx^m) = (n - m)x^m - 2n.$$

Tehát $z^m = \frac{2n}{n-m}$. Mivel $|z| = 1$, így $\frac{2n}{n-m} = 1$, $2n = n - m$, $n + m = 0$, ami lehetetlen. A fentiek miatt az $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^n + x^m - 2}{x^{\gcd(n,m)} - 1}$ polinomnak minden z gyökére $|z| > 1$. Legyen $d = \gcd(n, m)$, $\frac{n}{\gcd(n,m)} = u$, $\frac{m}{\gcd(n,m)} = v$. Ekkor

$$f(x) = \frac{x^{ud} + x^{vd} - 2}{x^d - 1} = (x^{(u-1)d} + x^{(u-2)d} + \ldots + x^d + 1) + (x^{(v-1)d} + x^{(v-2)d} + \ldots + x^d + 1).$$

Tegyük fel, hogy $f(x)$ nem irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben, azaz létezik $g(x), h(x) \in \mathbb{Q}[x]$, melyek legalább elsőfokúak és $f(x) = g(x)h(x)$. A Gauss-lemma szerint feltehető, hogy $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$, mert $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Legyen

$$g(x) = c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \ldots + c_1 x + c_0,$$

$$h(x) = d_t x^t + d_{t-1} x^{t-1} + \ldots + d_1 x + d_0.$$

Mivel $c_s d_t = 1$, így $c_s = d_t = \pm 1$. Továbbá $c_0 d_0 = 2$, tehát például $c_0 = \pm 1$, $d_0 = \pm 2$. Az s paritásától függően, $g(x)$ gyökeinek szorzata $\frac{c_0}{c_s}$-sel vagy $-\frac{c_0}{c_s}$-sel egyenlő, azaz $+1$ vagy -1. Azonban $g(x)$ minden z gyökére $|z| > 1$, ami ellentmondás, mert feltettük, hogy legalább elsőfokú. Tehát $f(x)$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

A feladatot Borbély József, Lovász László Miklós, Rácz Béla, Strenner Balázs, Tomon István, Wolosz János oldották meg teljesen. Király Csaba részeredményeket ért el a feladat megoldásában.

5. feladat (Bódi Béla) Legyen G véges nemkommutatív csoport, melynek rendje $t = 2^n m$, ahol n, m pozitív egész számok és m páratlan. Bizonyítsuk be, hogy ha a csoport tartalmaz 2^n-ed rendű elemet, akkor

i. G nem egyszerű csoport;

ii. G tartalmaz m-ed rendű normális részcsoportot.

Megoldás: (Rácz Béla megoldása alapján a kitűző módosításaival)
Értelmezzük a G csoport hatását a G csoporton a következőképpen: ha $g, a \in G$, akkor $g \cdot a = ga$. Legyen $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_t\}$ és S_G a teljes transzformációcsoport a G halmazon. Definiáljuk a ψ leképezést a következőképpen:

$$\psi(a) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_t \\ aa_1 & aa_2 & aa_3 & \ldots & aa_t \end{pmatrix}.$$

Könnyen belátható, hogy ψ a G csoportnak az S_G csoportba képező izomorfizmusa.
Legyen u egy 2^n rendű elem. A $\psi(u)$ elem m darab idegen ciklusok szorzata és minden ciklus hossza 2^n. Ezért $\psi(u)$ az S_G csoport páratlan permutációja. Legyen A_G az S_G csoport páros permutációinak részcsoportja és legyen H azon $h \in G$ elemek halmaza, melyekre $\psi(h) \in A_G$. Ekkor H részcsoportja G-nek és $H \neq G$. Az A_G részcsoport indexe az S_G-ben kettő, így H indexe is kettő G-ben. Tehát H normális részcsoportja G-nek. Ha $H = e$, akkor G két elemű és így kommutatív lenne, ellentétben a feladat feltevésével. Tehát $e \neq H \triangleleft G$, $H \neq G$, azaz G nem egyszerű csoport.
Az állítás második részét n szerinti indukcióval bizonyítjuk. Az $n = 1$ esetben a H rendje $m \neq 1$, tehát az állítás igaz. Ha $n > 1$, akkor $u^2 \in H$ és az u^2 elem rendje 2^{n-1}. A H csoport rendje $2^{n-1}m$ és ismét ciklikus a 2-Sylow részcsoportja. Tehát az indukciós feltevés szerint van H-ban m-rendű M normálosztó. Állítjuk, hogy M a H-ban karakterisztikus részcsoport is.
Tegyük fel ugyanis, hogy M elmozdítható H egy automorfizmusával; ekkor mindenesetre van egy másik m-edrendű M' normálosztó H-ban. Ezek metszete is normálosztó H-ban és páratlan rendű. Ekkor $H/(M \cap M')$-ben $M/(M \cap M')$ és $M'/(M \cap M')$ két normálosztó, amelyek metszete csak az egységelem, vagyis a saját direkt szorzatukat generálják. Tehát $(M/(M \cap M'))(M'/(M \cap M')) = MM'/(M \cap M')$ elemszáma páratlan, csakúgy, mint $M \cap M'$ elemszáma. Így beláttuk, hogy az $MM' \leq H$ részcsoport elemszáma páratlan, ám ez a részcsoport szigorúan nagyobb M-nél, ami nem lehetséges. M tehát a G-beli H normálosztó karakterisztikus részcsoportja, vagyis G-nek is normálosztója. Ezzel az indukció köre lezárult.

A feladatot Borda Bence, Király Csaba, Korándi Dániel, Lovász László Miklós, Mészáros Gábor, Rácz Béla, Strenner Balázs és Szűcs Gábor oldották meg helyesen. Továbbá Hubai Tamás és Kutas Péter is foglalkozott a feladattal.

6. feladat: (Figula Ágota) Egy véges (S, L) illeszkedési struktúrát Steiner hármasrendszernek nevezünk, ha $L \neq \emptyset$, bármely két $x, y \in S$, $x \neq y$ pontra illeszkedik egyetlen $\ell \in L$ egyenes és minden $\ell \in L$ egyenesre illeszkedik pontosan három pont. Legyen (S, L) Steiner hármasrendszer, az $x \neq y$ pontokra illeszkedő egyenes harmadik pontját jelölje xy. Legyen A olyan csoport, amelynek a $C(A)$ centruma szerinti faktorcsoportja prímhatvány rendű. Legyenek $f, h : S \to A$ olyan leképezések, hogy $C(A)$ tartalmazza f képhalmazát, h képhalmaza pedig generálja A-t.
Igazoljuk, hogy ha S bármely két különböző x, y elemére

$$f(x) = h(x)h(y)h(x)h(xy)$$

teljesül, akkor A kommutatív csoport, és van olyan $k \in A$, hogy minden $x \in S$ elemre $f(x) = kh(x)$.

1. Megoldás: (Lovász László Miklós)
Legyen $g : A \to A/C(A)$, $a \mapsto aC(A)$, a természetes homomorfizmus. Tekintsük a $h' = g \circ h : S \to A/C(A)$ leképezést. A h' leképezés képhalmaza generálja az $A/C(A)$ faktorcsoportot. Mivel $f(x) \in C(A)$ minden $x \neq y \in S$ esetén $h'(x)h'(y)h'(x)h'(xy) = 1$, ahol 1 a faktorcsoport egységeleme. Tegyük fel, hogy van olyan x elem, amelyre $h'(x) \neq 1$. Tetszőleges $y \in S$-re legyen $h'(x) = a$, $h'(y) = b$, $h'(xy) = c$. A feltételekből adódik, hogy

$$abac = 1,\ acab = 1,\ babc = 1,\ bcba = 1,\ cacb = 1,\ cbca = 1.$$

Ez azt jelenti, hogy ha vesszük abc-nek egy permutációját, az érték a középső elem inverzével egyenlő. Ebből tudjuk, hogy

$$c = b^{-1}c^{-1}a^{-1} = abcacbcab = ac^{-1}cc^{-1}b = ac^{-1}b$$

$$b^{-2}c^{-1} = abcabcacb = ac^{-2}cb = ac^{-1}b.$$

Ebből $b^{-2} = c^2$. Ez bármely két elemre igaz, így

$$b^{-2} = c^2 = a^{-2} = b^2.$$

Tehát $b^4 = 1$ és ugyanígy $a^4 = c^4 = 1$ és $a^2 = b^2 = c^2$. Mivel $a \neq 1$, az a elem rendje kettőhatvány és mivel az $A/C(A)$ faktorcsoport rendje prímhatvány, ez is kettőhatvány rendű. Mivel

$$(abbc)^3 = abbcabbcabbc = ab^2a^{-1}c^{-1}b^2c = a^3a^{-1}c^{-1}c^3 = a^2c^2 = 1$$

így az $abbc = ac^3 = ac^{-1}$ elem rendje osztója háromnak, viszont kettőhatvány, tehát a rendje csak egy lehet, ezért $a = c$. Ebből $a = b = c$ hasonlóan következik és mivel y tetszőleges, minden y-ra $h'(x) = h'(y)$ teljesül. Tehát a centrum szerinti faktorcsoportot egy elem generálja, viszont a faktorcsoport nem az egyelemű csoport. Ekkor A-t a centruma és egy d elem generálja. Tehát minden a-beli elem felírható cd^i alakban, ahol c centrumbeli. Ekkor

$$(c_1d^{i_1})(c_2d^{i_2}) = c_1c_2d^{i_1}d^{i_2} = c_2c_1d^{i_2+i_1} = (c_2d^{i_2})(c_1d^{i_1}),$$

így az A csoport kommutatív, ami ellentmondás, mert a faktorcsoport nem egyelemű. Ellentmondásra jutottunk abból a feltevésből, hogy van olyan x elem, amelyre $h'(x) \neq 1$. Ez azt jelenti, hogy h minden elemet a centrumba képez, így mivel h képhalmaza generálja a csoportot, a csoport kommutatív.

Mivel a csoport kommutatív, tetszőleges x, y elemekre

$$(h(x))^{-1}f(x) = h(y)h(x)h(xy) = h(x)h(y)h(xy) = (h(y))^{-1}f(y).$$

Tehát ha ezt az x-ben állandó $k = (h(x))^{-1}f(x)$-t bevezetjük, $f(x) = kh(x)$.

2. Megoldás: (Borda Bence)
Lemma. *Ha A Abel-csoport és teljesülnek a feladat feltételei, akkor van olyan $k \in A$, hogy minden $x \in S$-re $f(x) = kh(x)$.*

Bizonyítás. Azt látjuk be, hogy a háromtényezős $\prod_{x\in\ell} h(x)$ szorzat értéke független az $\ell \in L$ választásától. Legyen ugyanis $\ell_1 \neq \ell_2$ két különböző egyenes. Ezek metszete csak 0 vagy 1 elemű lehet. Ha a metszet egyelemű, akkor az ℓ_1 egyenes pontjai legyenek $\{x, y_1, xy_1\}$ és ℓ_2 egyenes pontjai legyenek $\{x, y_2, xy_2\}$ alakúak. A feltétel szerint ekkor

$$f(x) = h(x)h(y_1)h(x)h(xy_1) = h(x)h(y_2)h(x)h(xy_2),$$

amelyből adódik, hogy $h(y_1)h(x)h(xy_1) = h(y_2)h(x)h(xy_2)$, azaz $\prod_{x\in\ell_1} h(x) = \prod_{x\in\ell_2} h(x)$. Ha $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$, akkor legyen $x_1 \in \ell_1$ és $x_2 \in \ell_2$ tetszőleges. Az x_1 és x_2 pontokra illeszkedő egyenest jelölje ℓ_3. Ekkor $\ell_1 \cap \ell_3$ és $\ell_2 \cap \ell_3$ egyeleműek, ezért $\prod_{x\in\ell_1} h(x) = \prod_{x\in\ell_3} h(x) = \prod_{x\in\ell_2} h(x)$. Legyen $k = \prod_{x\in\ell} h(x)$. Tetszőleges $x \in S$-hez válasszunk egy tőle különböző $y \in S$-et, ekkor a feltétel szerint $f(x) = h(x)h(y)h(x)h(xy) = h(x)k = kh(x)$, ezzel beláttuk a lemmát.

Legyen $A/C(A)$ rendje p^n. Az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 0$, akkor $A = C(A)$, azaz A Abel és a Lemma miatt van megfelelő k. Legyen $n > 0$ és tegyük fel, hogy az állítás minden n-nél kisebb számra igaz, ebből bizonyítjuk n-re. Legyen $g : A \to A/C(A)$ a természetes homomorfizmus, azaz $g(a) = aC(A)$ minden $a \in A$-ra. Tekintsük a $g\circ f$ és $g\circ h$ leképezéseket S-ből $A/C(A)$-ba. Mivel minden $x \in S$-re $f(x) \in C(A)$, ezért $g(f(x)) = C(A) \in C(A/C(A))$. Jelölje R_h a h értékkészletét, R_h generálja A-t, így homomorf képe $g(R_h) = R_{g\circ h}$ generálja $A/C(A)$-t, mivel g szürjektív. S bármely két $x \neq y$ elemére $f(x) = h(x)h(y)h(x)h(xy)$, így $g(f(x)) = g(h(x))g(h(y))g(h(x))g(h(xy))$.

Ismert, hogy véges nemtriviális p-csoport centruma nemtriviális. Tehát $C(A/C(A))$ rendje nagyobb, mint 1, így $(A/C(A))/(C(A/C(A)))$ rendje p^m valamely $0 \le m < n$. A $g\circ f$ és $g\circ h$ leképezések, valamint az $A/C(A)$ csoport minden a feladatban szereplő feltételt teljesítenek. Az indukciós feltevés szerint tehát $A/C(A)$ Abel és van olyan $kC(A)$ eleme, amelyre tetszőleges $x \in S$ esetén $g(f(x)) = kC(A)g(h(x))$. A g definiciója miatt $f(x)C(A) = kh(x)C(A)$. De $f(x) \in C(A)$, így $C(A) = kh(x)C(A)$, azaz $kh(x) \in C(A)$. Egy centrumbeli elem minden konjugáltja önmaga. Konjugáljuk $kh(x)$-et k^{-1}-gyel, kapjuk, hogy $kh(x) = h(x)k$. A k elem felcserélhető $h(x)$-szel minden $x \in S$-re, azaz egy generátorrendszer minden elemével. Ekkor k minden elemmel felcserélhető, azaz $k \in C(A)$. Ebből és $kh(x) \in C(A)$-ból következik, hogy $h(x) \in C(A)$ minden $x \in S$-re. A centrum tartalmaz egy generátorrendszert, ez csak úgy lehet, hogy $A = C(A)$, azaz A Abel. A Lemma miatt készen vagyunk.

A feladatot Borda Bence, Horváth Márton, Hubai Tamás, Király Csaba, Lovász László Miklós, Mészáros Gábor, Nagy Csaba, Rácz Béla, Strenner Balázs, Szűcs Gábor és Tomon István oldották meg helyesen. Gosztonyi Balázs általánosabb feltétel mellett vizsgálja az állítást, érvelése szép, de egy következtetés indoklása hiányzik.

7. feladat: (Nagy Péter Tibor, Muzsnay Zoltán) Legyen H az M differenciálható sokaság $\mathsf{Diff}^\infty(M)$ diffeomorfizmuscsoportjának tetszőleges részcsoportja. Az X $\mathcal{C}^\infty$-vektormező a H csoportot *gyengén érinti*, ha van olyan $\mathcal{C}^\infty$-differenciálható k-paraméteres $\{\phi_{(t_1,\ldots,t_k)} \in H\}_{t_i\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ diffeomorfizmus család, amelyre

(i) $\phi_{(t_1,\ldots,t_k)} = \mathsf{Id}$, ha valamely $t_j = 0$, $\ 1 \le j \le k$;

(ii) tetszőleges $f : M \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$-függvényre $Xf = \frac{\partial^k f(\phi_{(t_1,\ldots,t_k)})}{\partial t_1 \cdots \partial t_k}\Big|_{(t_1,\ldots,t_k)=(0,\ldots,0)}$ teljesül.

Igazoljuk, hogy a $H \subset \mathsf{Diff}^\infty(M)$ csoportot gyengén érintő $\mathcal{C}^\infty$-vektormezők kommutátorai is gyengén érintik H-t.

Megoldás: Legyen $\{\psi_{(t_1,\dots,t_l)} \in \mathsf{Diff}^\infty(U)\}_{t_i\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ az $U \subset \mathbb{R}^n$ környezeten értelmezett olyan $\mathcal{C}^\infty$-differenciálható h-paraméteres (lokális) diffeomorfizmus család, amelyre $\psi_{(t_1,\dots,t_l)} = \mathsf{Id}$, ha valamely $t_j = 0$, $1 \le j \le l$. Ekkor minden $x \in U$ pontban teljesül

$$\frac{\partial^{i_1+\dots+i_l}\psi_{(t_1,\dots,t_l)}}{\partial t_1^{i_1}\dots\partial t_l^{i_l}}\Big|_{(0,\dots,0)}(x) = 0, \quad \text{ha valamely } p\text{-re} \quad i_p = 0, \quad 1 \le p \le l. \tag{1}$$

Ebből következik, hogy tetszőleges $x \in M$ pontban $\frac{\partial^l\psi_{(t_1,\dots,t_l)}}{\partial t_1\dots\partial t_l}\Big|_{(0,\dots,0)}(x)$ a fenti $\{\psi_{(t_1,\dots,t_l)}\}$ diffeomorfizmus családnak a lehetséges legalacsonyabb fokú nem-feltétlenül eltűnő parciális deriváltja. Ezért a $\mathcal{C}^\infty$-függvények terén értelmezett $\mathcal{D}$: $f \mapsto \frac{\partial^l f(\psi_{(t_1,\dots,t_l)})}{\partial t_1\dots\partial t_l}\Big|_{(0,\dots,0)}$ leképezés lineáris és kielégíti a $\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)g + f\mathcal{D}(g)$ Leibniz-szabályt. Eszerint $\mathcal{D}$ vektormező U-n, amit az $\frac{\partial^l\psi_{(t_1,\dots,t_l)}}{\partial t_1\dots\partial t_l}\Big|_{(0,\dots,0)} : U \to \mathbb{R}^n$ leképezés határoz meg.
Az (i) feltételt teljesítő $\{\psi_{(t_1,\dots,t_l)} \in \mathsf{Diff}^\infty(U)\}_{t_i\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ diffeomorfizmusok inverz leképezéseiből álló $\{(\psi_{(t_1,\dots,t_l)})^{-1} \in \mathsf{Diff}^\infty(U)\}_{t_i\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ h-paraméteres (lokális) diffeomorfizmus családra is teljesül az (i) feltétel. A $\psi_{(t_1,\dots,t_l)} \circ \psi_{(t_1,\dots,t_l)})^{-1} = \mathsf{Id}$ leképezésre alkalmazva a $\frac{\partial^l}{\partial t_1\dots\partial t_l}$ deriválást az (1) megállapításból nyerjük az alábbi vektormezők közötti összefüggést:

$$\frac{\partial^l(\psi_{(t_1,\dots,t_l)})^{-1}}{\partial t_1\dots\partial t_l}\Big|_{(0,\dots,0)}(x) = -\frac{\partial^l\psi_{(t_1,\dots,t_l)}}{\partial t_1\dots\partial t_l}\Big|_{(0,\dots,0)}(x). \tag{2}$$

Legyen $\{\phi_{(s_1,\dots,s_k)}\}$ az $U \subset \mathbb{R}^n$ környezeten értelmezett olyan $\mathcal{C}^\infty$-differenciálható k-paraméteres (lokális) diffeomorfizmus család, amely teljesíti az (i) feltételt, azaz $\phi_{(s_1,\dots,s_k)} = \mathsf{Id}$, ha valamelyik s_p paramétere a 0-értéket veszi fel. Ekkor a diffeomorfizmus csoportban kiszámított kommutátorokból álló

$$\{[\phi_{(s_1,\dots,s_k)}, \psi_{(t_1,\dots,t_l)}]\} = \{\phi^{-1}_{(s_1,\dots,s_k)} \circ \psi^{-1}_{(t_1,\dots,t_l)} \circ \phi_{(s_1,\dots,s_k)} \circ \psi_{(t_1,\dots,t_l)}\}$$

(lokális) diffeomorfizmus családra is teljesül az (i) feltétel, azaz $[\phi_{(s_1,\dots,s_k)}, \psi_{(t_1,\dots,t_l)}] = \mathsf{Id}$, ha valamelyik s_p vagy t_q paramétere a 0-értéket veszi fel. Ebből következik, hogy

$$\frac{\partial^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_l}[\phi_{(s_1,\dots,s_k)}, \psi_{(t_1,\dots,t_l)}]}{\partial s_1^{i_1}\dots\partial s_k^{i_k}\partial t_1^{j_1}\dots\partial t_l^{i_l}}\Big|_{(0,\dots,0;0,\dots,0)} = 0,$$

ha $i_p = 0$ vagy $j_q = 0$ valamely $1 \le p \le k$ vagy $1 \le q \le l$ indexre.
Az alábbi deriválást két lépésben végezzük el:

$$\frac{\partial^{k+l}[\phi_{(s_1,\dots,s_k)}, \psi_{(t_1,\dots,t_l)}]}{\partial s_1\dots\partial s_k\,\partial t_1\dots\partial t_l}\Big|_{(0,\dots,0;\,0,\dots,0)}(x) =$$

$$= \frac{\partial^k}{\partial s_1\dots\partial s_k}\Big|_{(0,\dots,0)}\frac{\partial^l}{\partial t_1\dots\partial t_l}\Big|_{(0,\dots,0)}\Big(\phi^{-1}_{(s_1,\dots,s_k)} \circ \psi^{-1}_{(t_1,\dots,t_l)} \circ \phi_{(s_1,\dots,s_k)} \circ \psi_{(t_1,\dots,t_l)}(x)\Big).$$

Kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^l}{\partial t_1\dots\partial t_l}\Big|_{(0,\dots,0)}\Big(\phi^{-1}_{(s_1,\dots,s_k)} \circ \psi^{-1}_{(t_1,\dots,t_l)} \circ \phi_{(s_1,\dots,s_k)} \circ \psi_{(t_1,\dots,t_l)}(x)\Big) =$$

$$= d(\phi^{-1}_{(s_1,\dots,s_k)})_{\phi_{(s_1,\dots,s_k)}(x)} \frac{\partial^l \psi^{-1}_{(t_1,\dots,t_l)}}{\partial t_1 \dots \partial t_l}\Big|_{(0,\dots,0)} (\phi_{(s_1,\dots,s_k)}(x)) + \frac{\partial^l \psi_{(t_1,\dots,t_l)}}{\partial t_1 \dots \partial t_l}\Big|_{(0,\dots,0)},$$

ahol $d\big(\phi^{-1}_{(s_1,\dots,s_k)}\big)_{\phi_{(s_1,\dots,s_k)}(x)}$ jelöli a $\phi^{-1}_{(s_1,\dots,s_k)}$ leképezés Jacobi operátorát a $\phi_{(s_1,\dots,s_k)}(x)$ helyen. A kapott kifejezés második tagja nem függ az $s_1, \dots, s_k$ paraméterektől, tehát ezen paraméterek szerinti deriváltja eltűnik. Tehát

$$\frac{\partial^{k+l}[\phi_{(s_1,\dots,s_k)}, \psi_{(t_1,\dots,t_l)}]}{\partial s_1 \dots \partial s_k\, \partial t_1 \dots \partial t_l}\Big|_{(0,\dots,0;\, 0,\dots,0)}(x) = \tag{3}$$
$$= \frac{\partial^k}{\partial s_1 \dots \partial s_k}\Big|_{(0,\dots,0)} \left\{ d(\phi^{-1}_{(s_1,\dots,s_k)})_{\phi_{(s_1,\dots,s_k)}(x)} \frac{\partial^l \psi^{-1}_{(t_1,\dots,t_l)}}{\partial t_1 \dots \partial t_l}\Big|_{(0,\dots,0)} (\phi_{(s_1,\dots,s_k)}(x)) \right\}.$$

A $\{\phi_{(s_1,\dots,s_k)}\}$ (lokális) diffeomorfizmusok (i) tulajdonsága miatt

$$d(\phi^{-1}_{(0,\dots,0)})_{\phi_{(s_1,\dots,s_k)}(x)} = d(\mathsf{Id})_{\phi_{(s_1,\dots,s_k)}(x)}$$

a konstans identikus lineáris operátor, ezért az $s_1, \dots, s_k$ paraméterek szerinti deriváltja eltűnik. Tehát

$$\frac{\partial^k}{\partial s_1 \dots \partial s_k}\Big|_{(0,\dots,0)} \Big(d(\phi^{-1}_{(s_1,\dots,s_k)})_{\phi_{(s_1,\dots,s_k)}(x)} \Big) = d\Big(\frac{\partial^k \phi^{-1}_{(s_1,\dots,s_k)}}{\partial s_1 \dots \partial s_k}\Big|_{(0,\dots,0)} \Big)_x.$$

Ezért (3) jobboldala a következő alakban írható:

$$d\Big(\frac{\partial^k \phi^{-1}_{(s_1,\dots,s_k)}}{\partial s_1 \dots \partial s_k}\Big|_{(0,\dots,0)}\Big)_x \frac{\partial^l \psi^{-1}_{(t_1,\dots,t_l)}(x)}{\partial t_1 \dots \partial t_l}\Big|_{(0,\dots,0)} + d\Big(\frac{\partial^l \psi^{-1}_{(t_1,\dots,t_l)}}{\partial t_1 \dots \partial t_l}\Big|_{(0,\dots,0)}\Big)_x \frac{\partial^k \phi_{(s_1,\dots,s_k)}(x)}{\partial s_1 \dots \partial s_k}\Big|_{(0,\dots,0)}.$$

Ezt (2) felhasználásával tovább alakíthatjuk:

$$d\Big(\frac{\partial^k \phi_{(s_1,\dots,s_k)}}{\partial s_1 \dots \partial s_k}\Big|_{(0,\dots,0)}\Big)_x \frac{\partial^l \psi_{(t_1,\dots,t_l)}(x)}{\partial t_1 \dots \partial t_l}\Big|_{(0,\dots,0)} - d\Big(\frac{\partial^l \psi_{(t_1,\dots,t_l)}}{\partial t_1 \dots \partial t_l}\Big|_{(0,\dots,0)}\Big)_x \frac{\partial^k \phi_{(s_1,\dots,s_k)}(x)}{\partial s_1 \dots \partial s_k}\Big|_{(0,\dots,0)},$$

ami megegyezik a

$$\frac{\partial^l \psi_{(t_1,\dots,t_l)}}{\partial t_1 \dots \partial t_l}\Big|_{(0,\dots,0)}, \quad \frac{\partial^k \phi_{(s_1,\dots,s_k)}}{\partial s_1 \dots \partial s_k}\Big|_{(0,\dots,0)} : U \to \mathbb{R}^n,$$

vektormezők Lie-zárójelével.

A megoldás a kitűzők javaslata alapján készült. A feladatot Gosztonyi Balázs, Horváth Márton és Strenner Balázs oldotta meg teljesen.

8. feladat (Elekes Márton) Legyen $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a számegyenes mérhető részhalmazainak egy olyan sorozata, amely majdnem minden pontot végtelen sokszor lefed. Igazoljuk, hogy megadható $B \subset \mathbb{N}$ nullsűrűségű halmaz úgy, hogy $\{A_n\}_{n\in B}$ is majdnem minden pontot végtelen sokszor lefed. ($B \subset \mathbb{N}$ nullsűrűségű, ha $\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{B\cap\{0,\dots,n-1\}\}}{n} = 0$.)

Megoldás: (Hubai Tamás)
1. Lemma. *Bármely $[a,b]$ intervallumhoz, n_0 kezdőindexhez, m pozitív egészhez és $\epsilon > 0$ valós számhoz megadható véges sok $n_1, \dots, n_k$ index úgy, hogy minden i-re $n_i \ge n_0$, minden $i \ne j$ esetén $|n_i - n_j| \ge m$ és $\lambda(\cup_i A_{n_i} \cap [a,b]) \ge \lambda([a,b]) - \epsilon$ (λ jelöli a Lebesgue mértéket).*

Bizonyítás: Kezdetben legyen $H = [a, b]$ és $n_* = n_0$. Jelölje B_i az $A_{n_*+i} \cap H$ halmazt és legyen $C_k = \cup_{i=0}^k B_i$. Mivel A_i-k a számegyenes majdnem minden pontját végtelen sokszor lefedik, ezért B_i-k is lefednek majdnem minden H-beli pontot (végtelen sokszor). Tehát a $C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots$ halmazok felszálló uniója $\cup_{i=0}^\infty C_i = \cup_{i=0}^\infty B_i$ is majdnem minden H-beli pontot lefed. A mérték folytonossága miatt $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda(C_i) = \lambda(\cup_{i=0}^\infty C_i) = \lambda(H)$, így egy alkalmas i-re $\lambda(C_i) \geq \frac{\lambda(H)}{2}$, ekkor az A_{n_*}, A_{n_*+1}, A_{n_*+i} halmazok lefedik H-nak legalább a felét.
Ezek között azonban még lehet két olyan halmaz, amelyek indexének a távolsága m-nél kisebb. Gyűjtsük ezért külön a halmazokat az index m-es maradéka szerint m csoportba. A skatulyaelv alapján az egyik csoportban levő halmazok lefedik H-nak legalább az $\frac{1}{2m}$ részét (vagyis az uniójuk H-ba eső része legalább $\frac{\lambda(H)}{2m}$ mértékű), és most már az indexek különbségével sincs probléma.
A kapott indexeket vegyük hozzá a kezdetben üres $I \subset \mathbb{N}$ halmazhoz, majd ismételjük meg az eljárást H helyett a $H \setminus \cup_{i\in I} A_i$ halmazra és $n_* = \max_{i\in I} i + m$-re. Így az új indexekkel sosem sérthetjük meg a feltételt és a még fedetlen részhalmaza H-nak minden lépésben a mértékének $\frac{1}{2m}$ részével csökken. Tehát s lépés után $(1 - \frac{1}{2m})^s \lambda([a, b])$ mértékű kivétellel lefedtük $[a, b]$-t. Mivel $\lim\limits_{s\to\infty} (1 - \frac{1}{2m})^s = 0$, így alkalmas s-re $(1 - \frac{1}{2m})^s < \frac{\epsilon}{\lambda([a,b])}$. Ekkor s lépés után leállva I megfelel a feltételeknek.

Konstruáljuk meg a B halmazt a Lemma alapján. Ehhez megszámlálható sok fázisban egyenként véges sok számot veszünk hozzá B-hez, növekvő sorrendben. Az aktuális fázis sorszámát jelölje $t = 1, 2, 3, \ldots$. Mindig a Lemmát hívjuk meg t-től függő paraméterekkel és a kapott I halmazt adjuk B-hez. Az első fázisban n_0 legyen 0, a későbbiekben $n_0 = \max(B) + t$. Az $[a, b]$ intervallum szerepét $[-t, t]$ töltse be, m legyen t és ϵ legyen $\frac{1}{2^t}$. Jelölje a t. fázisban kapott I halmazt I_t.

2. Állítás. *Bármely k pozitív egészre az $\{A_n\}_{n\in B}$ halmazok a $[-k, k]$ intervallumból legfeljebb $\frac{1}{2^k}$ mértékű halmaz pontjait nem fedik le legalább k-szor.*

Bizonyítás: Csak az $I_{k+1}, I_{k+2}, \ldots, I_{2k}$ halmazokat nézzük. A Lemma szerint az ilyen indexű A_i halmazokra teljesül: Bármely $1 \leq l \leq k$-ra az $\cup_{i\in I_{k+l}} A_i$ halmaz lefedi $[-k, k]$-t legfeljebb $\frac{1}{2^{k+l}}$ mértékű kivétellel. Így $\bigcup_{i\in I_{k+1}\cup I_{k+2}\cup\cdots\cup I_{2k}} A_i$ k-szor lefedi az összes olyan pontot, ami egyik kivételhalmazban sem volt benne, tehát $\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+k}} < \frac{1}{2^k}$ mértékű kivétellel minden pontot.

3. Következmény. *Az $\{A_n\}_{n\in B}$ halmazok a számegyenes minden pontját végtelen sokszor lefedik, nullmértékű kivétellel.*

4. Állítás. *B nullsűrűségű.*

Bizonyítás: Azt bizonyítjuk be, hogy a $\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{B\cap\{0,\ldots,n-1\}\}}{n}$ sűrűség legfeljebb $\frac{1}{k}$, ebből következik az állítás. Legyen $B_1 = \cup_{i=1}^k I_i$ és $B_2 = \cup_{i=k+1}^\infty I_i$, így $B = B_1 \cup B_2$. B_2-ről tudjuk, hogy a legkisebb eleme legalább $k + 1$ és bármely két elemének távolsága legalább k, így $B_2 \cap \{0, \ldots, n-1\}$ legfeljebb $\left[\frac{n}{k}\right]$ elemű. $B_1 \cap \{0, \ldots, n-1\}$-ről pedig csak azt használjuk, hogy legfeljebb annyi eleme van, mint B_1-nek, ami egy (k-tól és az A_i-ktől függő) c konstans. Így $\frac{\#\{B\cap\{0,\ldots,n-1\}\}}{n} \leq \frac{c+\left[\frac{n}{k}\right]}{n} \leq \frac{c}{n} + \frac{1}{k}$. Itt $\frac{c}{n}$ határértéke 0, vagyis $\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{B\cap\{0,\ldots,n-1\}\}}{n} \leq \frac{1}{k}$. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A feladatra Gosztonyi Balázs, Horváth Márton, Hubai Tamás, Lovász László Miklós, Nagy Csaba és Strenner Balázs adtak teljes megoldást. Rácz Béla megoldása kissé hiányos, Grósz Dániel pedig részeredményeket ért el.

9. feladat (Páles Zsolt) Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^m$ egy nemüres kompakt konvex halmaz és $f : P \to \mathbb{R}_+$ egy konkáv függvény. Igazoljuk, hogy minden $\xi \in \mathbb{R}^m$ esetén

$$\int_P \langle \xi, x\rangle f(x)dx \leq \left[\frac{m+1}{m+2}\sup_{x\in P}\langle \xi, x\rangle + \frac{1}{m+2}\inf_{x\in P}\langle \xi, x\rangle\right] \cdot \int_P f(x)dx.$$

Megoldás: (Lovász László Miklós)
A feladat állítása ekvivalens azzal, hogy

$$\int_P (\sup_{z\in P}\langle \xi, z\rangle - \langle \xi, x\rangle)f(x)dx \geq \frac{1}{m+2}\left[\sup_{z\in P}\langle \xi, z\rangle - \inf_{z\in P}\langle \xi, z\rangle\right]\int_P f(x)dx.$$

Vegyük az $m+1$ dimenziós térben a következő H ponthalmazt:

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}) : (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in P, 0 \leq x_{m+1} \leq f(x_1, \ldots, x_m)\}.$$

A H halmaz konvex, mivel f konkáv, így bármely két pontját ha vesszük, az összekötő szakaszon egyrészt az első m koordináta P-beli, mivel P konvex, és az $m+1$-edik koordináta egyrészt nemnegatív, mivel a szakasz végpontjain nemnegatív, másrészt legfeljebb $f(x)$, mert a végpontjain ez igaz, és f konkáv. Mivel H korlátos, zárt halmaz van mértéke, ami éppen $\int_P f(x)dx$.

$$\int_P (\sup_{z\in P}\langle \xi, z\rangle - \langle \xi, x\rangle)f(x)dx = \int_P \left(\int_{\langle \xi, x\rangle}^{\sup_{z\in P}\langle \xi, z\rangle} 1dy\right)f(x)dx =$$

$$\int_P \int_{\langle \xi, x\rangle}^{\sup_{z\in P}\langle \xi, z\rangle} f(x)dydx.$$

Legyen K az $m+2$-dimenziós térnek a következő részhalmaza:

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}) : (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in P, 0 \leq x_{m+1} \leq f(x_1, \ldots, x_m),$$
$$0 \leq x_{m+2} \leq \sup_{z\in P}\langle \xi, z\rangle - \langle \xi, x\rangle\}.$$

A K halmaz is konvex lesz, ugyanis ha veszünk egy szakaszt, aminek a végpontjai K-beliek, akkor a rajta lévő pontok első $m+1$ koordinátájára az előzőekben leírtak teljesülnek. Az utolsó koordináta nem függ az $m+1$.-edik koordinátától így ez legfeljebb a $g(x) = \sup_{z\in P}\langle \xi, z\rangle - \langle \xi, x\rangle$ függvény értékét veszi fel, és a $g(x)$ függvény nemnegatív, konkáv (lineáris). Mivel K korlátos, zárt van mértéke és ez éppen $\int_P (\sup_{z\in P}\langle \xi, z\rangle - \langle \xi, x\rangle)f(x)dx$. Mivel P korlátos, zárt, van olyan $v \in P$, amire $\inf_{z\in P}\langle \xi, z\rangle = \langle \xi, v\rangle$. Vegyük a $w = (v, 0, \sup_{z\in P}\langle \xi, z\rangle - \inf_{z\in P}\langle \xi, z\rangle)$ pontot. Ez benne van K-ban. Másrészt H is benne van K-ban (H-t beágyazzuk az $m+2$-dimenziós térbe úgy, hogy az utolsó koordináta 0 legyen). Legyen H_1 a w és H által kifeszített korlátos kúp. Tehát H_1 a legszűkebb konvex halmaz, ami tartalmazza w-t és H-t. Ennek a mértéke

$$\frac{1}{m+2}\left[\sup_{z\in P}\langle \xi, z\rangle - \inf_{z\in P}\langle \xi, z\rangle\right]\int_P f(x)dx.$$

Mivel K tartalmazza H-t és w-t, így tartalmazza H_1-et, mert H_1 minden pontja rajta van egy szakaszon, aminek az egyik végpontja w a másik H. Így K mértéke legalább annyi, mint H_1 mértéke, azaz

$$\int_P (\sup_{z\in P}\langle \xi, z\rangle - \langle \xi, x\rangle)f(x)dx \geq \frac{1}{m+2}\left[\sup_{z\in P}\langle \xi, z\rangle - \inf_{z\in P}\langle \xi, z\rangle\right]\int_P f(x)dx.$$

A feladatra Horváth Márton, Hubai Tamás, Lovász László Miklós, Nagy Csaba, Rácz Béla és Strenner Balázs adtak teljes megoldást.

10. feladat (Szilasi József és Tamássy Lajos) Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $L : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos, a második változójában elsőfokú pozitív homogén, $U \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ fölött pozitív és C^2-osztályú Lagrange-függvény, amelyre teljesül, hogy tetszőleges $p \in U$ esetén a

$$\{v \in \mathbb{R}^n | L(p, v) = 1\}$$

hiperfelület Gauss-görbülete seholsem zérus. Határozzuk meg L extremálisait, ha eleget tesz a

$$\sum_{k=1}^{n} y^k \partial_k \partial_{n+i} L = \sum_{k=1}^{n} y^k \partial_i \partial_{n+k} L \quad (i \in \{1, \dots, n\})$$

parciális differenciálegyenlet-rendszernek, ahol $y^k(u, v) := v^k$, ha $(u, v) \in U \times \mathbb{R}^n$, $v = (v^1, \dots, v^n)$.

Megoldás:

1. Az $\mathbb{R}^n$ tér kanonikus bázisára az $(e_i)_{i=1}^n$ jelölést használjuk; ennek $(e^i)_{i=1}^n$ duálisa $\mathbb{R}^n$ kanonikus koordinátarendszere. (Ekkor $e^i(e_j) = \delta^i_j$.) $\mathbb{R}^n$ egy p pontbeli $T_p\mathbb{R}^n = \{p\} \times \mathbb{R}^n$ érintőterét azonosíthatjuk $\mathbb{R}^n$-nel, és természetesen interpretálhatjuk a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ függvényalgebra p-beli derivációinak vektortereként is. A feladatbeli y^i függvények megadhatók $y^i = e^i \circ \mathrm{pr}_2$ alakban; legyen $x^i := e^i \circ \mathrm{pr}_1$ (pr_1, ill. pr_2 az $U \times \mathbb{R}^n$ szorzattér első, ill. második tényezőjére való természetes projekció). Az e^i, x^i, y^i koordinátafüggvények a $\frac{\partial}{\partial e^i}$, $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\frac{\partial}{\partial y^i}$ derivációkat (vagy vektormezőket) származtatják. Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $\gamma : I \to U$ sima görbe, $\gamma^i := e^i \circ \gamma$, akkor γ sebesség-, ill. gyorsulás-vektormezője, alkalmazva az összegzési megállapodást,

$$\dot{\gamma} = \gamma^{i\prime} \left(\frac{\partial}{\partial e^i} \circ \gamma \right), \tag{4}$$

$$\ddot{\gamma} = \gamma^{i\prime} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \circ \gamma \right) + \gamma^{i\prime\prime} \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \circ \gamma \right). \tag{5}$$

Vegyük észre, hogy

$$x^i \circ \dot{\gamma} = \gamma^i, \quad y^i \circ \dot{\gamma} = \gamma^{i\prime} \quad (i \in \{1, \dots, n\}). \tag{6}$$

2. Az L-re vonatkozó Euler – Lagrange-differenciálegyenlet (a hagyományos írásmóddal)

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y^i} = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Ennek egy $\gamma : I \to U$ sima görbe pontosan akkor megoldása, ha

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} \circ \dot{\gamma} - \left(\frac{\partial L}{\partial y^i} \circ \dot{\gamma} \right)' = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \tag{7}$$

Alkalmazva a láncszabályt, itt

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\circ\dot\gamma\right)' = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^k\partial y^i}\circ\dot\gamma\right)\left(x^k\circ\dot\gamma\right)' + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^k\partial y^i}\circ\dot\gamma\right)\left(y^k\circ\dot\gamma\right)' =$$
$$\overset{(6)}{=} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^k\partial y^i}\circ\dot\gamma\right)\gamma^{k\prime} + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^k\partial y^i}\circ\dot\gamma\right)\gamma^{k\prime\prime},$$

(7) ezért az

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}\circ\dot\gamma - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^k\partial y^i}\circ\dot\gamma\right)\gamma^{k\prime} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^k\partial y^i}\circ\dot\gamma\right)\gamma^{k\prime\prime} = 0 \quad (i\in\{1,\dots,n\}) \tag{8}$$

alakba írható.

A feltételben szereplő PDE a bevezetett jelölésekkel (és továbbra is alkalmazva az összegzési megállapodást)

$$y^k\frac{\partial^2 L}{\partial x^k\partial y^i} = y^k\frac{\partial^2 L}{\partial x^i\partial y^k}, \quad i\in\{1,\dots,n\}.$$

Mivel L elsőfokú pozitív homogenitása miatt $\frac{\partial L}{\partial y^k}y^k = L$, ez utóbbi reláció ekvivalens azzal, hogy

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^k\partial y^i}y^k = \frac{\partial L}{\partial x^i}, \quad i\in\{1,\dots,n\}.$$

E feltétel mellett (8) a

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^i\partial y^k}\circ\dot\gamma\right)\gamma^{k\prime\prime} = 0, \quad i\in\{1,\dots,n\} \tag{9}$$

alakra redukálódik.

3. Rátérünk a gondolatmenet döntő szakaszára. Kronecker egy klasszikus eredménye szerint (ld. Kronecker: *Werke*, Vol. 1, 223–224) az

$$\mathcal{I}_p := \{v\in\mathbb{R}^n | L(p,v) = 1\}$$

ún. indikátrix-hiperfelületek egy v pontbeli Gauss-görbülete a

$$K_p(v) = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}(p,v)\right)^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}\det\left(\frac{\partial^2 L^2}{\partial y^i\partial y^j}(p,v)\right)$$

formulával adható meg. Mivel a feltétel értelmében ez seholsem zérus, következik, hogy a $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^i\partial y^j}\right)$ mátrix rangja mindenütt maximális, és így $n-1$-gyel egyenlő. (Egy lehetséges érvelés részleteit illetően ld. pl. M. Giaquinta – S. Hildebrandt: *Calculus of Variations* Vol. II (Springer, 2004), p. 196, Theorem 2.) A $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^i\partial y^j}\right)$ mátrix által reprezentált $\binom{0}{2}$-tenzor nullterét a $C = \sum_{i=1}^n y^i\frac{\partial}{\partial y^i}$ vektormező generálja. (9) alapján így azt kapjuk, hogy

$$\gamma^{k\prime\prime} = \mu\gamma^{k\prime}, \quad k\in\{1,\dots,n\},$$

ahol $\mu : I \to \mathbb{R}$ sima függvény. Innen közvetlenül adódik, hogy $\gamma : I \to U$ *parametrizált egyenes.*

A megoldás a kitűzők javaslata alapján készült. Strenner Balázs foglalkozott a feladattal.

11. feladat: (Molnár Lajos) Jelölje H_n az $n \times n$-es önadjungált komplex mátrixok lineáris terét és ebben P_n a pozitív szemidefinit mátrixok kúpját. Tekintsük H_n-en a szokásos belsőszorzatot

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr} AB \qquad (A, B \in H_n)$$

és a belőle származó metrikát. Mutassuk meg, hogy bármely $\phi : P_n \to P_n$ izometria (azaz a fenti metrikára vonatkozó, nem felétlenül szürjektív távolságtartó leképezés) előáll

$$\phi(A) = UAU^* + X \qquad (A \in H_n)$$

vagy

$$\phi(A) = UA^TU^* + X \qquad (A \in H_n)$$

alakban valamely $n \times n$-es U unitér mátrix és X pozitív szemidefinit mátrix segítségével, ahol ^{T} a transzponálást, * az adjungálást jelöli.

Megoldás: (Hubai Tamás megoldása alapján a kitűző módosításaival)

Jelölje M_n az $n \times n$-es komplex mátrixok terét. Az alábbiakban ennek elemeit néha mint a $\mathbb{C}^n$ véges dimenziós Hilbert-tér operátorait tekintjük. Jelölje $\|.\|_2$ a feladatban szereplő belsőszorzatból származó normát.

1. Állítás: *A ϕ leképezés affin.*

Bizonyítás: Jól ismert, és egyszerű gondolatmenettel könnyen igazolható, hogy belsőszorzat térben az egymástól d távolságra lévő x, y pontokat összekötő szakasz $\lambda x + (1-\lambda)y$ pontja ($\lambda \in [0, 1]$) egyértelműen meghatározott az által, hogy az x-től $(1-\lambda)d$, az y-tól pedig λd távolságra van. Innen következik, hogy

$$\phi(\lambda A + (1-\lambda)B) = \lambda\phi(A) + (1-\lambda)\phi(B) \qquad (\lambda \in [0, 1],\ A, B \in P_n),$$

azaz ϕ affin leképezés.

Tekintsük a $\psi(.) = \phi(.) - \phi(0)$ transzformációt. Nyílvánvaló, hogy $\psi : P_n \to H_n$ affin leképezés, ami a 0-t 0-ba képezi. Egyszerű algebrai számolás mutatja, hogy ψ additív és pozitív homogén. Ezt felhasználva könnyű látni, hogy a teljes H_n-en

$$\Psi(A - B) = \psi(A) - \psi(B) \qquad (A, B \in P_n)$$

módon definiált $\Psi : H_n \to H_n$ transzformáció jóldefiniált, kiterjesztése ψ-nek, additív és pozitív homogén, tehát lineáris. Emlékeztetünk rá, hogy H_n minden eleme előáll két P_n-beli elem különbségeként.

2. Állítás: *$\Psi : H_n \to H_n$ lineáris izometria.*

Bizonyítás: Valóban,

$$\|\Psi(A-B)\|_2 = \|\psi(A)-\psi(B)\|_2 = \|\phi(A)-\phi(B)\|_2 = \|A-B\|_2$$

teljesül minden $A, B \in P_n$ esetén. Ezért $\|\Psi(T)\|_2 = \|T\|_2$ $(T \in H_n)$. Speciálisan, Ψ lineáris bijekciója H_n-nek.

3. Állítás: *A Ψ transzformáció P_n elemeit P_n-be képezi.*

Bizonyítás: Mivel $A \in P_n$ esetén $\Psi(A) = \psi(A) = \phi(A) - \phi(0) \geq -\phi(0)$, így az A helyett λA-t írva $(\lambda > 0)$, rendezés után kapjuk, hogy $\Psi(A) \geq -\phi(0)/\lambda$. Innen $\lambda \to \infty$ határérték vételével adódik, hogy $\Psi(A) \geq 0$.

4. Állítás: *Ψ egy-rangú projekciót egy-rangú projekcióba képez.*

Bizonyítás: Először is, mivel Ψ egy Hilbert-tér lineáris izometriája, így megőrzi a belsőszorzatot, azaz

$$\langle \Psi(T), \Psi(S)\rangle = \langle T, S\rangle \qquad (T, S \in H_n).$$

Állítjuk, hogy $A, B \in P_n$ esetén $\langle A, B\rangle = tr(AB) = 0$ pontosan akkor teljesül ha $AB = 0$. Nyílván csak a szükségességgel kell foglalkozni. Mivel P_n elemeinek van P_n-beli négyzetgyöke, így a $tr(\sqrt{A}B\sqrt{A}) = tr(AB) = 0$ összefüggésből - felhasználva, hogy $\sqrt{A}B\sqrt{A} \in P_n$ - kapjuk, hogy $\sqrt{A}B\sqrt{A} = 0$. Ez azt jelenti, hogy $(\sqrt{B}\sqrt{A})^*(\sqrt{B}\sqrt{A}) = 0$ ahonnan $\sqrt{B}\sqrt{A} = 0$ és így $BA = 0 = AB$ következik.
Az $AB = 0$ összefüggés fennállása azzal ekvivalens, hogy az A és B operátorok értékkészlete egymásra merőleges. Innen következik, hogy egy $A \in P_n$ operátor pontosan akkor egy-rangú, ha beilleszthető egy n-tagú $A_1, \ldots, A_n \in P_n$ nemzérus elemekből álló sorozatba, melynek elemei egymásra (a fenti belsőszorzatra nézve) ortogonálisak. Az előzőek alapján adódik, hogy Ψ a P_n egy-rangú elemeit egy-rangú elemekbe képezi, azaz egy-rangú projekciók pozitív skalárszorosait hasonló elemekbe viszi. Mivel Ψ a $\|.\|_2$ normát őrzi, kapjuk, hogy Ψ egy-rangú projekciót egy-rangú projekcióba képez.

Tekintsük a $\mathbb{C}^n$ standard bázisát $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és az ennek egyes elemeihez tartozó egy-rangú projekciókat: $S_i = e_i e_i^*$ (a főátló i. eleme 1-es, minden más mező 0). Mivel az S_i-k páronként ortogonális egy-rangú projekciók, ugyanez igaz a képeikre. A fentiekből következik, hogy vannak olyan egymásra merőleges v_i egységvektorok $\mathbb{C}^n$-ben, melyekre $\Psi(S_i) = v_i v_i^*$. A v_i-k ortonormált bázist alkotnak $\mathbb{C}^n$-ben, így a v_i^* sorokból álló U mátrix unitér, és $Uv_i = e_i$. Tekintve a $\Psi'(A) = U\Psi(A)U^*$ transzformációt, ez is lineáris izometria H_n-en, ami P_n-beli elemet P_n-be képez. Továbbá

$$\Psi'(S_i) = U\Psi(S_i)U^* = Uv_i v_i^* U^* = Uv_i(Uv_i)^* = e_i e_i^* = S_i.$$

A bizonyítandó állítást tekintve feltehetjük, hogy már Ψ is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, azaz identikus az S_i-ken.

Legyen $T_{ij} = (e_i + e_j)(e_i + e_j)^*$. Mivel $\frac{e_i+e_j}{\sqrt{2}}, \frac{e_i-e_j}{\sqrt{2}}, e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_n$ is ortonormált bázis, így a hozzájuk a Ψ leképezésen keresztül társított $\mathbb{C}^n$-beli egységvektorok is páronként merőlegesek. Ebből következik, hogy a T_{ij} képe $\Psi(T_{ij}) = (\alpha e_i + \beta e_j)(\alpha e_i + \beta e_j)^*$ alakú (csak az i. és j. sorok/oszlopok metszete lehet $\neq 0$). Mivel

$$\langle S_i, \Psi(T_{ij})\rangle = \langle \Psi(S_i), \Psi(T_{ij})\rangle = \langle S_i, T_{ij}\rangle = 1,$$

így az i. sor i. oszlopában 1-es van és hasonlóan a j. sor j. oszlopában is. Továbbá $\|T_{ij}\|_2 = 2$, így a másik két elem (ami egymás konjugáltja) 1 abszolútértékű. Így

$$\Psi(T_{ij}) = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & \varepsilon & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \overline{\varepsilon} & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} =: T_{ij}^{\varepsilon}.$$

Legyen

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n),$$

ahol ε_j jelöli a $\Psi(T_{1j})$ felírásában szereplő ε tagot. Ez az U nyilván unitér és a $\Psi'(A) = U\Psi(A)U^*$ transzformációt tekintve elérhetjük, hogy Ψ az S_i-k mellett a T_{1j} mátrixokat is helyben hagyja.

5. Állítás: *Ψ minden T_{ij}-t helyben hagy.*

Bizonyítás: Jelölje ε a $\Psi(T_{ij})$ felírásában szereplő ε tagot. Vizsgáljuk a $T_{1i} + T_{1j} + T_{ij} - S_1 - S_i - S_j$ kifejezést (csak az 1., i. és j. sort/oszlopot tüntjük fel, a többi úgyis 0). Mivel

$$\begin{pmatrix} 1&1&0\\1&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1&0&1\\0&0&0\\1&0&1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&1\\0&1&1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} = (e_1 + e_i + e_j)(e_1 + e_i + e_j)^*$$

pozitív szemidefinit, így a képe

$$\begin{pmatrix} 1&1&0\\1&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1&0&1\\0&0&0\\1&0&1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&\varepsilon\\0&\overline{\varepsilon}&1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&1&1\\1&1&\varepsilon\\1&\overline{\varepsilon}&1 \end{pmatrix}$$

is pozitív szemidefinit. Tehát

$$\begin{vmatrix} 1&1&1\\1&1&\varepsilon\\1&\overline{\varepsilon}&1 \end{vmatrix} \geq 0,$$

azaz

$$1 + \varepsilon + \overline{\varepsilon} - 1 - 1 - \varepsilon\overline{\varepsilon} = 2\Re\varepsilon - 2 \geq 0 \Rightarrow \Re\varepsilon \geq 1 \Rightarrow \varepsilon = 1,$$

és ezért T_{ij} is helyben marad.

6. Állítás: *Jelölje T_{ij}^{ε} a fentebb már definiált $(e_i + \overline{\varepsilon} e_j)(e_i + \overline{\varepsilon} e_j)^*$ mátrixot. Ekkor $\Psi(T_{ij}^{\varepsilon}) = T_{ij}^{\varepsilon}$, vagy $\Psi(T_{ij}^{\varepsilon}) = T_{ij}^{\overline{\varepsilon}}$.*

Bizonyítás: A $\Psi(T_{ij})$ alakjáról elmondottak itt is érvényesek, tehát $\Psi(T_{ij}^{\varepsilon}) = T_{ij}^{\varepsilon'}$ valamilyen ε'-re. Mivel

$$\langle T_{ij}, T_{ij}^{\varepsilon}\rangle = 1 + \varepsilon + \overline{\varepsilon} + 1 = 2 + 2\Re\varepsilon$$

és

$$\langle T_{ij}, T_{ij}^{\varepsilon'} \rangle = 1 + \varepsilon' + \overline{\varepsilon'} + 1 = 2 + 2\Re\varepsilon'$$

megegyezik, így $\Re\varepsilon = \Re\varepsilon'$, vagyis $\varepsilon' = \varepsilon$ vagy $\varepsilon' = \overline{\varepsilon}$.

7. Állítás: *Vagy globálisan (minden i, j, ε-ra) $\Psi(T_{ij}^{\varepsilon}) = T_{ij}^{\varepsilon}$, vagy mindig $\Psi(T_{ij}^{\varepsilon}) = T_{ij}^{\overline{\varepsilon}}$.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\Psi(T_{ij}^{\varepsilon}) = T_{ij}^{\varepsilon}$ és $\Psi(T_{kl}^{\varepsilon'}) = T_{kl}^{\overline{\varepsilon'}}$, ahol ε és ε' egyike sem ± 1. Mivel

$$T_{ij}^{\varepsilon} = \Re\varepsilon \cdot T_{ij} + \Im\varepsilon \cdot T_{ij}^{\mathbf{i}} + (1 - \Re\varepsilon - \Im\varepsilon)(S_i + S_j)$$

($\mathbf{i} = \sqrt{-1}$), ezért a már ismertekből kapjuk, hogy $\Psi(T_{ij}^{\mathbf{i}}) = T_{ij}^{\mathbf{i}}$ és hasonlóan adódik, hogy $\Psi(T_{kl}^{\mathbf{i}}) = T_{kl}^{-\mathbf{i}}$. Vizsgáljuk meg $\Psi(T_{il}^{\mathbf{i}})$-t. Ha ez $T_{il}^{-\mathbf{i}}$, akkor Ψ ij-re és il-re viselkedik különbözően, ha pedig $T_{il}^{\mathbf{i}}$, akkor il-re és kl-re. A két eset között formális szimmetria érvényesül, ezért feltehetjük, hogy az első áll fenn. Vizsgáljuk a $T_{ij}^{\mathbf{i}} + T_{il}^{\mathbf{i}} + T_{jl} - S_i - S_j - S_l$ kifejezést (csak az i., j., l. sorokat/oszlopokat tüntetjük fel). Mivel

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} & 0 \\ -\mathbf{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{i} & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 1 & 1 \\ -\mathbf{i} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= (e_i - \mathbf{i}e_j - \mathbf{i}e_k)(e_i - \mathbf{i}e_j - \mathbf{i}e_k)^*$$

pozitív szemidefinit, így a képe

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} & 0 \\ -\mathbf{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{i} & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 1 & 1 \\ \mathbf{i} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

is pozitív szemidefinit. Tehát

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{i} & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 1 & 1 \\ \mathbf{i} & 1 & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$$

De ez $1 + \mathbf{i}^2 + (-\mathbf{i})^2 - 1 - 1 - 1 = -4$, ami ellentmondás. Ezért az indirekt feltevés hamis, és így minden $T_{ij}^{\mathbf{i}}$ képe önmaga vagy mindegyik képe a konjugáltja.

Bármilyen A önadjungált mátrix előáll az S_i, T_{ij} és $T_{ij}^{\mathbf{i}}$ elemi mátrixok valós együtthatós lineáris kombinációjaként. Beláttuk, hogy Ψ vagy mindegyiken identikus, vagy mindegyiken a konjugálás (S_i-re és T_{ij}-re ez a kettő ugyanaz), így vagy mindig $\Psi(A) = A$, vagy mindig $\Psi(A) = \overline{A} = A^T$.

Figyelembe véve a bizonyítás során alkalmazott redukciókat, kapjuk az eredeti állítást.

Megjegyzés: (1) Nyilvánvaló, hogy minden a feladat megfogalmazásában szereplő alakú transzformáció izometriája P_n-nek.
(2) Mivel a fenti belsőszorzattal az önadjungált mátrixok H_n tere Hilbert-tér, könnyű látni, hogy a teljes H_n-nek viszont vannak olyan izometriái, amelyek nem írhatók fel a feladatban szereplő egyszerű alakhoz hasonló formában.

A feladatra Hubai Tamás, Lovász László Miklós, Rácz Béla és Strenner Balázs adtak teljes megoldást. Rácz Béla megoldása néhány ponton vázlatos.

12. feladat (Móri Tamás és Székely Gábor) Legyenek Z_1, $Z_2 \dots$, Z_n d-dimenziós standard normális eloszlású független (oszlop)vektorok, $n - 1 > d$. Legyen továbbá

$$\overline{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i, \quad S_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Z_i - \overline{Z})(Z_i - \overline{Z})^\top$$

a mintaátlag, illetve a korrigált tapasztalati kovarianciamátrix. Tekintsük az $Y_i = S_n^{-1/2}(Z_i - \overline{Z})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ standardizált mintát. Bizonyítandó, hogy

$$\frac{E|Y_1 - Y_2|}{E|Z_1 - Z_2|} > 1,$$

és a hányados nem függ d-től, csak n-től.

Megoldás: (Móri Tamás és Székely Gábor)
Legyen $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ $n \times d$ méretű standard normális mátrix, továbbá

$$a_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^\top, \; a_2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0\Big)^\top, \; a_3, \ \ldots, \ a_n$$

ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Tekintsük a $\xi_i = Za_i$ vektorokat, ezek függetlenek és d dimenziós standard normális eloszlásúak. Ezekkel

$$\xi_1 = \sqrt{n}\,\overline{Z}, \quad (n-1)S_n = \sum_{i=2}^{n-1} \xi_i \xi_i^\top = \xi_2\xi_2^\top + (n-2)S,$$

ahol S ugyanolyan eloszlású, mint S_{n-1} (azaz, mint egy $n-1$ elemű mintából számolt korrigált tapasztalati kovarianciamátrix), továbbá ξ_1 és S függetlenek.

Legyen $\psi = S^{-1/2}\xi_2$ és E a (d dimenziós) egységmátrix. Ekkor

$$\begin{aligned} S_n^{-1} &= (n-1)\Big(\xi_2\xi_2^\top + (n-2)S\Big)^{-1} = \\ &= \frac{n-1}{n-2}\, S^{-1/2}\left(E + \frac{\psi\psi^\top}{n-2}\right)^{-1} S^{-1/2} = \\ &= \frac{n-1}{n-2}\, S^{-1/2}\left(E - \frac{\psi\psi^\top}{(n-2) + \psi^\top\psi}\right) S^{-1/2}, \end{aligned}$$

ezáltal

$$\begin{aligned} |Y_1 - Y_2|^2 = (Z_1 - Z_2)^\top S_n^{-1}(Z_1 - Z_2) = 2\,\xi_2^\top S_n^{-1}\xi_2 = \\ = \frac{2(n-1)}{n-2}\left(\eta - \frac{\eta^2}{(n-2)+\eta}\right) = \frac{2(n-1)\eta}{(n-2)+\eta}, \end{aligned}$$

ahol $\eta = \psi^\top\psi$. Mármost η eloszlása Hotelling-féle $T^2(d,\, n-2)$, ezért megegyezik $(n-2)U/V$ eloszlásával[1], ahol U és V független, és rendre χ^2_d, illetve χ^2_{n-d-1} eloszlású. Ezért $|Y_1 - Y_2|^2$ eloszlása megegyezik $2(n-1)\,\frac{U}{U+V}$ eloszlásával. Itt $\frac{U}{U+V}$ eloszlása $\mathrm{Beta}\big(\frac{d}{2}, \frac{n-1}{2}\big)$, így végül is

$$E|Y_1 - Y_2| = \big(2(n-1)\big)^{1/2}\, \frac{\Gamma\big(\frac{n-1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{d+1}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)\Gamma\big(\frac{d}{2}\big)}\,.$$

Másrészt pedig $|Z_1 - Z_2|^2$ eloszlása $2\,\chi^2_d$, azaz $d/2$ rendű, $1/4$ paraméterű gamma-eloszlás, ezért

$$E|Z_1 - Z_2| = 2\,\frac{\Gamma\big(\frac{d+1}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{d}{2}\big)},$$

és így

$$\frac{E|Y_1 - Y_2|}{E|Z_1 - Z_2|} = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \sqrt{\frac{n-1}{2}}.$$

Ez pedig azért nagyobb, mint 1, mert ha X olyan gamma eloszlású valószínűségi változó, amelynek rendje és paramétere egyaránt $\frac{n-1}{2}$, akkor

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = E\sqrt{X} < \sqrt{EX} = 1.$$

[1] Bolla M., Krámli A., *Statisztikai következtetések elmélete*, Typotex, Budapest, 2005.

A megoldás a kitűzők javaslata alapján készült. A feladatra Hubai Tamás és Strenner Balázs adtak kissé hiányos megoldást.