A 2006. évi Schweitzer Miklós Emlékverseny feladatai

október 27 - november 6.

1. Egy X topologikus tér $d(X)$ sűrűsége az a legkisebb számosság, amire van X-nek ilyen számosságú sűrű altere. Bizonyítandó, hogy ha X tetszőleges kompakt T_2 tér, akkor X^3 tartalmaz $d(X)$ számosságú diszkrét alteret.

2. Legyen T véges fagráf, mely nem csak egy csúcsból áll.

   Legyen s a legnagyobb olyan $X \subset T$ részfa csúcsszáma, amire X minden csúcsának van X-en kívüli szomszédja.

   Legyen t a legkisebb olyan pozitív egész, amire megadható T-beli csillagok $C_1, \ldots, C_k$ rendszere, hogy T minden élét ezek közül pontosan t tartalmazza, és T minden csúcsát ezek közül maximum $2t-1$ tartalmazza. (Azaz a csillagok multiplicitással szerepelhetnek.)

   Bizonyítsuk be, hogy $s = t$.

3. Jelölje $f(n)$ a legkisebb olyan pozitív egész számot, amelyre igaz a következő állítás. Ha a sík $f(n)$ általános helyzetű pontja által meghatározott zárt szakaszok mindegyikét megszínezzük négy szín valamelyikével, akkor található n páronként diszjunkt azonos színű szakasz. Bizonyítandó, hogy $f(n) = 6n - 4$.

4. Legyen P véges, legalább kételemű, összefüggő részben rendezett halmaz, és $p : P^3 \to P$ egy háromváltozós monoton függvény, melyre a $p(x, x, y) = y$ azonosság teljesül. Mutassuk meg, hogy van olyan nemüres valódi $I \subset P$, hogy tetszőleges $x \in P, y \in I$ esetén $p(x, y, y) \in I$.

   [P összefüggő, ha az összehasonlítható elempárokat élnek tekintve ösz-szefüggő gráfot kapunk. A p monoton, ha $x_1 \le y_1, x_2 \le y_2, x_3 \le y_3$ esetén $p(x_1, x_2, x_3) \le p(y_1, y_2, y_3)$.]

5. Legyen F_q egy nem 2 karakterisztikájú q elemű véges test, és legyen $V = F_q \times F_q$ az F_q feletti 2-dimenziós vektortér. Legyen $L \subset V$ olyan részhalmaz, ami minden irányban tartalmaz egyenest. (L-beli egyenesen olyan egyenest értünk, melynek minden pontja L-ben van.) Egy V-beli pont rendje az a szám, ahány L-beli egyenes illeszkedik a pontra. Bizonyítsuk be, hogy L legalább q olyan egyenest tartalmaz, amelynek van harmadrendű pontja.

6. Legyen $G(x) = \max |A|$, ahol A végigfut az olyan egész számokból álló $A \subset [1, x]$ halmazokon, amelyekben nincs háromtagú mértani sorozat, azaz nincs olyan $x, y, z \in A$, hogy $x < y < z$ és $xz = y^2$. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{x \to \infty} G(x)/x$ létezik.

7. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvény felírható $f = g_1 + \ldots + g_k$ alakban, ahol $g_1, \ldots, g_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ valós értékű periodikus függvények rendre $a_1, \ldots, a_k$ periódussal. Következik-e ebből, hogy f felírható $f = h_1 + \ldots + h_k$ alakban is, ahol $h_1, \ldots, h_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ egész értékű periodikus függvények, szintén rendre $a_1, \ldots, a_k$ periódussal?

8. Legyen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}||2^n x||$, ahol $||x||$ az x-nek a legközelebbi egész számtól vett távolsága. Mit mondhatunk (Lebesgue) majdnem minden $y \in f(\mathbb{R})$-re az $L_y = \{x \in [0,1] : f(x) = y\}$ szinthalmaz számosságáról?

9. Van-e a $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ körvonalnak olyan önmagára való φ homeomorfizmusa, amely szinguláris (azaz majdnem mindenütt 0 a deriváltja), de az $f : T \to T$, $f(x) = \varphi^{-1}(2 \cdot \varphi(x))$ leképezés abszolút folytonos?

10. Legyenek $K_1, ..., K_d$ nemüres belsejű konvex kompakt halmazok $\mathbb{R}^d$-ben. Tegyük föl, hogy erősen vannak szeparálva, ami annyit jelent, hogy bármely $x_1 \in K_1, ..., x_d \in K_d$ választásra az $x_1, ..., x_d$ pontok affin burka hipersík $\mathbb{R}^d$-ben. Legyen továbbá $0 < \alpha_i < 1$ minden $i = 1, ..., d$-re. Egy H félteret α-vágásnak hívunk, ha $\text{vol}(K_i \cap H) = \alpha_i \cdot \text{vol}(K_i)$ minden i-re („vol” a d-dimenziós térfogatot jelöli). Hány α-vágás van?

11. Legyen α irracionális szám, és jelölje

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \alpha x\}$$

az $y = \alpha x$ egyenes által határolt zárt félsíkot. Legyen $P(\alpha, n) = P(X_1, ..., X_n \in F)$, ahol az X_n az origóból induló egyszerű szimmetrikus bolyongás a síkon (azaz: mindig $1/4 - 1/4$ valószínűséggel lépünk egy egységet valamelyik égtáj felé az előző lépésektől függetlenül, és $P(\alpha, n)$ annak a valószínűsége, hogy az első n lépésben végig az F félsíkban vagyunk). Bizonyítsuk be hogy $P(\alpha, n)$ nem függ α-tól.

- A megoldások benyújtásának határideje 2006. november 6-án déli 12 óra. A megoldásokat a Bolyai János Matematikai Társulat helyi tagozatánál kell benyújtani (ahol a titkár az átvétel időpontját igazolja), vagy ezen időpontig ajánlottan postára kell adni a versenybizottság címére:

Ruzsa Imre, Rényi Intézet

1053, Budapest, Reáltanoda u. 13-15.

- Ha a versenyző az egyetemi tananyagban nem szereplő ismeretre támaszkodik, akkor az állítás pontos kimondása és pontos hivatkozás szükséges. További információ a **www.bolyai.hu/schweitzer.html** honlapon található.

- A megoldásokat 2006 november 7-én, kedden 17 órakor az ELTE lágymányosi déli épületének (1117 Bp. Pázmány Péter sétány 1/c) 0-312-es Gallai Tibor termében megbeszéljük. Minden érdeklődőt szívesen látunk.

- A verseny eredményhirdetésére december 15-én, pénteken 13 órakor kerül sor a Bolyai János Matematikai Társulatban (1027 Bp. Fő u. 68, II. em 219).

  Jó munkát kíván

a Versenybizottság.