A 2005. évi Schweitzer Miklós Emlékverseny feladatai

1. **feladat.** Jelölje $[n]$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazt. Tetszőleges $a, b \in \mathbb{N}$ esetén jelentse $G(a, b)$ a következő előírással definiált (nem irányított) gráfot: a csúcsok (i, f) alakúak, ahol $i \in [a]$, és $f : [a] \to [b]$. Egy (i, f) és egy (j, g) csúcsot akkor köt össze él, ha $i \neq j$, és $f(k) \neq g(k)$ pontosan a szigorúan i és j közötti k értékekre teljesül, a többi k-ra $f(k) = g(k)$. Igazoljuk, hogy bármely $c \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $a, b \in \mathbb{N}$, hogy $G(a, b)$ csúcsai nem színezhetők jól c számú színnel.

2. **feladat.** Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egész számok olyan sorozata, amely minden $n \geq 2$-re eleget tesz a

$$0 \leq a_{n-1} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n + a_{n+1} < 1$$

egyenlőtlenségnek. Bizonyítsuk be, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ periodikus.

3. **feladat.** Legyen $\alpha \leq 22$ nemnegatív egész szám. Melyik α esetén lesz a

$$8x^{23} - 5^{\alpha}y^{23} = 1$$

egyenletnek a legtöbb (x, y) egész megoldása? Mit mondhatunk $\alpha \geq 23$ esetén?

4. **feladat.** Legyen F megszámlálható szabad csoport, és legyen $F = H_1 > H_2 > H_3 > \ldots$ az F csoport véges indexű részcsoportjainak egy leszálló lánca. Tegyük fel, hogy a lánc $\cap_{i\in\mathbb{N}} H_i$ metszete nem tartalmazza F egyetlen nemtriviális normálosztóját sem. Igazoljuk, hogy léteznek olyan $g_i \in F$ elemek, amelyekre a $H_i^{g_i}$ konjugált részcsoportok szintén láncot alkotnak, és $\cap_i H_i^{g_i} = \{1\}$.

5. **feladat.** Legyen $GL(n, K)$ a K test feletti lineáris csoport ellátva a K test egy $x \mapsto |x|$ nem-archimedesi abszolút értéke által indukált topológiával. Igazoljuk, hogy ha az $M \in GL(n, K)$ mátrixot tartalmazza $GL(n, K)$ valamely kompakt részcsoportja, akkor M minden sajátértéke 1 abszolút értékű.

6. **feladat.** Tegyük fel, hogy az

$$SU_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C}, z\overline{z} + w\overline{w} = 1 \right\}.$$

mátrixcsoport A elemének $e^{i\theta_1}$ és $e^{-i\theta_1}$, a B elemének pedig $e^{i\theta_2}$ és $e^{-i\theta_2}$ a sajátértékei, ahol $0 \leq \theta_i \leq \pi$. Bizonyítsuk be, hogy ha $e^{i\theta_3}$ sajátértéke AB-nek, akkor teljesül a

$$|\theta_1 - \theta_2| \leq \theta_3 \leq \min\{\theta_1 + \theta_2, 2\pi - (\theta_1 + \theta_2)\}$$

egyenlőtlenség.

7. **feladat.** Legyen $t \in \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor létezik olyan $0 \neq A : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szimmetrikus, biadditív függvény, melyre

$$A(tx, x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ha t nem algebrai, vagy algebrai és a definiáló polinomjának $-t$ is zérushelye.

8. **feladat.** Határozzuk meg mindazon $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ folytonos és szigorúan monoton függvényeket, amelyekre az

$$F(x,y) = \varphi^{-1}\left(\frac{x\varphi(x) + y\varphi(y)}{x+y}\right) + \varphi^{-1}\left(\frac{y\varphi(x) + x\varphi(y)}{x+y}\right) \quad x, y \in \mathbb{R}_+$$

függvény homogén, azaz $F(tx, ty) = tF(x, y)$ minden $t, x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén.

9. **feladat.** Igazoljuk, hogy ha r_n olyan komplex racionális törtfüggvény, amelyben mind a számláló, mind a nevező fokszáma legfeljebb n, akkor

$$\|r_n\|_{1/2} + \left\|\frac{1}{r_n}\right\|_2 \geq \frac{1}{2^{n-1}},$$

ahol $\|\cdot\|_a$ az origó körüli a sugarú körön vett szuprémumot jelöli.

10. **feladat.** Adott 5 nemzérus vektor a háromdimenziós euklideszi térben. Bizonyítsuk be, hogy a páronként bezárt szögeik összege legfeljebb 6π.

11. **feladat.** Legyen $E : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+$ akárhányszor differenciálható, másodfokú pozitív homogén (azaz tetszőleges λ pozitív valós szám és $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pont esetén az $E(\lambda p) = \lambda^2 E(p)$ relációnak eleget tevő) függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha az $E''(p) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ második derivált bármely $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pontban nemelfajuló bilineáris forma, akkor $E''(p)$ $(p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ pozitív definit.

12. **feladat.** Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$.

(a) Legyen $P(|\xi_1| \leq 1) = 1$, $E\xi_1 = 0$, $E\xi_1^2 = \sigma^2 > 0$. Mutassuk meg, hogy minden $u \geq 2n\sigma^2$ számra $P(S_n \geq u) \leq e^{-Cu\log(u/n\sigma^2)}$ alkalmas (univerzális) $C > 0$ számmal.

(b) Legyen speciálisan $P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = \frac{\sigma^2}{2}$, $P(\xi_1 = 0) = 1 - \sigma^2$ valamely $1 > \sigma^2 > 0$ számmal. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan $B_1 < 1$, $B_2 > 1$ és $B_3 > 0$ konstansok, hogy ha valamely $n \geq 1$ és $u \geq 1$ egész számokra érvényesek a $B_1 n \geq u \geq B_2 n\sigma^2$ egyenlőtlenségek, akkor $P(S_n \geq u) > e^{-B_3 u\log(u/n\sigma^2)}$.

Megjegyzés. A feladatok szövegében $\mathbb{N}$ a pozitív egész, $\mathbb{R}$ a valós, $\mathbb{R}_+$ a pozitív valós és $\mathbb{C}$ a komplex számok halmazát jelöli.