A 2003. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

1. Legyen $(X,<)$ tetszőleges rendezett halmaz. Bizonyítsuk be, hogy X pontjait ki lehet színezni két színnel úgy, hogy két azonos színű pont között mindig legyen tőlük különböző színű pont.

2. Legyen p prímszám, és M olyan egész számokból álló $n \times m$-es mátrix, hogy $Mv \neq 0 \pmod p$ minden olyan $v \neq 0$ oszlopvektorra, amelynek minden komponense 0 vagy 1. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan egészekből álló x sorvektor, amelyre xM semelyik komponense sem $0 \pmod p$.

3. Legyen $Z = \{z_1, \dots, z_{n-1}\}$, $n \geq 2$, különböző komplex számok olyan halmaza, amelyben bármely számmal együtt annak komplex konjugáltja is benne van.

a) Bizonyítsuk be, hogy van olyan (a Z halmaztól függő) C konstans, hogy minden $\varepsilon \in (0,1)$ számhoz található olyan n-edfokú x_0 algebrai egész, amelynek $x_1, \dots, x_{n-1}$ konjugáltjaira $|x_1 - z_1| < \varepsilon, \dots, |x_{n-1} - z_{n-1}| < \varepsilon$ teljesül, és amelyre $|x_0| < C/\varepsilon$.

b) Mutassuk meg, hogy van olyan $Z = \{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ halmaz és olyan c_n pozitív szám, hogy minden olyan n-edfokú x_0 algebrai egész számra, amelynek $x_1, \dots, x_{n-1}$ konjugáltjaira $|x_1 - z_1| < \varepsilon, \dots, |x_{n-1} - z_{n-1}| < \varepsilon$ teljesül, fennáll az $|x_0| > c_n/\varepsilon$ egyenlőtlenség.

4. Legyenek $\{a_{n,1}, \dots, a_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ egész számok úgy, hogy $a_{n,i} \neq a_{n,j}$ ha $1 \leq i < j \leq n$, $n = 2, 3, \dots$, és jelölje $\langle y \rangle \in [0,1)$ az y valós szám törtrészét. Mutassuk meg, hogy ekkor van olyan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ valós sorozat, hogy az $\langle a_{n,1}x_n \rangle, \dots, \langle a_{n,n}x_n \rangle$ számok aszimptotikusan egyenletesen oszlanak el a $[0,1]$ intervallumon.

5. Legyen $d > 1$ egész szám, és $0 < r < 1/2$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik véges sok (csak az adott d és r számoktól függő) nem nulla vektor az $\mathbf{R}^d$ euklideszi térben azzal a tulajdonsággal, hogy amennyiben egy $\mathbf{R}^d$-beli egyenes távolsága a $\mathbf{Z}^d$ egész rácstól legalább r, úgy ez az egyenes merőleges e véges sok vektor valamelyikére.

6. Igazoljuk, hogy az $n = x_n(x_{n-1} + x_n + x_{n+1})$, $n = 1, 2, \dots$, $x_0 = 0$, rekurziónak egyetlen nemnegatív megoldása van.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha r nemnegatív folytonos függvény a számegyenesen, akkor létezik olyan nem azonosan nulla $f \in C^1(\mathbf{R})$, amelyre $f'(x) = f(x - r(f(x)))$, $x \in \mathbf{R}$.

8. Legyenek $f_1, f_2, \dots$ folytonos valós függvények a számegyenesen. Igaz-e, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor minden x-re divergens, akkor ez az összeg előjelezésének tipikus megváltoztatása után is így marad (vagyis azon $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{-1, +1\}^{\mathbf{N}}$ sorozatok, amelyekre a $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x)$ függvénysor legalább egy x pontban konvergens, első kategóriájú halmazt alkotnak a $\{-1, +1\}^{\mathbf{N}}$ szorzattérben)?

9. Adott a síkban néhány nyílt félsík, melyek határoló egyenesei a síkot konvex tartományokra osztják. Megadandó olyan $C(q)$ másodfokú polinom, amelyre tetszőleges $q \geq 1$ egész esetén igaz az, hogy ha a félsíkok a sík minden pontját legalább q-szor lefedik, akkor a pontosan q-szor fedett pontok halmaza legfeljebb $C(q)$ darab tartomány egyesítése.

10. Legyenek X és Y független szentpétervári véletlen változók, melyek tehát minden $k = 1, 2, \dots$ esetén a 2^k értéket $1/2^k$ valószínűséggel veszik fel, és jelölje $I\{A\}$ az A esemény indikátorát. Mutassuk meg, hogy X és Y megadhatók egy olyan, elég bő valószínűségi mezőn, amelyen értelmezhető független szentpétervári véletlen változóknak egy másik, X' és Y' párja is úgy, hogy $X + Y = 2X' + Y'I\{Y' \leq X'\}$ majdnem biztosan.

Szeged, 2003. október 31. A Versenybizottság (*www.math.u-szeged.hu*)