A 2002. évi Schweitzer Miklós Emlékverseny feladatai
2002. november 8–18.

1. Tetszőleges α rendszámra jelöljük $H(\alpha)$-val azon $f : \alpha \to \{-1, 0, 1\}$ függvények halmazát, amelyek csak véges sok helyen vesznek fel 0-tól különböző értéket. Rendezzük $H(\alpha)$-t az utolsó eltérés szerint, azaz $f, g \in H(\alpha)$ esetén legyen $f \prec g$ akkor, ha $f(\beta) < g(\beta)$ teljesül a legnagyobb $\beta < \alpha$ rendszámra, amelyre $f(\beta) \neq g(\beta)$. Bizonyítsuk be, hogy a $(H(\alpha), \prec)$ rendezett halmaz rendtípusa szétszórt (azaz nem tartalmaz a racionális számok szokásosan rendezett halmazával izomorf részhalmazt), továbbá minden szétszórt rendtípus beágyazható valamelyik $(H(\alpha), \prec)$-ba.

2. Legyen G egyszerű, k-élösszefüggő, n csúcsú gráf, u és v pedig legyenek G különböző csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy létezik G-ben u és v között k élidegen út, melyek bármelyike legfeljebb $\dfrac{20n}{k}$ élt tartalmaz.

3. Az $\mathbf{A} = \{\text{igen, nem}\}$ halmazon értelmezett $f : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$ függvényt döntési függvénynek mondjuk, ha

   (a) mindegyik argumentumát megváltoztatva a függvényérték is megváltozik; valamint

   (b) tetszőlegesen választott argumentuma helyébe a függvényértéket helyettesítve a függvényérték nem változik meg.

   Egy $h : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$ függvényt hatalmi függvénynek nevezünk, ha van olyan i index, hogy a függvény értéke mindig az i-edik argumentummal egyezik meg.

   Azt az $m : \mathbf{A}^3 \to \mathbf{A}$ függvényt, amelynek értéke mindig az, ami az argumentumok között legalább kétszer fellép, nevezzük demokratikus függvénynek.

   Mutassuk meg, hogy minden döntési függvény előállítható hatalmi és demokratikus függvényekből összetett függvényként.

4. Adott n természetes számhoz tekintsük azon $A \subseteq \mathbb{Z}_n$ halmazokat, amelyekre az $xy = uv$ egyenletnek nincs más megoldása az $x, y, u, v \in A$ maradékosztályokból, mint az $x = u,\ y = v$ és az $x = v,\ y = u$ triviális megoldások. Legyen $g(n)$ az ilyen A halmazok elemszámának maximuma. Bizonyítsuk be, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{g(n)}{\sqrt{n}} = 1 \ .$$

5. Jelöljük a $H \subseteq [0,1]$ halmaz Lebesgue-féle külső mértékét $\lambda(H)$-val. Az $A \subseteq [0,1] \times [0,1]$ halmaz vízszintes és függőleges szekcióit A^y-nal és A_x-szel jelöljük, tehát $A^y = \{x \in [0,1] : (x,y) \in A\}$ és $A_x = \{y \in [0,1] : (x,y) \in A\}$ minden x, $y \in [0,1]$-re.

   (a) Van-e a $[0,1] \times [0,1]$ négyzetnek olyan $A \cup B$ felbontása, amelyre A^y véges sok, 1/2-nél kisebb összhosszúságú szakasz egyesítése, és $\lambda(B_x) \leq 1/2$ minden x, $y \in [0,1]$-re?

   (b) Van-e a $[0,1] \times [0,1]$ négyzetnek olyan $A \cup B$ felbontása, amelyre A^y véges sok, legfeljebb 1/2 összhosszúságú szakasz egyesítése, és $\lambda(B_x) < 1/2$ minden x, $y \in [0,1]$-re?

6. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Igazoljuk, hogy az alábbi két állítás ekvivalens:
   (a) K minden x pontjához található olyan $F_x \subseteq \mathbb{R}$ nem megszámlálható halmaz, hogy
   $$\mathrm{dist}(F_x, F_y) \geq |x - y|$$
   teljesül minden $x, y \in K$ esetén;
   (b) K nulla mértékű.

7. Legyen a komplex értékű $F(z)$ függvény reguláris a komplex sík $\{0 < |z| < R\}$ kipontozott körlapján. Szintvonalon értsük a $\mathrm{Re}\, F(z)$ függvény valamely szinthalmazának komponensét, tehát olyan maximális összefüggő halmazt, amelyen $\mathrm{Re}\, F(z)$ állandó. Jelöljük $A(r)$-rel azon szintvonalak unióját, melyek teljes egészükben a $\{0 < |z| < r\}$ kipontozott körlapon helyezkednek el. Mutassuk meg, hogy ha $A(r)$ komponenseinek száma r-től független korlát alatt marad, akkor $F(z)$-nek 0-ban legfeljebb pólus szingularitása lehet.

8. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan c abszolút konstans, hogy minden n-pontú, általános helyzetű, síkbeli H ponthalmaz elemeit kiszínezhetjük $c \cdot \log n$ színnel úgy, hogy a sík bármely körlemeze, mely H-nak legalább egy pontját tartalmazza, H valamelyik színosztályából pontosan egy pontot fed.

9. Legyen M összefüggő, kompakt, C^∞-differenciálható sokaság, és jelölje $C^\infty(M)$ az M-en értelmezett sima valós függvények vektorterét. Legyen $V \leq C^\infty(M)$ olyan altér, amely invariáns az M sokaság C^∞-diffeomorfizmusaira nézve, azaz $f \circ h \in V$, valahányszor $f \in V$ és $h : M \to M$ tetszőleges C^∞-diffeomorfizmus. Bizonyítsuk be, hogy ha V különbözik a $\{0\}$ és $C^\infty(M)$ alterektől, akkor pontosan a konstans függvényekből áll.

10. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek közös eloszlása végtelen sok különböző értékre koncentrált diszkrét eloszlás. Legyen a_n annak a valószínűsége, hogy $X_1, \ldots, X_{n+1}$ mind különböző értéket vesz fel, feltéve, hogy $X_1, \ldots, X_n$ különböző értékeket vettek fel ($n \geq 1$). Mutassuk meg, hogy
    (a) $n \to \infty$ esetén a_n szigorúan monoton csökkenve tart 0-hoz; valamint
    (b) a pozitív egész számok tetszőleges $1 \leq f(1) < f(2) < \ldots$ részsorozatára $X_1, X_2, \ldots$ közös eloszlása megválasztható úgy, hogy a
    $$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{f(n)}}{a_n} = 1$$
    összefüggés teljesüljön.

A feladatok beadásának határideje: 2002. november 18, 12h (CET). Ha a versenyző olyan ismeretre támaszkodik, ami nem szerepel az egyetemi törzsanyagban, akkor kérjük, hogy pontosan hivatkozzon a forrásra. További információ a versenykiírásban, ill. a `http://www.cs.elte.hu/~schw02` weboldalon található.

2002. november 19-én, kedden délután 4 órai kezdettel a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet nagytermében megbeszéljük a verseny feladatait. Az intézet címe: 1053 Budapest, Reáltanoda u. 13–15. Minden érdeklődőt szívesen látunk.

Sikeres munkát kíván

a versenybizottság