A 2001. évi Schweitzer Miklós Emlékverseny feladatai

1. Legyen $f : 2^S \to \mathbb{R}$ a véges S alaphalmaz részhalmazain értelmezett függvény. Igazoljuk, hogy ha S tetszőleges A, B részhalmazaira az $f(A) = f(S \setminus A)$ és a $\max\{f(A), f(B)\} \geq f(A \cup B)$ relációk teljesülnek, akkor f legfeljebb $|S|$ különböző értéket vesz fel.

2. Legyen $\alpha \leq -2$ egész. Bizonyítandó, hogy bármely β_0, β_1 egészekhez egyértelműen vannak olyan $0 \leq q_0, \ldots, q_k < \alpha^2 - \alpha$ egész számok úgy, hogy $q_k \neq 0$ amennyiben $(\beta_0, \beta_1) \neq (0, 0)$ és amelyekre
$$\beta_i = \sum_{j=0}^{k} q_j(\alpha - i)^j, \qquad i = 0, 1$$
teljesül.

3. Hány minimális balideálja van egy K test feletti $n \times n$-es $M_n(K)$ teljes matrix gyűrűnek?

4. Legyen $R = \mathbb{Z}[t][\sqrt{t^2 - 1}]$. Határozzuk meg az R-beli egységeket.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha a pozitív valós számok halmazán értelmezett valós értékű f függvény minden pozitív x, y értékre eleget tesz az
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = f(x) + f(y)$$
egyenletnek, akkor minden pozitív x, y számpárra
$$2f(\sqrt{xy}) = f(x) + f(y)$$
teljesül.

6. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres nyílt intervallum, $\varepsilon \geq 0$ és $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely teljesíti az
$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon t(1-t)|x - y| \qquad (x, y \in I, t \in [0, 1])$$
függvényegyenlőtlenséget. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik olyan $g : I \to \mathbb{R}$ konvex függvény, hogy az $\ell := f - g$ függvény ε-Lipschitz tulajdonságú, azaz
$$|\ell(x) - \ell(y)| \leq \varepsilon|x - y| \qquad (x, y \in I).$$

7. Legyenek $e_1, \ldots, e_n$ közös végpontú félegyenesek a síkon. Mutassuk meg, hogy ha nincs olyan $u \not\equiv 0$ egész síkon harmonikus függvény amely eltűnik az $e_1 \cup \cdots \cup e_n$ halmazon, akkor van két index i és j, hogy már olyan $u \not\equiv 0$ egész síkon harmonikus függvény sincs amely eltűnik az $e_i \cup e_j$-n.

8. Legyen H komplex Hilbert-tér. Az A korlátos lineáris operátort pozitívnak nevezzük ha $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ teljesül minden $x \in H$ esetén. Jelölje $\sqrt{A}$ az A pozitív négyzetgyökét, azaz azt az egyértelműen meghatározott pozitív operátort, melyre $(\sqrt{A})^2 = A$. Vezessük be a pozitív operátorok halmazán az

$$A \circ B = \sqrt{A} B \sqrt{A}$$

módon definiált műveletet. Mutassuk meg, hogy adott A, B pozitív operátorokra az

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$$

egyenlőség pontosan akkor teljesül minden C pozitív operátor esetén, ha $AB = BA$.

9. Jelölje H a hiperbolikus síkot, $I(H)$ pedig annak egybevágóság csoportját. Legyen $O \in H$ egy kiválasztott kezdőpont. Határozzuk meg azokat a folytonos $\sigma : H \to I(H)$ leképezéseket, amelyek eleget tesznek az alábbi feltételeknek:

   (a) $\sigma(O) = Id$, valamint minden $X \in H$ pontra $\sigma(X)O = X$ teljesül,

   (b) minden O-tól különböző $X \in H$ pontra a $\sigma(X)$ egybevágóság paraciklikus eltolás, azaz invariánsan hagyja egy közös végtelen távoli pontú paraciklus sereg minden elemét,

   (c) tetszőleges $P, Q \in H$ pontokhoz létezik egyetlen olyan $X \in H$ pont, amelyre $\sigma(X)P = Q$ teljesül.

   Igazoljuk, hogy a fenti tulajdonságú $\sigma : H \to I(H)$ leképezések egy pont kivételével differenciálhatók!

10. Mutassuk meg, hogy ha egy összefüggő, seholsem zérus metszetgörbületű Riemann sokaságon adott szimmetrikus $(1,1)$-tenzornak a Levi-Civita konnexió szerinti kovariáns deriváltja eltűnik, akkor a tenzor az egységtenzor konstansszorosa.

11. Legyenek a $\xi_{(k_1,k_2)}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, valószínűségi változók egyenletesen korlátosak. Legyen c_l, $l \in \mathbb{N}$, pozitív valósak szigorúan növekvő, végtelenhez tartó sorozata úgy, hogy c_{l+1}/c_l korlátos. Legyen továbbá $d_l = \log(c_{l+1}/c_l)$, $l \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy $D_n = \sum_{l=1}^{n} d_l \uparrow \infty$, ha $n \to \infty$.

    Tegyük fel, hogy létezik $C > 0$ és $\varepsilon > 0$ úgy, hogy

$$|\mathbb{E}\{\xi_{(k_1,k_2)}\xi_{(l_1,l_2)}\}| \leq C \prod_{i=1}^{2} \left\{ \log_+ \log_+ \left(\frac{c_{\max\{k_i,l_i\}}}{c_{\min\{k_i,l_i\}}} \right) \right\}^{-(1+\varepsilon)},$$

    minden $(k_1, k_2), (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$ esetén ($\log_+$ a természetes alapú logaritmus függvény pozitív része). Lássuk be, hogy

$$\lim_{\substack{n_1 \to \infty \\ n_2 \to \infty}} \frac{1}{D_{n_1} D_{n_2}} \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} d_{k_1} d_{k_2} \xi_{(k_1,k_2)} = 0$$

    majdnem biztosan.