Az 1999. évi Schweitzer Miklós Emlékverseny feladatai

1. feladat. Nevezzük körnek a sík egy A részhalmazát, ha van olyan pont, hogy minden ebből kiinduló félegyenes az A halmazt egy pontban metszi. Igazoljuk, hogy a sík lefedhető megszámlálható sok körrel.

2. feladat. Legyen $\varepsilon > 0$. Igazoljuk, hogy minden elég nagy n természetes számhoz vannak olyan x, y, z természetes számok, hogy $n^2 + x^2 = y^2 + z^2$, és amelyekre $y, z \leq (1 + \varepsilon)n/\sqrt{2}$.

3. feladat. Bizonyítandó, hogy bármely véges G gráfhoz van egy $c(G) > 0$ konstans úgy, hogy minden n-pontú gráfban, melynek nincs G-vel izomorf feszített részgráfja, van két, egyenként legalább $n^{c(G)}$ elemű diszjunkt csúcshalmaz, melyek közt vagy minden él be van húzva, vagy pedig egyetlenegy él sem fut.

4. feladat. Az egész számok halmazának egy f permutációját korlátosnak nevezzük, ha $|x - f(x)|$ korlátos. A korlátos permutációk a permutációszorzással egy W csoportot alkotnak. Mutassuk meg, hogy a racionális számok additív csoportja nem izomorf W egyetlen részcsoportjával sem.

5. feladat. Legyen $\alpha > -2$, és egy n természetes számra legyen $y_1, \ldots, y_n$ a

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \frac{1}{j + k + \alpha} = \frac{1}{n + 1 + k + \alpha}, \qquad k = 1, \ldots, n$$

egyenletrendszer megoldása. Igazoljuk, hogy $y_{j-1}y_{j+1} \leq y_j^2$ teljesül minden $1 < j < n$ indexre.

6. feladat. Mutassuk meg, hogy minden 1-periódusú $L^2(0, 1)$-be eső f valós függvényhez létezik három ugyanilyen tulajdonságú g_1, g_2, g_3 függvény úgy, hogy valamilyen c_0, c_1, c_2, c_3 konstansokkal

$$f(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{3} \big(g_i(x + c_i) - g_i(x)\big).$$

7. feladat. Legyen adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény a $tf(t) > 0$ ($t \neq 0$) tulajdonsággal. Igazoljuk, hogy létezik egy nem azonosan nulla differenciálható $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény, melyre $y'(t) = f(y(t - 1))$ teljesül minden $t > 1$ számra, és y zéróhelyeinek halmaza nem korlátos.

8. feladat. Adott a C kör belsejében egy T háromszöglemez. Igazoljuk, hogy nem létezik olyan zárt konvex halmaz a C belsejében, amelyik különbözik T-től, de a C körvonal minden pontjából ugyanakkora szög alatt látszik, mint T.

9. feladat. Legyen $P_1, \ldots, P_n$ illetve $Q_1, \ldots, Q_n$ a sík két konvex sokszöge ellentétes körüljárással. Bizonyítandó, hogy van olyan egyenes, amely a $P_1Q_1, \ldots, P_nQ_n$ szakaszok mindegyikét metszi.

10. feladat. Legyen $M = F_1 \times \cdots \times F_k$ k darab sima zárt felület (2-dimenziós, C^∞, kompakt, összefüggő, határ nélküli sokaság) szorzata, mely felületek közül pontosan s darab nem irányítható. Bizonyítsuk be, hogy M beágyazható $\mathbb{R}^{2k+s+1}$-be.

11. feladat. Legyenek $\{U_{n,1}, \ldots, U_{n,n}\}_{n=1}^\infty$ teljesen független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlen változók, és $\alpha \geq 1$ esetén tekintsük a $H_n = \{[n^\alpha U_{n,1}], \ldots, [n^\alpha U_{n,n}]\}$ halmazokat, ahol $[\cdot]$ az egész részt jelöli. Igazoljuk, hogy a $H_n \cap (\cup_{m=n+1}^\infty H_m)$ halmazok elemszámai akkor és csakis akkor alkotnak majdnem biztosan korlátos sorozatot, ha $\alpha > 3$.

A feladatsort Maróti Miklós gépelte újra.