

Lineáris leképezések

(előadásvázlat, 2016. augusztus 18.)

Maróti Miklós, Kátai-Urbán Kamilla

Ennek az előadásnak a megértéséhez a következő fogalmakat kell tudni: **homogén lineáris egyenletrendszer** és annak **megoldásaltere**, vektorterek **izomorfizmusa** és **automorfizmusa**, **bázisátmenet mátrixa**.

Az előadáshoz ajánlott jegyzet:

- Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebra*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003–2006.
- Klukovits Lajos: *Klasszikus és lineáris algebra*, Polygon Kiadó, Szeged, 1999.

1. Definíció. Legyen U és V ugyanazon T test feletti vektortér. A $\varphi : U \rightarrow V$ leképezést **lineáris leképezésnek** nevezzük (vagy **vektortér homomorfizmusnak**), ha bármely $u, v \in U$ és $\lambda \in T$ esetén

$$(u + v)\varphi = u\varphi + v\varphi \quad \text{és} \quad (\lambda u)\varphi = \lambda(u\varphi).$$

Az U -ból V -be menő lineáris leképezések halmazát $\text{Hom}(U, V)$ jelöli. Az U -ból U -ba menő lineáris leképezéseket **lineáris transzformációknak** nevezzük. A bijektív lineáris leképezések a **vektortér izomorfizmusok**, továbbá a bijektív lineáris transzformációk a **vektortér automorfizmusok**.

2. Definíció. Legyen $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezés. A

$$\text{Ker } \varphi = \{u \in U : u\varphi = 0\},$$

$$\text{Im } \varphi = \{u\varphi : u \in U\}$$

halmazokat rendre a φ lineáris leképezés **magjának**, illetve **képterének** nevezzük.

3. Tétel. Legyen U és V ugyanazon T test feletti vektortér. Tetszőleges $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezésre érvényesek a következők:

- (1) $0\varphi = 0$,
- (2) $\text{Ker } \varphi$ altér U -ban,
- (3) $\text{Im } \varphi$ altér V -ben,
- (4) φ akkor és csak akkor injektív, ha $\text{Ker } \varphi = \{0\}$,
- (5) Ha u_1, \dots, u_k generátorrendszer U -ban, akkor $u_1\varphi, \dots, u_k\varphi$ generátorrendszer az $\text{Im } \varphi$ képtérben.
- (6) Ha $u_1\varphi, \dots, u_k\varphi$ lineárisan független vektorrendszer V -ben, akkor u_1, \dots, u_k lineárisan független U -ban.

4. Tétel (Lineáris leképezések dimenziótétele). Legyen U és V ugyanazon T test feletti vektortér, és $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$. Ha U végesdimenziós, akkor

$$\dim(U) = \dim(\text{Ker } \varphi) + \dim(\text{Im } \varphi).$$

5. Következmény. Végesdimenziós vektortér lineáris transzformációja akkor és csak akkor injektív, ha szürjektív.

6. Következmény. Legyen T test, $m, n \geq 1$ és $A \in T^{m \times n}$. Az $Ax = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásalterének dimenziója (azaz a szabad változók száma) $n - r(A)$.

7. Tétel. Ha V a T test feletti n -dimenziós vektortér, akkor V izomorf a T^n vektortérrel. Tehát bármely két T -feletti n -dimenziós vektortér izomorf egymással.

8. Definíció. Legyenek U és V ugyanazon T test feletti vektorterek. A $\varphi, \psi \in \text{Hom}(U, V)$ **lineáris leképezések összegén**, illetve a φ leképezés $c \in T$ **skalárral való szorzatán** azt a $\varphi + \psi : U \rightarrow V$, illetve $c\varphi : U \rightarrow V$ leképezéseket értjük, amelyekre

$$u(\varphi + \psi) = u\varphi + u\psi, \quad u(c\varphi) = c(u\varphi) \quad \text{minden } u \in U \text{ esetén.}$$

9. Tétel. Tetszőleges U és V ugyanazon T test feletti vektorterek esetén $\text{Hom}(U, V)$ a fent definiált műveletekkel vektorteret alkot T felett.

10. Tétel. Tetszőleges U, V és W ugyanazon T test feletti vektorterekre érvényesek a következők:

- (1) Ha $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ és $\psi \in \text{Hom}(V, W)$, akkor $\varphi\psi \in \text{Hom}(U, W)$.
- (2) Ha $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ bijektív, akkor $\varphi^{-1} \in \text{Hom}(V, U)$.
- (3) Ha $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$, $\psi \in \text{Hom}(V, W)$ és $c \in T$, akkor $c(\varphi\psi) = (c\varphi)\psi = \varphi(c\psi)$.
- (4) Ha $\varphi, \psi \in \text{Hom}(U, V)$ és $\tau \in \text{Hom}(V, W)$, akkor $(\varphi + \psi)\tau = \varphi\tau + \psi\tau$.
- (5) Ha $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ és $\psi, \tau \in \text{Hom}(V, W)$, akkor $\varphi(\psi + \tau) = \varphi\psi + \varphi\tau$.

11. Tétel. Legyen U végesdimenziós, V pedig tetszőleges ugyanazon T test feletti vektortér, $e_1, \dots, e_n \in U$ bázis és $v_1, \dots, v_n \in V$ tetszőleges vektorrendszer. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezés, amelyre

$$e_1\varphi = v_1, e_2\varphi = v_2, \dots, e_n\varphi = v_n.$$

12. Definíció. Legyenek U és V végesdimenziós vektorterek a T test felett az $\mathcal{E} : e_1, \dots, e_m \in U$ és $\mathcal{F} : f_1, \dots, f_n \in V$ bázisokkal. Tetszőleges $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezésre léteznek olyan egyértelműen meghatározott $a_{i,j} \in T$ skalárok, hogy

$$e_i\varphi = \sum_{j=1}^n a_{i,j}f_j \quad \text{minden } i = 1, \dots, m \text{ esetén.}$$

Az $(a_{i,j})_{m \times n}$ mátrixot a φ **lineáris leképezés** \mathcal{E} és \mathcal{F} bázisokban megadott **mátrixának** nevezük.

13. Példa. Megadjuk a $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z)\varphi = (x + 2y, y + z)$ lineáris leképezés mátrixát az $\mathcal{E} : (1, 0, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1)$, valamint az $\mathcal{F} : (1, 0), (1, -1)$ bázisok esetén. Keressük azt az $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ mátrixot, amelyre teljesül:

$$\begin{aligned} (1, 0, 0)\varphi &= (1, 0) = a_{11}(1, 0) + a_{12}(1, -1) \\ (1, 0, -1)\varphi &= (1, -1) = a_{21}(1, 0) + a_{22}(1, -1) \\ (1, 1, 1)\varphi &= (3, 2) = a_{31}(1, 0) + a_{32}(1, -1). \end{aligned}$$

Az első egyenletből az $a_{11} + a_{12} = 1$, valamint a $-a_{12} = 0$ összefüggéseket kapjuk, melynek megoldása: $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$. Hasonlóan a másodikból megkapható, hogy $a_{21} = 0$ és $a_{22} = 1$, a harmadikból pedig $a_{31} = 5$, $a_{32} = -2$ adódik. Tehát a φ lineáris leképezés mátrixa az \mathcal{E} és \mathcal{F} bázisokban:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

14. Tétel. Legyenek U és V végesdimenziós vektorterek a T test felett az $\mathcal{E} : e_1, \dots, e_m \in U$ és $\mathcal{F} : f_1, \dots, f_n \in V$ bázisokkal, továbbá legyen $A \in T^{m \times n}$ a $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezés \mathcal{E} és \mathcal{F} bázisokban megadott mátrixa. Ha az $u \in U$ vektor koordinátasora az \mathcal{E} bázisban $x = (x_1, \dots, x_m)$, akkor az $u\varphi \in V$ vektor koordinátasora az \mathcal{F} bázisban xA .

15. Példa. A 13. példában szereplő φ lineáris leképezés, valamint \mathcal{E} és \mathcal{F} bázisok esetén megadjuk az $u = (1, 3, -1) \in \mathbb{R}^3$ standard bázisban felírt vektor koordinátasorát az \mathcal{E} bázisban, és az $u\varphi$ koordinátasorát az \mathcal{F} bázisban.

Az u koordinátasora $x = (x_1, x_2, x_3)$, ha $(1, 3, -1) = x_1(1, 0, 0) + x_2(1, 0, -1) + x_3(1, 1, 1)$,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 &= 3 \\ -x_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x_1 = -6$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$, tehát az u vektor koordinátasora az \mathcal{E} bázisban $x = (-6, 4, 3)$. Az $u\varphi \in \mathbb{R}^2$ vektor koordinátasora az \mathcal{F} bázisban a 14. tétel és a 13. példában kapott mátrix segítségével a következőképpen számolható:

$$xA = (-6 \quad 4 \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = (9 \quad -2).$$

Megjegyezzük, hogy az $u\varphi$ vektor koordinátasora a standard bázisban: $9(1, 0) + (-2)(1, -1) = (7, 2)$.

16. Tétel. Legyenek \mathcal{E} , \mathcal{F} és \mathcal{G} rendre az U , V és W ugyanazon T test feletti végesdimenziós vektorterek bázisai. Legyen A és B rendre a $\varphi, \psi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezések mátrixai az \mathcal{E} és \mathcal{F} bázisokban, illetve C a $\tau \in \text{Hom}(V, W)$ lineáris leképezés mátrixa az \mathcal{F} és \mathcal{G} bázisokban, és legyen $c \in T$. Ekkor

- (1) $A + B$ a $\varphi + \psi$ lineáris leképezés mátrixa az \mathcal{E} és \mathcal{F} bázisokban,
- (2) cA a $c\varphi$ lineáris leképezés mátrixa az \mathcal{E} és \mathcal{F} bázisokban,
- (3) AC a $\varphi\tau$ lineáris leképezés mátrixa az \mathcal{E} és \mathcal{G} bázisokban.

17. Következmény. Ha U m -dimenziós és V n -dimenziós vektortér a T test felett, akkor a lineáris leképezések $\text{Hom}(U, V)$ vektortere izomorf az $m \times n$ -es mátrixok $T^{m \times n}$ vektortereivel, és így mn dimenziós.

18. Definíció. Legyen $\mathcal{E} : e_1, \dots, e_m$ és $\mathcal{E}' : e'_1, \dots, e'_m$ a T test feletti U vektortér két bázisa. Az $\text{id} \in \text{Hom}(U, U)$ identikus lineáris leképezés \mathcal{E} és \mathcal{E}' bázisokban megadott mátrixát az \mathcal{E} bázisról az \mathcal{E}' bázisra való áttérés mátrixának hívjuk.

19. Példa. Tekintsük az \mathbb{R}^3 vektortér következő két bázisát, $\mathcal{E} : (1, 0, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1)$ és $\mathcal{E}' : (0, 0, 1), (1, 1, 1), (0, -1, -2)$. Megadjuk az \mathcal{E} bázisról az \mathcal{E}' bázisra való áttérés mátrixát, ami az előző definíció szerint az identikus leképezés mátrixával egyezik meg. Keressük azt a $P = (p_{ij})_{3 \times 3}$ mátrixot, amelyre teljesül, hogy

$$\begin{aligned} (1, 0, 0)\text{id} &= (1, 0, 0) = p_{11}(0, 0, 1) + p_{12}(1, 1, 1) + p_{13}(0, -1, -2) \\ (1, 0, -1)\text{id} &= (1, 0, -1) = p_{21}(0, 0, 1) + p_{22}(1, 1, 1) + p_{23}(0, -1, -2) \\ (1, 1, 1)\text{id} &= (1, 1, 1) = p_{31}(0, 0, 1) + p_{32}(1, 1, 1) + p_{33}(0, -1, -2). \end{aligned}$$

Az első egyenletből a $p_{12} = 1$, $p_{12} - p_{13} = 0$ és a $p_{11} + p_{12} - 2p_{13} = 0$ összefüggéseket kapjuk, melynek megoldása: $p_{11} = p_{12} = p_{13} = 1$. A második egyenletből hasonlóan számítható, hogy $p_{21} = 0$, $p_{22} = p_{23} = 1$, a harmadikból pedig $p_{31} = p_{33} = 0$ és $p_{32} = 1$ adódik. Tehát az \mathcal{E} bázisról az \mathcal{E}' bázisra való áttérés mátrixa:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

20. Tétel. Legyen a T test feletti U vektortér két bázisa \mathcal{E} és \mathcal{E}' , továbbá legyen P az áttérés mátrixa az \mathcal{E} bázisról az \mathcal{E}' bázisra. Ekkor P nemelfajuló mátrix, továbbá az \mathcal{E}' bázisról az \mathcal{E} bázisra való áttérés mátrixa P^{-1} .

21. Tétel. Legyenek U és V ugyanazon T test feletti vektorterek, \mathcal{E} és \mathcal{E}' az U , \mathcal{F} és \mathcal{F}' pedig a V vektortér bázisa. Jelölje P , illetve S az áttérés mátrixát \mathcal{E} -ről \mathcal{E}' -re, illetve \mathcal{F} -ről \mathcal{F}' -re. Legyen $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezés, és legyen φ mátrixa az \mathcal{E} és \mathcal{F} bázisokban A . Ekkor φ mátrixa az \mathcal{E}' és \mathcal{F}' bázisokban $P^{-1}AS$.

22. Példa. Tekintsük a $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z)\varphi = (x + 2y, y + z)$ lineáris leképezést, és az \mathbb{R}^3 vektortér $\mathcal{E}' : (0, 0, 1), (1, 1, 1), (0, -1, -2)$, illetve az \mathbb{R}^2 vektortér $\mathcal{F}' : (0, -1), (1, 2)$ bázisát. Az 21. tétel segítségével megadjuk a φ mátrixát az \mathcal{E}' és \mathcal{F}' bázisokban úgy, hogy felhasználjuk, hogy a 13. példában megadtuk a φ leképezés A mátrixát az \mathcal{E} és \mathcal{F} bázisokban, a 19. példában pedig az \mathcal{E} bázisról az \mathcal{E}' bázisra való áttérés P mátrixát. Ahhoz, hogy a

13. példában szereplő A mátrixot felhasználhassuk a 21. tétel szerint ki kell még számolnunk az $\mathcal{F} : (1, 0), (1, -1)$ bázisról az \mathcal{F}' bázisra való áttérés $S = (s_{ij})_{2 \times 2}$ mátrixát, amelyre teljesül, hogy:

$$\begin{aligned}(1, 0)\text{id} &= (1, 0) = s_{11}(0, -1) + s_{12}(1, 2) \\ (1, -1)\text{id} &= (1, -1) = s_{21}(0, -1) + s_{22}(1, 2).\end{aligned}$$

Amiből megkapjuk, hogy $s_{11} = 1$, $s_{12} = 1$, $s_{21} = 3$ és $s_{22} = 1$. Meg kell még határoznunk P^{-1} -et:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tehát a φ lineáris leképezés A' mátrixát a 21. tétel alapján következőképpen kapjuk:

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

23. Definíció. Legyen T test és n pozitív egész. Az $A, B \in T^{n \times n}$ mátrixok **hasonlók**, ha létezik olyan nemelfajuló $P \in T^{n \times n}$ mátrix, hogy $A = P^{-1}BP$.

24. Következmény. Ugyanazon lineáris transzformáció két különböző bázisban felírt mátrixa hasonló.

25. Definíció. A φ **lineáris leképezés rangján** a képterének dimenzióját értjük, azaz $r(\varphi) = \dim(\text{Im } \varphi)$.

26. Tétel. Véges dimenziós vektorterek közötti lineáris leképezés rangja megegyezik valamely (bármely) bázisbeli mátrixának rangjával.

27. Példa. Vegyük a 13. példában szereplő $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z)\varphi = (x + 2y, y + z)$ lineáris leképezést, és az $\mathcal{E} : (1, 0, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1)$, valamint az $\mathcal{F} : (1, 0), (1, -1)$ bázisokat, meghatározzuk a φ képterét és magterét. A 13. példában kiszámítottuk az \mathcal{E} és \mathcal{F} bázisokban a φ mátrixát:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mivel $r(A) = 2$, az előző tételt felhasználva $\dim(\text{Im } \varphi) = r(\varphi) = r(A) = 2$, így $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^2$. Meghatározzuk a $\text{Ker } \varphi = \{u \in \mathbb{R}^3 : u\varphi = 0\}$ magteret. A lineáris leképezések dimenzió-tétele (4. tétel) szerint: $\dim(\text{Ker } \varphi) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Im } \varphi) = 3 - 2 = 1$ teljesül. Tehát $\text{Ker } \varphi$ bázisa egyelemű. Az \mathcal{E} bázisban megadott $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ vektor eleme a magternek, ha teljesül, hogy:

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = (x_1 + 5x_3 \ x_2 - 2x_3) = (0 \ 0).$$

Tehát az $x_1 + 5x_3 = 0$ és $x_2 - 2x_3 = 0$ egyenletek adódnak, amelyek egy homogén lineáris egyenletrendszer alkotnak. Ha x_3 -at szabad ismeretlennek választjuk, akkor a kötött ismeretlenekre kapjuk, hogy $x_1 = -5x_3$ és $x_2 = 2x_3$. A szabad ismeretlent 1-nek választva a $(-5, 2, 1)$ vektor a homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak egy bázisa lesz, tehát $\text{Ker } \varphi = [(-5, 2, 1)]$.

28. Következmény. Legyen φ lineáris transzformáció valamely végesdimenziós vektortérben. Ekkor φ akkor és csak akkor bijektív, ha valamely (bármely) bázisbeli mátrixa nemelfajuló.

29. Tétel. Legyen U m -dimenziós és V n -dimenziós vektorterek ugyanazon T test fölött, és $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$. Ekkor φ mátrixa az U és V egy-egy alkalmas bázisában

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T^{m \times n},$$

ahol r a φ rangja, E_r az $r \times r$ méretű egységmátrix, és a zérók a megfelelő méretű zérómátrixok.

30. Következmény. Legyen T tetszőleges test. Ekkor minden $A \in T^{m \times n}$ mátrixhoz létezik olyan nemelfajuló $P \in T^{m \times m}$ és $Q \in T^{n \times n}$ mátrixok, hogy

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ahol r az A mátrix rangja, és a jobboldalon álló mátrix ugyanaz, mint az előző tételben.

31. Definíció. Legyen T test, V vektortér T felett, és $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$. A $\lambda \in T$ skalár a φ lineáris transzformáció **sajátértéke**, ha létezik olyan nemnulla $v \in V$ vektor, hogy $v\varphi = \lambda v$.
A

$$\{v \in V : v\varphi = \lambda v\}$$

alteret a $\lambda \in T$ skálárhoz tartozó **sajátaltérnek** nevezzük. A nemnulla $v \in V$ vektor a φ lineáris transzformáció **sajátvektora**, ha valamely sajátaltérben benne van, azaz létezik olyan $\lambda \in T$, hogy $v\varphi = \lambda v$.

32. Definíció. Legyen T test, n pozitív egész. Az $A \in T^{n \times n}$ **mátrix sajátértéke**, **sajátaltere** és **sajátvektora** rendre a $\varphi : T^n \rightarrow T^n$, $x \mapsto xA$ lineáris transzformáció sajátértéke, sajátaltere, illetve sajátvektora. Azaz $\lambda \in T$ és $x \in T^n$ akkor és csak akkor sajátérték, sajátvektor pár, ha $xA = \lambda x$.

33. Tétel. Legyen V n -dimenziós vektortér a T test felett, e_1, \dots, e_n bázis V -ben, $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$ és $A \in T^{n \times n}$ a φ lineáris transzformáció mátrixa az e_1, \dots, e_n bázisban. Ekkor $\lambda \in T$ és $v \in V$ akkor és csak akkor sajátérték, sajátvektor párja φ -nek, ha λ és v koordinátasora sajátérték, sajátvektor párja A -nak.

34. Tétel. Legyen U tetszőleges vektortér a T test felett, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in T$ páronként különböző sajátértékei a $\varphi \in \text{Hom}(U, U)$ lineáris transzformációnak, és U_1, \dots, U_k pedig ezen sajátértékekhez tartozó sajátalterek. Ha $U_1 + \dots + U_k = U$, akkor φ egyértelműen meghatározott.

35. Definíció. Az $A \in T^{n \times n}$ mátrix **karakterisztikus polinomja** az

$$f_A(x) = |A - xE|$$

determinánssal megadott T -feletti polinom. Az $f_A(x)$ polinom T -be eső gyökeit az A mátrix **karakterisztikus gyökeinek** nevezzük.

36. Tétel. Legyen T test. A $\lambda \in T$ skalár akkor és csak akkor sajátértéke az $A \in T^{n \times n}$ mátrixnak, ha λ karakterisztikus gyöke A -nak.

37. Példa. Kiszámoljuk az alábbi $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrix sajátértékeit, és meghatározzuk a hozzá tartozó sajátaltereket.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Az $|A - xE|$ determinánst az első oszlopa szerint kifejtve kapjuk az A mátrix karakterisztikus polinomját:

$$f_A(x) = |A - xE| = \begin{vmatrix} 7-x & -3 & 1 \\ 0 & 1-x & 2 \\ 0 & 9 & 4-x \end{vmatrix} = (7-x)[(1-x)(4-x) - 18] = (7-x)(x-7)(x+2).$$

Az $f_A(x)$ polinom valós gyökei, azaz az A mátrix sajátértékei a $\lambda_1 = 7$ és a $\lambda_2 = -2$ skalárok.

Meghatározzuk a $\lambda_1 = 7$ sajátértékhez tartozó sajátalteret. Az $xA = \lambda_1 x$ összefüggést átrendezve az $x(A - \lambda_1 E) = 0$ homogén lineáris egyenletrendszerhez jutunk, amelynek megoldásai alkotják a $\lambda_1 = 7$ -hez tartozó sajátalteret.

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix} = (0 \ -3x_1 - 6x_2 + 9x_3 \ x_1 + 2x_2 - 3x_3) = (0 \ 0 \ 0).$$

Mivel a második egyenlet a harmadik (-3) -szorososa, így elég figyelembe venni az $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ összefüggést, amiből $x_1 = -2x_2 + 3x_3$ -at kapjuk, azaz x_1 kötött ismeretlen, x_2 és x_3 pedig szabad. A megoldástér egy bázisát úgy kapjuk, hogy a szabad változókba behelyettesítjük a 0 és 1 értékeket úgy, hogy mindig egy szabad változó kapjon 1 értéket. Így

$$\begin{array}{lll} x_2 = 1, & x_3 = 0, & x_1 = -2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = -2, \\ x_2 = 0, & x_3 = 1, & x_1 = -2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3. \end{array}$$

Az így kapott $(-2, 1, 0)$ és $(3, 0, 1)$ vektorok alkotják a $\lambda_1 = 7$ -hez tartozó sajátalter egy bázisát.

A $\lambda_2 = -2$ -höz tartozó sajátalter hasonlóképpen számítható, egy bázisa a $(0, -3, 1)$ vektor.

38. Tétel. *Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik.*

39. Definíció. Véges dimenziós vektortér lineáris transzformációjának **karakterisztikus polinomja** a lineáris transzformáció valamely (bármely) bázisban felírt mátrixának karakterisztikus polinomja.