

4. feladatsor – Polinomok MEGOLDÁSOK

4.1. Feladat. Az f és a g polinomok legnagyobb közös osztója a megadott polinomgyűrűkben.

- (a) $x + 1$;
- (b) $x^2 + 6x - 7$;
- (c) $x^2 - \bar{1}$;
- (d) $\bar{2}x^2 + \bar{1}$.

4.2. Feladat. Az $f = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ és a $g = x^4 + x^3 - x^2 - 4x - 12$ racionális együtthatós polinomok közös gyökei, majd ennek felhasználásával az f és g összes gyöke.

$\lnko(f, g) = x^2 - 4$, közös gyökök: $2, -2$, $f = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 3)$,
 $g = (x - 2)(x + 2)(x^2 + x + 3)$.

4.3. Feladat. Az egyenletek megoldása.

- (a) Egy megoldás: $u_0 = -\frac{1}{4}x$, $v_0 = \frac{1}{4}x$,
általános: $u = -\frac{1}{4}x + (x + 5)t$, $v = \frac{1}{4}x - (x + 1)t$, $t \in \mathbb{R}[x]$;
- (b) Egy megoldás: $u_0 = x$, $v_0 = x^2 + x + 1$,
általános: $u = x + (x^2 + 1)t$, $v = x^2 + x + 1 + (x^3 + x^2 + 1)t$, $t \in \mathbb{Z}_2[x]$;
- (c) Egy megoldás: $u_0 = 3x$, $v_0 = 2x^2 + 3x$,
általános: $u = 3x + (3x^2 + 3x + 3)t$, $v = 2x^2 + 3x + (2x^3 + 2)t$,
 $t \in \mathbb{Z}_5[x]$;
- (d) Egy megoldás: $u_0 = 1$, $v_0 = 2x$,
általános: $u = 1 + (x + 2)t$, $v = 2x + (2x^2 + x + 2)t$, $t \in \mathbb{Z}_3[x]$.

4.4. Feladat. Hányszoros gyöke az f polinomnak a c szám, majd ennek segítségével az f polinom szorzattá alakítása.

- (a) kétszeres; $(x - 3)^2(x^3 + 2x + 1)$;
- (b) háromszoros; $(x - 3)^3(x^2 + x - 2)$;
- (c) háromszoros; $(x - i)^3(x^2 - 2)$;
- (d) háromszoros; $(x - \bar{2})^3(x + \bar{2})$.

4.5. Feladat. A polinomok komplex gyökei:

- (a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$;
- (b) $2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$;
- (c) $\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8}$, $\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8}$, $\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8}$;
- (d) $2, 1 + \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i, -2, -1 - \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i$;
- (e) $2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$;
- (f) $\sqrt[4]{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$, $\sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$, $\sqrt[4]{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$, $\sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$.

4.6. Feladat. A polinomok irreducibilis felbontása a $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett.

- (a) $x(x^2 + 3)(x^2 - 2)$ ($\mathbb{Q}$ felett), $x(x^2 + 3)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ ($\mathbb{R}$ felett),
 $x(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ ($\mathbb{C}$ felett);
- (b) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ ($\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ felett), $(x - 2)(x + 1 - i\sqrt{3})(x + 1 + i\sqrt{3})$;
- (c) $x^2(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ ($\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ felett), $x^2(x + 2)(x - 1 + i\sqrt{3})(x - 1 - i\sqrt{3})$;

- (d) $(x^2 + 5)(x^2 - 5)$ ($\mathbb{Q}$ felett), $(x^2 + 5)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$ ($\mathbb{R}$ felett),
 $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x - i\sqrt{5})(x + i\sqrt{5})$ ($\mathbb{C}$ felett);
- (e) $(x^2 - 3)(x^4 + 3x^2 + 9)$ ($\mathbb{Q}$ felett),
 $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3)$ ($\mathbb{R}$ felett),
 $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x - \frac{\sqrt{3}+3i}{2})(x + \frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x + \frac{\sqrt{3}+3i}{2})$;
- (f) $x^2(x+2)(x-2)(x^2+2)$ ($\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ felett), $x^2(x+2)(x-2)(x-i\sqrt{2})(x+i\sqrt{2})$.

4.7. Feladat. A polinomok racionális gyökei és irreducibilis felbontásuk $\mathbb{Q}[x]$ -ben.

- (a) Rac. gyök: 2, irred. felbont.: $(x - 2)(x^2 + x + 1)$;
 (b) Rac. gyök: $1/2$, irred. felbont.: $2(x - \frac{1}{2})(x^2 + 1)(x^2 - 2)$;
 (c) Rac. gyök: 1, $-1/2$, irred. felbont.: $4(x - 1)(x + \frac{1}{2})(x^2 + 2x + 2)$.

4.8. Feladat. Az $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok irreducibilisek.

- (a) Schönemann-Eisenstein tétel, $p = 3$;
 (b) Schönemann-Eisenstein tétel, $p = 2$ vagy $p = 5$;
 (c) Schönemann-Eisenstein tétel, $p = 11$.