3. feladatsor – Lineáris leképezések
MEGOLDÁSOK

3.1. Feladat. A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterében tekintsük a következő transzformációkat. Döntsük el, hogy lineáris transzformációk-e. Ha igen, akkor adjuk meg a magjukat, képterüket és azok dimenzióját, bázisát.

(a) nem lineáris
(b) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0)\}$, $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2$, egy bázisa: $(0,1),(1,0)$.
(c) nem lineáris
(d) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,b) : b \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 1$, egy bázisa: $(0,2)$. $\operatorname{Im}\varphi = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 1$, egy bázisa: $(1,0)$.
(e) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0)\}$, $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2$, egy bázisa: $(0,1),(1,3)$.
(f) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0)\}$, $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2$, egy bázisa: $(1,1),(\pi,0)$.
(g) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(a,b) : a+b=0\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 1$, egy bázisa: $(1,-1)$. $\operatorname{Im}\varphi = \{(a,a) : a \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 1$, egy bázisa: $(1,1)$.
(h) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0)\}$, $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2$, egy bázisa: $(2,1/2),(-1,2)$.
(i) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0)\}$, $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2$, egy bázisa: $(-1,1),(3,3)$.

3.2. Feladat. Melyek lineárisak az alábbi leképezések közül? Amelyik lineáris, annak határozzuk meg a standard bázisban megadott mátrixát.

(a) Nem lineáris
(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
(c) $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}$
(d) Nem lineáris

3.3. Feladat. Határozzuk meg a következő φ lineáris transzformációk mátrixát a megadott $\mathcal{E}$ bázisban. Számítsuk ki a v vektor φ melletti képének koordinátáit ebben a bázisban.

(a) $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(-1,-1)$
(b) $\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}$, $(\overline{1},\overline{0})$
(c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1/2 & -1 & 2 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(1,3,1)$
(d) $\begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{0} \end{pmatrix}$, $(\overline{0},\overline{1},\overline{1})$

3.4. Feladat. Tekintsük a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén értelmezett alábbi φ és ψ lineáris transzformációkat. Határozzuk meg a $\varphi + \psi$, a $\varphi\psi$ és a $\psi\varphi - 3\psi$ lineáris transzformációkat.

(a) $\varphi + \psi$ a zérus transzformáció (azaz bármely vektor képe az origó), $\varphi\psi$ az origóra vonatkozó középpontos tükrözés, $\psi\varphi - 3\psi$ a következő (standard bázisban értendő) mátrix által meghatározott transzformáció: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

(b) $\varphi + \psi$ az identikus transzformáció, $\varphi\psi$ a zérus transzformáció, $\psi\varphi - 3\psi$ a következő (standard bázisban értendő) mátrix által meghatározott transzformáció: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(c) $\varphi + \psi$ $\pi/4$-gyel való forgatás és $\sqrt{2}$-szörös nyújtás, $\varphi\psi$ az origó körüli $\pi/2$ szögű forgatás, $\psi\varphi - 3\psi$ a következő (standard bázisban értendő) mátrix által meghatározott transzformáció: $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $\varphi + \psi$ és $\varphi\psi$ is az identikus transzformáció, $\psi\varphi - 3\psi$ a következő (standard bázisban értendő) mátrix által meghatározott transzformáció: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3.5. Feladat. Döntse el, hogy az u, illetve v vektor sajátvektora-e az A mátrixnak:

(a) u sajátvektor, v nem;
(b) u és v sajátvektor.

3.6. Feladat. Döntse el, hogy λ sajátértéke-e az A mátrixnak:

(a) igen;
(b) nem.

3.7. Feladat. Legyen a V vektortérben értelmezett lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban A. Határozzuk meg a lineáris transzformációk karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, valamint adjunk meg bázist a sajátalterekben.

(a) A karakterisztikus polinom $x^2 - 3x$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátalterek egy bázisa: $0, (1, 1)$; $3, (-2, 1)$.
(b) A karakterisztikus polinom $x^2 - 2x + 3$, nincs valós sajátérték
(c) A karakterisztikus polinom $x^2 - 2x + 3$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátalterek egy bázisa: $1 + \sqrt{2}i, (-i/\sqrt{2}, 1); 1 - \sqrt{2}i, (i/\sqrt{2}, 1)$
(d) A karakterisztikus polinom $x^2 + x + \overline{1}$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátalterek egy bázisa: $\overline{1}, (\overline{1}, \overline{1})$.
(e) A karakterisztikus polinom $(x - 3)^2(x + 1)$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátalterek egy bázisa: $3, (-1, 1, 0), (-1, 0, 1)$; $-1, (0, 1, -5)$.
(f) A karakterisztikus polinom $-(x + 3)^2(x - 9)$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátalterek egy bázisa:$-3, (0, 1, 0)$; $9, (2, -1, -2)$.
(g) A karakterisztikus polinom $(\overline{1} - x)(x^2 + x + \overline{1})$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátalterek egy bázisa: $\overline{1}, (\overline{1}, \overline{1}, \overline{2})$; $\overline{2}, (\overline{0}, \overline{1}, \overline{2})$.

3.8. Feladat. Határozzuk meg a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterében értelmezett következő lineáris transzformációk sajátértékeit, valamint a sajátalterek egy bázisát.

(a) Sajátértéke az 1, bázis a sajátaltérben: $(1, 0), (0, 1)$.
(b) Sajátértéke a 0, bázis a sajátaltérben: $(1, 0), (0, 1)$
(c) Sajátértékek és bázisok: $1, (1, 0)$, $-1, (0, 1)$.
(d) Sajátértékek és bázisok: $1, (0, 1)$, $0, (1, 0)$.
(e) Nincs (valós) sajátérték.