Nemkooperatív játékok - Mátrixjátékok (1. rész)

(előadásjegyzet, 2022. február 25.)

Kátai-Urbán Kamilla

Vezessük be a következő jelöléseket:

- N: játékosok száma,
- S_i: i. játékos stratégiáinak halmaza és $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_N$,
- $\varphi_i\colon S \to \mathbb{R}$ az i. játékos kifizetési függvénye,
- $\Gamma(N, S_1, S_2, \ldots, S_N, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N)$: N-személyes nemkooperatív játék.

A Γ nemkooperatív játék megoldása azt jelenti, hogy megkeressük az alábbiakban definiált Nash-féle egyensúlyi helyzeteket.

1. Definíció. A $\Gamma(N, S_1, S_2, \ldots, S_N, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N)$ nemkooperatív játéknak *egyensúlyi helyzete* van az $x^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*) \in S$ helyen, ha

$$\varphi_i(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \ldots, x_N^*) \geq \varphi_i(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_N^*),$$

bármely $i \in \{1, \ldots, N\}$ és $x_i \in S_i$ esetén. Azaz egyensúlyi helyzet esetén semelyik játékosnak sem éri meg egyoldalúan megváltoztatni a stratégiáját, ugyanis nem érhet el nagyobb kifizetést.

2. Definíció. A játékot *nullaösszegűnek* nevezzük, ha az egyes játékosok nyereménye a többi játékos vesztesége. Azaz, ha az összes játékos kifizetéseit összegezzük, akkor 0-át kapunk.

3. Definíció. Minden véges kétszemélyes nullaösszegű játéknál a stratégiapárokhoz tartozó kifizetési függvény értékeit táblázatban, azaz mátrixban ábrázolhatjuk, ezért az ilyen típusú játékokat *mátrixjátékoknak* nevezzük.

4. Definíció. Ha egy mátrixjáték esetén az 1. játékosnak m stratégiája van, a 2. játékosnak pedig n, akkor az 1. játékos kifizetéseit egy $m \times n$-es A valós mátrix elemeiként ábrázolhatjuk. Ezt az $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixot nevezzük a *játék kifizetési mátrixának*,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix i. sorának j. eleme a_{ij}, az az érték, amit az 1. játékos nyer, ha ő az i. stratégiájával játszik, a 2. játékos pedig a j. stratégiájával. Ekkor a 2. játékos kifizetése $-a_{ij}$, ugyanis a játék nullaösszegű. Tehát erre úgy is lehet gondolni, hogy a 2. játékos a_{ij}-t fizet az 1. játékosnak. Ha $a_{ij} > 0$, akkor erre úgy is lehet gondolni, hogy a 2. játékos a_{ij}-t fizet az 1. játékosnak.

5. Definíció. Ha a mátrixjáték kifizetési mátrixa A, akkor az A mátrix sorminimumainak maximumát *alsóértéknek*, az oszlopmaximumainak minimumát pedig *felsőértéknek* nevezzük. Az alsóérték kisebb vagy egyenlő a felsőértéknél, ha az egyenlőség teljesül, *nyeregpontnak* nevezzük.

6. Tétel. *Mátrixjátékok bármely két nyeregpontja azonos értékű.*

7. Tétel (Minimax tétel). *Bármely mátrixjátéknak van egyensúlyi helyzete.*

8. Definíció. Ha a játékos csak az egyik stratégiájával játszik, és a többit nem használja, akkor ezt *tiszta stratégiának* nevezzük, különben *kevert stratégiának.*

Legyen A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Az 1. játékos stratégiáinak S_1 halmaza az összes olyan m-komponensű $X = (x_1, \ldots, x_m)$ vektor, amelyre $x_i \geq 0$ ($i = 1, \ldots, m$) és $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. A 2. játékos esetén pedig az n-komponensű $Y^T = (y_1, \ldots, y_n)$

vektrok halmaza, amelyre $y_j \geq 0$ $(j = 1, \dots, n)$ és $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$. Azaz az 1. játékos x_i valószínűséggel játsza az i. stratégiáját, és a 2. játékos y_j valószínűséggel a j. stratégiáját. Ekkor az 1. játékos várható kifizetése:

$$XAY = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j.$$

9. Definíció. Legyen A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. A mátrixjátéknak $X^* \in S_1$ és $Y^* \in S_2$ *egyensúlyi helyzete* (*optimális stratégiája*), ha

$$XAY^* \leq X^*AY^* \leq X^*AY,$$

tetszőleges $X \in S_1$, $Y \in S_2$ estén. Azaz egyik játékosnak sem éri meg egyoldalúan változtatni, az 1. játékos nem nyerne többet, a 2. játékos pedig nem veszítene kevesebbet, ha az egyensúlyi helyzettől eltérne.

10. Definíció. Legyen A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és X^*, Y^* optimális stratégiája, ekkor a $v = X^*AY^*$ egyensúlyi helyzetben elért várható kifizetést a *játék értékének* nevezzük.

11. Jelölés. Legyen A egy $m \times n$-es mátrix, ekkor jelölje $A_{i.}$ az A mátrix i. sorvektorát, ahol $i \in \{1, \dots, m\}$. $A_{.j}$ pedig jelölje az A mátrix j. oszlopvektorát tetszőleges $j \in \{1, \dots, n\}$ esetén.

Ha A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, akkor az $XA_{.j}$ a várható kifizetés, amikor az első játékos az X kevert stratégiáját használja, és a második játékos a j. tiszta stratégiát. Hasonlóan az $A_{i.}Y$ kifejezés azt a várható kifizetést adja, amikor a második játékos az Y kevert stratégiát választja, az első pedig az i. tiszta stratégiát.

12. Tétel (Optimális stratégia tétele). *Legyen A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és v a játék értéke.*

(1) *Az X^* az első játékos optimális stratégiája* $\Longleftrightarrow v \leq X^*A_{.j},\ j = 1, 2, \dots, n.$
(2) *Az Y^* a második játékos optimális stratégiája* $\Longleftrightarrow A_{i.}Y^* \leq v,\ i = 1, 2, \dots, m.$

13. Tétel (Tiszta vs. kevert tétel). *Legyen $A = (a_{ij})$ egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és v a játék értéke.*

(1) *Legyen Y^* a második játékos optimális stratégiája. Ha*

$$A_{i.}Y^* < v,$$

akkor $x_i^* = 0$ az első játékos X^* optimális stratégiájában.

(2) *Legyen X^* az első játékos optimális stratégiája. Ha*

$$X^*A_{.j} > v,$$

akkor $y_j^* = 0$ a második játékos Y^* optimális stratégiájában.

Bizonyítás: Az (1) állítást bizonyítjuk, a (2) állítás bizonyítása hasonló.
Mivel Y^* a második játékos optimális stratégiája, így ha az első játékos az i-edik tiszta stratégiáját alkalmazza ellene, a nyereménye kisebb vagy egyenlő, mint játék értéke:

$$A_{i.}Y^* \leq v, \quad i = 1, \dots, m.$$

Jelölje R, J a következő index halmazokat:

$$R = \{i : A_{i.}Y^* < v\}, \quad J = \{i : A_{i.}Y^* = v\}.$$

Ekkor:

$$\begin{aligned} v &= X^*AY^* = \sum_{i=1}^{m} x_i^* A_i.Y^* \\ &= \sum_{i\in R} x_i^* A_i.Y^* + \sum_{i\in J} x_i^* A_i.Y^* \\ &= \sum_{i\in R} x_i^* A_i.Y^* + \sum_{i\in J} x_i^* v. \end{aligned}$$

Átrendezve

$$v - \sum_{i\in J} x_i^* v = \sum_{i\in R} x_i^* A_i.Y^*,$$

$$v\Big(1 - \sum_{i\in J} x_i^*\Big) = \sum_{i\in R} x_i^* A_i.Y^*.$$

Mivel X^* komponensei valószínűségeket jelölnek, így $\sum_{i=1}^m x_i^* = 1$. Továbbá R és J index halmazok diszjunktak, egyesítésük pedig kiadja az összes indexet, ezért $1 - \sum_{i\in J} x_i^* = \sum_{i\in R} x_i^*$. Ezt felhasználva kapjuk:

$$v\sum_{i\in R} x_i^* = \sum_{i\in R} x_i^* A_i.Y^* \Rightarrow \sum_{i\in R}(v - A_i.Y^*)x_i^* = 0.$$

Mivel R mindenegyes i elemére $v - A_i.Y^* > 0$ ezért szükségképpen ezen i indexekre $x_i^* = 0$.

■

14. Megjegyzés. A 13. tétel (1) állítását úgy lehet szavakkal megfogalmazni, hogy ha $A_i.Y^* < v$ teljesül, azaz az első játékos az i. stratégiáját alkalmazva a játék értékénél kevesebbet nyerne, akkor az optimális stratégiájában nem használja az i. stragtégiát, vagyis $x_i^* = 0$. A (2) hasonlóan foglamazható meg a második játékos j. startégiájára, ott akkor rossz a stratégia, ha v-nél többet veszít a játékos.

A 12. tétele szerint $A_i.Y^* \leq v$. Viszont a 13. tétel alapján $x_i^* > 0$ esetén nem teljesülhet a $<$ egyenlőtlenség, tehát ekkor $A_i.Y^* = v$. Ezt fogalmazza meg az alábbi következmény.

15. Következmény. *Legyen az A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és legyen a játék értéke v, továbbá X^* az első játékos, Y^* a második játékos optimális stratégiája.*

(1) *Ha X^* i. komponensére $x_i^* > 0$, akkor $A_i.Y^* = v$.*
(2) *Ha Y^* j. komponensére $y_j^* > 0$, akkor $X^*A._j = v$.*

Ezt a következményt többször is használni fogjuk a mátrixjátékok megoldása során, például a 2×2-es és a 3×3-as mátrixjátékoknál.

A 2×2-es mátrixjátékok megoldása

Legyen az $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Ha van nyeregpont, akkor az annak megfelelő tiszta stratégiák adják a játék megoldását. Az alábbi két esetben nincs nyeregpont, ekkor kevert stratégiát kell alkalmazni:

1) $a < b,\ a < c,\ d < c,\ d < b$;
2) $a > b,\ a > c,\ d > c,\ d > b$.

Jelölje $X^* = \left(\begin{smallmatrix} x, & 1-x \end{smallmatrix}\right)$ az első játékos optimális kevert stratégiáját, $Y^* = \left(\begin{smallmatrix} y \\ 1-y \end{smallmatrix}\right)$ pedig a második játékos optimális kevert stratégiáját. Mivel tudjuk, hogy nem tiszta stratégiát használnak, ezért teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$0 < x < 1, \quad 0 < 1-x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < 1-y < 1.$$

Mivel az optimális stratégiák egyik komponense sem nulla, a 15. Következmény felhasználásával a következőket kapjuk:

$$X^*A._1 = v, \quad X^*A._2 = v, \quad A_1.Y^* = v, \quad A_2.Y^* = v,$$

ahol v a játék értéke és $A_{.1}$ az A mátrix első oszlopát, $A_{.2}$ a második oszlopát, $A_{1.}$ az első sorát, az $A_{2.}$ pedig a második sorát jelöli. A mátrix elemeivel megadva a fenti összefüggések a következő alakúak lesznek:

$$\begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = v, \quad \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = v, \quad \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = v, \quad \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = v.$$

Elvégezve a mátrixszorzásokat a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} ax + c(1-x) &= v \\ bx + d(1-x) &= v \\ ay + b(1-y) &= v \\ cy + d(1-y) &= v. \end{aligned}$$

Az első két egyenletnél a baloldalakat egyenlővé téve kifejezhető az x, míg a második két egyenletből megkaphatjuk az y-t. Továbbá x-et visszahelyettesítve az első egyenletbe kapjuk a játék értékét, v-t:

$$x = \frac{d-c}{a-b-c+d}, \quad y = \frac{d-b}{a-b-c+d}, \quad v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d}.$$

Vegyük észre, hogy a játék értékének kiszámításakor a számlálóban az A mátrix determinánsa szerepel.

16. Példa. Megoldjuk meg a feladatsor **9. feladatát**.

Az alábbi A mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

A sorminimumok maximuma 4, az oszlop maximumok minimuma 5, így nincs nyeregpont, a játék értéke: $4 \leq v \leq 5$. Felhasználva a kevert stratégiákra vonatkozó korábbi formulákat:

$$x = \frac{d-c}{a-b-c+d} = \frac{5-2}{6-4-2+5} = \frac{3}{5}, \quad y = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{5-4}{6-4-2+5} = \frac{1}{5}.$$

Így az első játékos optimális stratégiája: $X^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, a második játékos optimális stratégiája: $Y^{*T} = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$. A játék értéke:

$$v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{30-8}{6-4-2+5} = \frac{22}{5}.$$

17. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **7.,8.** és **10.-12. feladatát**.

Mátrixjátékok megoldásának lépései

A mátrixjátékok megoldása az optimális sratégia megkeresését jelenti.

1. lépés: Nyeregpont keresése. Ha találunk nyeregpontot, akkor a hozzá tartozó stratégiák optimális stratégiát adnak. Ha nincs nyeregpont, akkor a 2. lépéssel folytatjuk.

2. lépés: Domináns sorok, oszlopok keresése. Legyen A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa.

Az első játékos szempontjából a dominálás a következőt jelenti. Tekintsük a kifizetési mátrix i. és j. sorát:

$$A = \begin{pmatrix} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ & & & \end{pmatrix}.$$

Ha az $a_{it} \leq a_{jt}$, $t = 1, 2, \ldots, n$, akkor a *j. sor dominálja az i. sort*, tehát az első játékos nem választja az i. stratégiát, mert azzal mindenképp rosszabbul járna, ez a stratégia elhagyható.

A második játékos szempontjából, ha a k. és l. oszlopát tekintjük a kifizetési mátrixnak:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \vdots \\ a_{mk} & a_{ml} \end{pmatrix},$$

és $a_{tk} \leq a_{tl}$, $t = 1, 2, \ldots m$ teljesül, akkor a k. *oszlop dominálja az l. oszlopot.* A második játékos mindenképp többet veszítene, ha az l. oszlopot választaná, így az l. stratégia elhagyható.

3. lépés: Kevert stratégiák keresése.

18. Példa. Az alábbi mátrix egy 4×5-ös mátrixjáték kifizetési mátrixa. Keressünk domináns sorokat és oszlopokat.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Az első sor dominálja a 3. sort, mert az 1. sor elemei nagyobbak, mint a 3. sor megfelelő elemei, tehát az első játékosnak nem éri meg a 3. stratégiáját használni. Az első oszlop dominálja a 5. oszlopot, illetve a 3. oszlop dominálja a 4. oszlopot, mert a domináns oszlopok komponensei kisebb vagy egyenlők, mint a dominált oszlop megfelelő komponensei. Így a második játékos nem használja a 4. és 5. stratégiáját. A dominált sorok és oszlopok elhagyásával a következő mátrixot kajuk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

19. Megjegyzés. A $2 \times n$-es és $n \times 2$-es mátrixjátékok megoldására grafikus módszert alkalmazunk, lásd az előadáson.