

MTNM412E: LINEÁRIS ALGEBRA TÉTELSOR

A vizsga elején egy beugró dolgozatot kell írni, utána pedig szóban felelni a következő tételek valamelyikéből. Minden tételnél ki kell tudni mondani az oda tartozó definíciókat és tételeket, illetve az állításokat és tételeket be kell tudni bizonyítani. Minden definícióhoz példát és ellenpéldát kell tudni mondani. Ha a definícióban több feltételnek kell egyszerre teljesülnie (például a bázis definíciója), akkor ez azt jelenti, hogy tudni kell példát mondani 1) bázisra, 2) lineárisan független de nem generátorrendszerre, illetve 3) lineárisan függő generátorrendszerre is. Minden tételt tudni kell egyszerű példákon keresztül alkalmazni, illetve azt bemutatni, hogy a tétel szükséges feltételei tényleg szükségesek.

1. Vektortér, altér, alterek összege és metszete, lineáris kombináció, generált altér.
2. Lineáris függetlenség, generátorrendszer, bázis, dimenzió, maximális lineárisan független vektorrendszer és minimális generátorrendszer kapcsolata.
3. Vektorterek direkt összege, alterekre vonatkozó dimenziótétel.
4. Alterek megadása lineáris egyenletrendszerekkel, váltás a generátorrendszer és egyenletrendszerrel való megadások között.
5. Lineáris leképezések, képtér, magtér, lineáris leképezések dimenziótétele.
6. Lineáris leképezés mátrixa, lineáris leképezések összegének, skalárszorosának és szorzatának definíciója és mátrixa.
7. Inverz leképezés mátrixa, bázisáttérés mátrixa.
8. Vektorok belső szorzata, normája, Cauchy-Schwarz és háromszög egyenlőtlenség.
9. Vektorok által bezárt szög, ortogonális vektorrendszer, Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció.
10. Lineáris transzformáció sajátértéke, sajátvektora, sajátalterei, geometriai multiplicitás, sajátalterek összege az direkt összeg.
11. Mátrixok és lineáris transzformációk karakterisztikus polinomja, sajátértékek algebrai multiplicitása.
12. Lineáris transzformációk minimálpolinomja, sajátérték és minimálpolinom kapcsolata.

A beugró dolgozatban definíciókhoz tartozó példákat és ellenpéldákat fogok kérni, ahol 5-ből legalább 4-et helyesen kell megválaszolni. Például:

- 1. Feladat.** Adjon példát olyan részhalmazára az $\mathbb{R}^2$ vektortérnek, amely nem altér.
- 2. Feladat.** Adjon példát olyan u , v és w vektorokra, melyek lineárisan függőek, de semelyik sem skalárszorosa a másiknak.
- 3. Feladat.** Adjon példát az $\mathbb{R}^2$ vektortéren olyan lineáris transzformációra, melynek képtere 1-dimenziós.
- 4. Feladat.** Adjon példát olyan lineáris transzformációra, melynek minimálpolinomja $x - 2$.
- 5. Feladat.** Adjon példát $\mathbb{R}^2$ -ben két olyan vektorra, amelyek egymásra merőlegesek, de a standard bázisvektorok semelyikére sem merőlegesek.