# Játékelmélet

Mi a racionális viselkedés olyan helyzetekben, amikor minden résztvevő eredményét befolyásolja a többi résztvevő döntése.

**Játékos**: a résztvevők halmaza (emberek, cégek, pártok, országok)

**Lépés**: a játékosok lehetséges döntései (egy vagy több)

**Nyereség**: a játékosok számszerűsített érdekei

**1. Példa**: Kő-papír-olló

| | K | P | O |
|---|---|---|---|
| K | 0 | −1 | 1 |
| P | 1 | 0 | −1 |
| O | −1 | 1 | 0 |

- kettő játékos
- lépések: K, P, O
- nyeremény: +1, 0, −1

2. Példa : Sakk

2 játékos, lépések sorozata,
3 lehetséges nyeremény

3. Példa : Póker

több játékos, lépések sorozata,
több lehetséges nyeremény

4. Példa : Fogoly-dilemma
2-rabló

| | vall | tagad |
|---|---|---|
| vall | −5, −5 | 0, −10 |
| tagad | −10, 0 | −1, −1 |

saját nempontjából
optimális stratégia
ha vall, de
összességében ez
rosszabb mint 2 tagadás

5. Példa : Árverések (angol,
holland, zárt licites, ...)

6. Példa : Szavazások (többségi,
többségi rájátszással, Condorcet, ...)

**Minden csak egy játék**

Osztályozás :

1. A játékosok száma szerint : 1, 2, ...

2. szimmetrikus vagy aszimmetrikus

   minden játékos ugyan azt
   a nyereményt kapja ugyan olyan
   döntés mellett.

3. nulla összegű (zero sum) vagy nem

   a játékosok nyeresége a
   többiek vesztesége

4. a lépések száma szerint

5. egyidejű vagy egymás utáni
   lépések (felváltva)

6. teljes információs vagy részleges

   mindenki ugyan azzal az infor-
   mációval rendelkezik

7. véletlen vagy determinisztikus
   (lépés választás vagy eredmény)

8. kooperatív vagy sem

Antoin Cournot (1801–1877)

- a versenyzés elmélete
- keresleti függvény

Neumann János (1903–1957)

- nullösszegű játékok
- minimax elv

Oskar Morgenstern (1902–1977)

- "Játékelmélet és gazdasági viselkedés" Neumann János

John Nash (1928–2015)

- egyensúlyi helyzet
- Abel-díj

Harsányi János (1920–2000)

- részleges információs játékok

Reinhard Selten (1930–2016)

- dinamikus játékok

közgazdasági Nobel-díj

# Véges fával ábrázolható játékok

**Def** a játék leírható egy véges irányított gyökeres fával, ahol

1. a játék a gyökérnél kezdődik
2. minden nem levél csúcshoz tartozik egy játékos, aki választhat a pontból kiinduló élek közül.
3. minden levél csúcshoz tartozik egy $\mathbb{R}^n$-beli vektor ami a játékosok kifizetéseit adja meg.
4. minden játékos ismeri a fát, a játékosok csúcsokhoz való hozzárendelését és a kifizetéseket.

**Def**: Egyensúlyi pont: olyan lefolyása a játéknak amelyben senki sem tud javítani a nyereményén.

**Tétel**: Minden fával ábrázolt játéknak van legalább egy egyensúlyi pontja.

**Def**: **gráf** $\quad V$ **pontok halmaza**

$G=(V,E)$ $\quad E$ **élek halmaza**

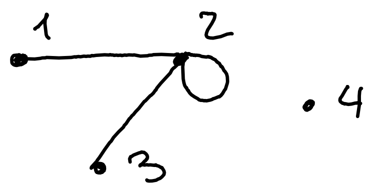
$$E \subseteq \{\{u,v\} \mid u,v \in V\}$$

**hurok él** $\quad \{u,u\} = \{u\}$

**irányítatlanok az élek**

$$\{u,v\} = \{v,u\}$$

**Példa**:




$V = \{1,2,3,4\}$

$$E = \{\{1,2\}, \{2\}, \{2,3\}\}$$

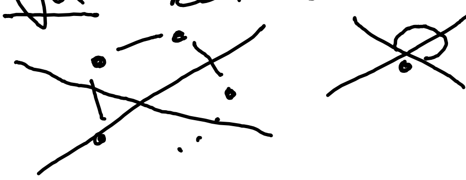
**Def**: **irányított** gráf: $\quad V$ **pontok halmaza**

$$E \subseteq V^2 = \{(u,v) \mid u,v \in V\}$$

hurok él $\quad (u,u)$

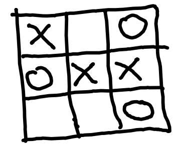
irányítottak az élek $\quad (u,v) \neq (v,u)$ ha $u \neq v$.

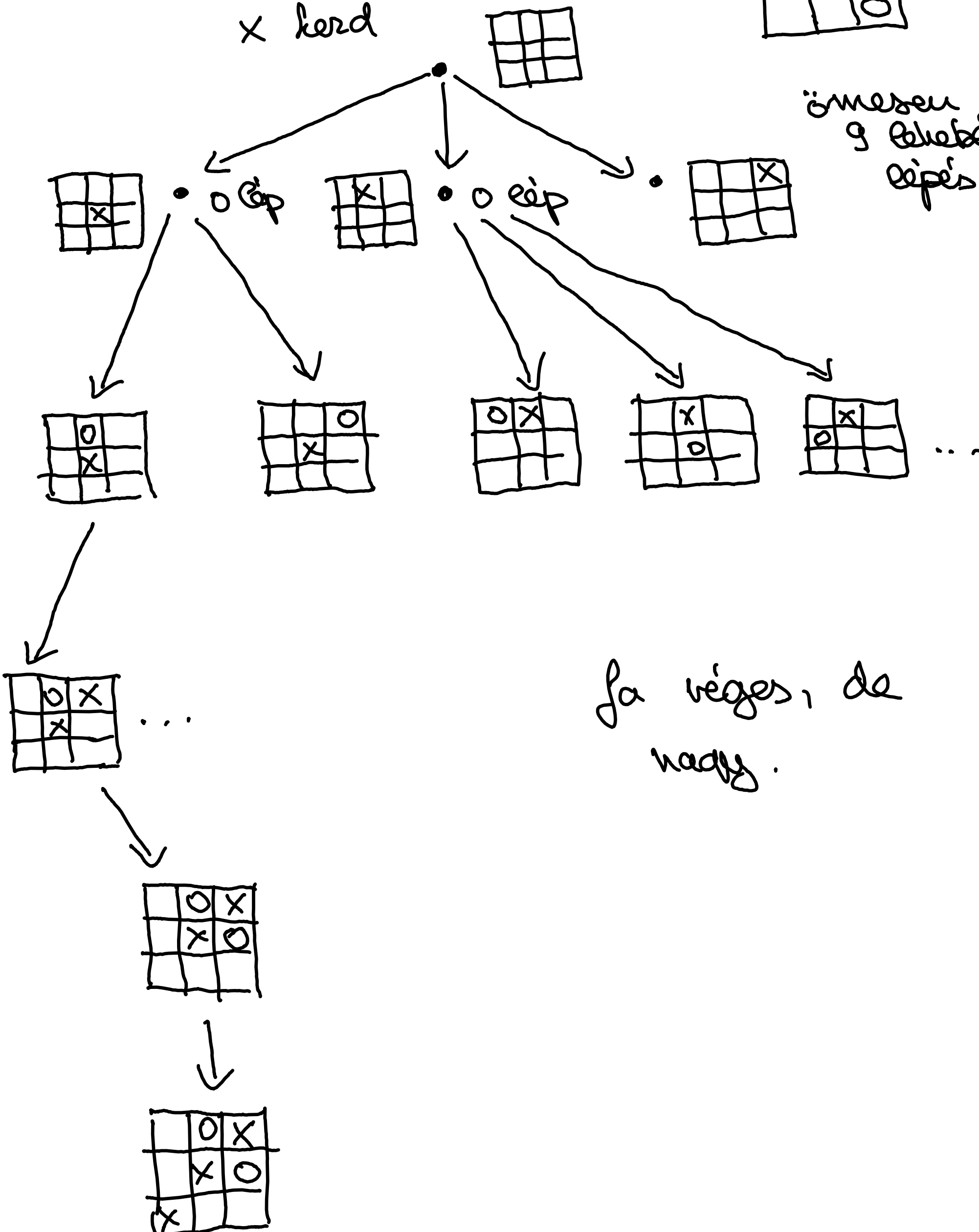
**Def**: **fa**: körmentes összefüggő gráf



bármely pontból eljuthatunk bárhova

# Példa: Tic-Tac-Toe





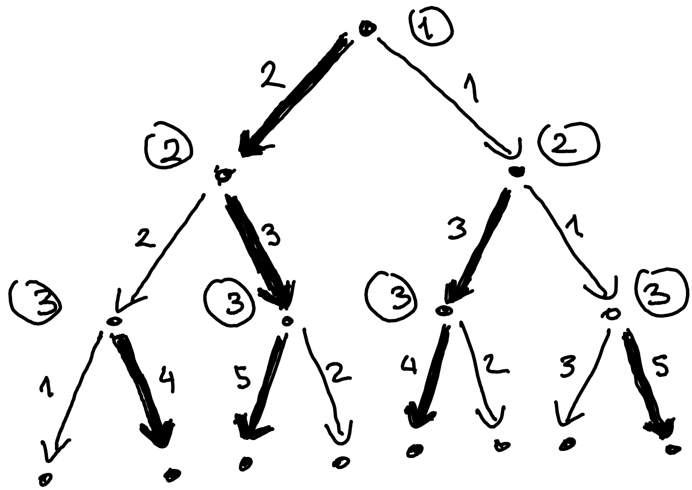

összesen 9 lehetséges lépés

fa véges, de nagy.

levél (1,-1)

x nyereménye 1, y nyereménye -1

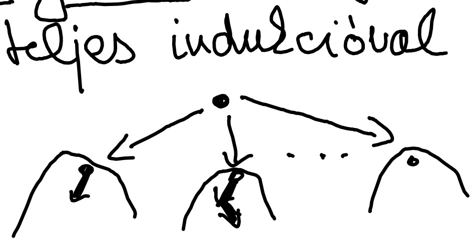
Példa: 3 játékos felváltva lép




$$\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix}$$

Áll: Ezzel az algoritmussal megkapjuk mindenkinek a döntéseit, hogy mit fog lépni az adott helyzetben. Senki sem tudja a nyereményét növelni ha másképp játszik.

Tétel bizonyítása: a fa mérete szerinti teljes indukcióval



# Mátrix játékok

<u>Def</u>: A játék normál formája:

① $N = \{1, 2, \dots, n\}$ a játékosok halmaza

② $S_1, \dots, S_n$ a játékosok tiszta stratégiáinak (választásainak) halmaza

③ $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ a lehetséges stratégia kombinációk halmaza

$\varphi_1 : S \to \mathbb{R}, \dots, \varphi_n : S \to \mathbb{R}$ az egyes játékosok nyereség függvénye

A játékot $(N, S, \varphi_i \ (i \in N))$ írja le, amit minden játékos ismer. Ha a játékot többször játszák, akkor azok egymástól teljesen függetlenek.

<u>Def</u>: $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ Nash-féle egyensúlyi helyzet, ha minden $i$ és $s_i'$ esetén

$$\varphi_i(s_1, \dots, s_n) \geq \varphi_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \dots, s_n)$$

azaz senki sem tud egyoldalúan javítani a nyereményén!

Megj.: A játék nullaösszegű, ha
$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(s) = 0 \text{ minden } s \in S\text{-re.}$$

Def: 2-személyes nullaösszegű normál formában megadott véges játékokat mátrix játékoknak nevezzük.

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

ahol az első játékosnak m tiszta stratégiája van, a másodiknak n db és $a_{ij}$ jelöli az első játékos nyereményét a másodiktól az $i, j$ stratégiák esetén. Ezt a mátrixot a játék kifizetési mátrixának nevezzük.

$$N = \{1, 2\}$$
$$S_1 = \{1, 2, \dots, m\}$$
$$S_2 = \{1, \dots, n\}$$

$$\varphi_1(i,j) = a_{ij} \qquad \varphi_2(i,j) = -a_{ij}$$

Példa:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$ az első játékos nyereménye

$S=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$
lehetséges stratégia kombinációk

(1,1) első játékos nyereménye 1
ezen nem tud javítani
(−1 lenne az alternatíva)

második játékos vesztesége 1
ezen tud javítani, ha 2-es
stratégiáját választja: veszteség = 0

tehát (1,1) nem egyensúlyi helyzet

(1,2) első játékos nyereménye 0
ezen tud javítani, ha a 2-es
stratégiát választja: nyeremény = 2
ez sem egyensúlyi helyzet

(2,2) első játékos nem tud javítani
második játékos tudja a 2
veszteségét −1-re javítani. nem egyensúly

(2,1) első játékos tud javítani
ez sem egyensúlyi helyzet

nincs akkor egyensúlyi helyzet

Példa:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & \boxed{1} \\ \boxed{2} & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 5 & \boxed{3} & 4 & 4 \\ 3 & 2 & \boxed{1} & 6 \end{pmatrix}$$

(1) sorokban a minimumok $\square$

a sor minimumok maximuma 3

első játékos a minimális nyereségét maximalizálja 3. sorral

(2) oszlopokban a maximumokat nézi $\bigcirc$

az oszlop maximumok minimuma: 3

a második játékos maximális veszteségét minimalizálja a 2. oszloppal

Ha ez a két szám megegyezik, és akkor ez egyensúlyi helyzet.

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

sorminimumok maximuma: 0
oszlopmaximumok minimuma: 1
ez a kettő nem egyezik meg,
nincs egyensúlyi helyzet.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

"jó stratégia" 50%-al az
első sort választja,
50%-al a másodikat

várható nyereménye 5

ha az utolsó sort választja,
akkor biztos 1-pont.