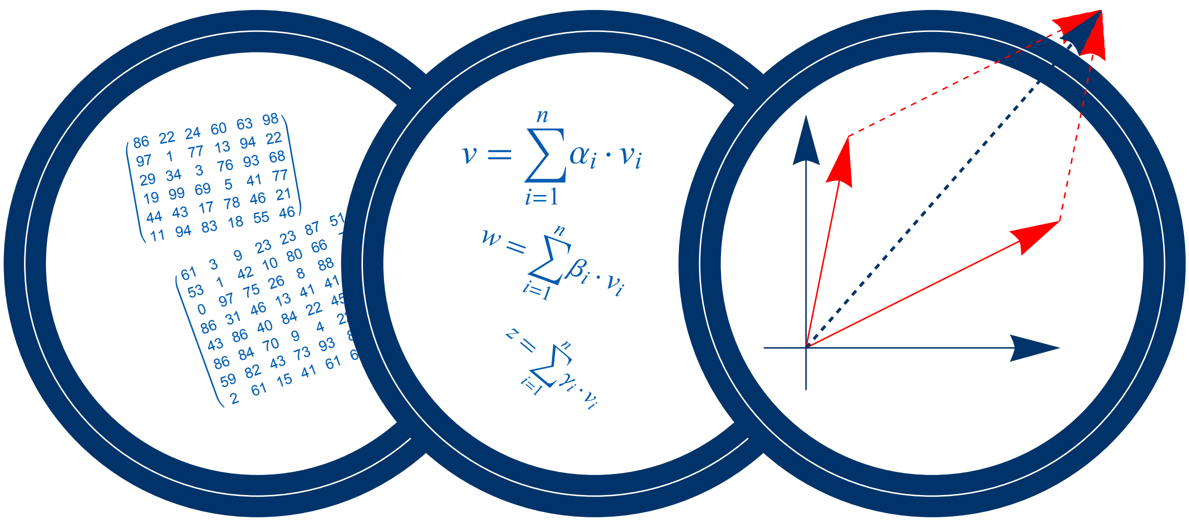
Algebra és számelmélet 4.

A segédanyagot az előadáshoz összeállította:
Dormán Miklós



Az utolsó módosítás dátuma: 2021. február 7.

Lineáris algebra

Jelölések

Halmazok, számhalmazok

$P(X) \rightsquigarrow$ az X halmaz részhalmazainak halmaza, azaz az X halmaz **hatványhalmaza**
$\mathbb{N} \rightsquigarrow$ a természetes számok halmaza, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z} \rightsquigarrow$ az egész számok halmaza, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Q} \rightsquigarrow$ a racionális számok halmaza
$\mathbb{R} \rightsquigarrow$ a valós számok halmaza
$\mathbb{C} \rightsquigarrow$ a komplex számok halmaza
$\mathfrak{Re}\,(z) \rightsquigarrow$ a z komplex szám valós része
$\mathfrak{Im}\,(z) \rightsquigarrow$ a z komplex szám képzetes része
$\mathbb{A} \rightsquigarrow$ a racionális számtest felett algebrai komplex számok halmaza

Relációk

$0_A \rightsquigarrow \{(a, a) \mid a \in A\}$ — az egyenlőségreláció az A halmazon
$1_A \rightsquigarrow A \times A$ — a teljesreláció az A halmazon

Mátrixok

$K^{n \times n} \rightsquigarrow$ a K test feletti $n \times n$-es **mátrix**ok halmaza
$\det(A),\ |A| \rightsquigarrow$ az A négyzetes mátrix **determináns**a
$A^T \rightsquigarrow$ az A mátrix **transzponált**ja
$\mathfrak{V}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rightsquigarrow$ az $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ elemekhez tartozó **Vandermonde-mátrix**
$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rightsquigarrow$ az $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ elemekhez tartozó **Vandermonde-determináns**

Csoportok, permutációcsoportok

$[X] \rightsquigarrow$ a $\mathbb{G}$ csoport $X \subseteq G$ részhalmaz által generált részcsoportja
$S_H \rightsquigarrow$ a **szimmetrikus csoport** a H halmazon
$A_H \rightsquigarrow$ az **alternáló csoport** a H halmazon
$D_n \rightsquigarrow$ az n-edfokú **diédercsoport**

Polinomok

$K[x] \rightsquigarrow$ a K test feletti x-határozatlanú **polinomgyűrű**
$f^* \rightsquigarrow$ az $f \in K[x]$ **polinom fokszáma**
$K(x) \rightsquigarrow$ az x határozatlan **racionális kifejezés**einek halmaza a K test felett ($Q_{K[x]}$)
$D(f),\ f' \rightsquigarrow$ az $f \in K[x]$ polinom x határozatlan szerinti **(formális) derivált**ja

Vektorterek

$\dim_K(V) \rightsquigarrow$ a K test feletti V vektortér **dimenzió**ja
$[v_1, \dots, v_k] \rightsquigarrow$ a $v_1, \dots, v_k$ vektorok által **generált altér**
$\mathrm{Hom}(V, W) \rightsquigarrow$ a $V \to W$ **lineáris leképezések vektortere**
$\mathrm{Hom}(V) \rightsquigarrow$ a $V \to V$ **lineáris transzformációk vektortere**
$\mathrm{id}_V \rightsquigarrow$ a V vektortér **identikus lineáris transzformációja**, $\mathrm{id}_V \colon V \to V,\ v \mapsto v$
$O_V \rightsquigarrow$ a V vektortér **zérus lineáris transzformációja**, $\mathrm{id}_V \colon V \to V,\ v \mapsto \mathbf{0}_V$
$\mathrm{Im}(\varphi) \rightsquigarrow$ az φ lineáris leképezés **képtere**
$\mathrm{Ker}(\varphi) \rightsquigarrow$ az φ lineáris leképezés **megtere**

Nemlineáris algebra

Tartalomjegyzék

1. Fejezet

Determinánsok

Determináns és kifejtése, a ferde kifejtés tétele. A determinánselméleti dualitási elv. A determinánsok szorzástétele, mátrixok inverze. Cramer-szabály

1.1. A determináns

Legyen $\mathbb{K}$ test, n természetes szám és $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Az A mátrix **determinánsát** az alábbi módon definiáljuk:

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1,1\pi} \dots a_{n,n\pi}.$$

Az A mátrix determinánsát $\det(A)$ vagy $|A|$ jelöli. Az n természetes számot a $\det(A)$ **determináns rendjének** nevezzük.

Legyenek $a_{i,j}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ tetszőleges $\mathbb{K}$-beli elemek, ekkor ezen elemek determinánsán az ezen elemekből képzett $A = (a_{i,j})_{n\times n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix determinánsát értjük, jelölése:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

1.1. Példa. *Legyen $\mathbb{K}$ test és $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant 3)$.*

(a) *Legyen $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \end{pmatrix}$. Ekkor $|A| = \sum_{\pi\in S_1} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1,1\pi} = a_{1,1}$.*

(b) *Legyen $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$. Ekkor*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = \sum_{\pi\in S_2} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1,1\pi}a_{2,2\pi} = (+1)\cdot a_{1,1}a_{2,2} + (-1)\cdot a_{1,2}a_{2,1},$$

azaz a főátlóban álló elemek szorzatából ki kell vonni a mellékátlóban álló elemek szorzatát.

(c) *Legyen $A = (a_{i,j})_{3\times 3}$. Ekkor*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{\pi\in S_3} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1,1\pi}a_{2,2\pi}a_{3,3\pi} \\ &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}. \end{aligned}$$

A determináns definíciójának négy egyszerű következményét fogalmazzuk meg az alábbiakban.

1.2. Következmény. *Legyen A négyzetes mátrix a $\mathbb{K}$ test felett. Ha az A mátrix*

(a) *valamely sorának minden eleme 0, akkor determinánsa 0,*

(b) *két sora megegyezik, akkor determinánsa 0,*

(c) *trianguláris, akkor determinánsa a főátlóbeli elemek szorzatával egyezik meg.*

(d) *Ha* $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ *és valamely* $i_0 \in \{1,\dots,n\}$ *indexre* $a_{i_0,j} = a'_{i_0,j} + a''_{i_0,j}$ *teljesül minden* j*-re* $(1 \leqslant j \leqslant n)$, *akkor*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_0-1,1} & \cdots & a_{i_0-1,n} \\ a'_{i_0,1} & \cdots & a'_{i_0,n} \\ a_{i_0+1,1} & \cdots & a_{i_0+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_0-1,1} & \cdots & a_{i_0-1,n} \\ a''_{i_0,1} & \cdots & a''_{i_0,n} \\ a_{i_0+1,1} & \cdots & a_{i_0+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Bizonyítás. Legyen $A = (a_{i,j})_{n\times n}$.

(a) Tegyük fel, hogy az A mátrix valamely sorának minden eleme 0. Ekkor

$$\det(A) = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot a_{1,1\pi}\cdots a_{n,n\pi} = 0,$$

mivel tetszőleges $\pi \in S_n$ permutációra az $a_{1,1\pi}\cdots a_{n,n\pi}$ szorzat 0.

(b) Tegyük fel, hogy az A mátrix i-edik és j-edik sora megegyezik $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$. Ekkor

$$\det(A) = \sum_{\pi\in S_n}\left(\operatorname{sgn}(\pi)\cdot\prod_{k=1}^{n} a_{k,k\pi}\right) = \sum_{\pi\in A_n}\left(\operatorname{sgn}(\pi)\cdot\prod_{k=1}^{n} a_{k,k\pi}\right) + \sum_{\pi\in A_n}\left(\operatorname{sgn}((i\ j)\pi)\cdot\prod_{k=1}^{n} a_{k,k((i\ j)\circ\pi)}\right) = 0,$$

mivel $S_n = A_n \cup \{(i\ j)\circ\pi \mid \pi\in A_n\}$.

(c) Gondoljuk meg, hogy ha $\pi \in S_n$ nem az identikus transzformáció, akkor az $a_{1,1\pi}\cdots a_{n,n\pi}$ szorzat 0, mivel valamelyik tényezője 0. Így

$$\det(A) = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot a_{1,1\pi}\cdots a_{n,n\pi} = a_{1,1}\cdots a_{n,n}.$$

teljesül.

(d)

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot a_{1,1\pi}\cdots a_{i_0-1,(i_0-1)\pi}\cdot a_{i_0,i_0\pi}\cdot a_{i_0+1,(i_0+1)\pi}a_{n,n\pi} \\
&= \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot a_{1,1\pi}\cdots a_{i_0-1,(i_0-1)\pi}\cdot (a'_{i_0,i_0\pi} + a''_{i_0,i_0\pi})\cdot a_{i_0+1,(i_0+1)\pi}a_{n,n\pi} \\
&= \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot a_{1,1\pi}\cdots a_{i_0-1,(i_0-1)\pi}\cdot a'_{i_0,i_0\pi}\cdot a_{i_0+1,(i_0+1)\pi}a_{n,n\pi} \\
&+ \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot a_{1,1\pi}\cdots a_{i_0-1,(i_0-1)\pi}\cdot a''_{i_0,i_0\pi}\cdot a_{i_0+1,(i_0+1)\pi}a_{n,n\pi} \\
&= \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_0-1,1} & \cdots & a_{i_0-1,n} \\ a'_{i_0,1} & \cdots & a'_{i_0,n} \\ a_{i_0+1,1} & \cdots & a_{i_0+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_0-1,1} & \cdots & a_{i_0-1,n} \\ a''_{i_0,1} & \cdots & a''_{i_0,n} \\ a_{i_0+1,1} & \cdots & a_{i_0+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Ezzel az állításban foglaltakat igazoltuk. □

1.3. Tétel. *Legyen* A *tetszőleges négyzetes mátrix a* $\mathbb{K}$ *test felett. Ekkor*

$$\det(A^{\mathsf{T}}) = \det(A). \tag{1}$$

Bizonyítás. Legyen $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ és $b_{i,j} = a_{j,i}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\det(A^{\mathsf{T}}) &= \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot b_{1,1\pi}\cdots b_{n,n\pi} = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot a_{1\pi,1}\cdots a_{n\pi,n} \\
&= \sum_{\pi^{-1}\in S_n} \operatorname{sgn}\left(\pi^{-1}\right)\cdot a_{1,1\pi^{-1}}\cdots a_{n,n\pi^{-1}} = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot a_{1\pi,1}\cdots a_{n\pi,n} = \det(A).
\end{aligned}$$

Ezzel az állítást igazoltuk. □

1.4. Tétel (Determinánselméleti dualitási elv)**.** *Ha egy determinánsokra vonatkozó igaz állításban a „sor” és az „oszlop” szavakat felcseréljük, akkor egy igaz állítást kapunk.*

1.2. Elemi átalakítások

A determinánsok bizonyos átalakításai jól átlátható módon változtatják meg a determináns értékét, ezek — amint majd látni fogjuk — komoly szerepet kapnak a továbbiakban.

Legyenek $a_{i,j}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ tetszőleges $\mathbb{K}$ testbeli elemek, és legyen $D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$. A D determináns **elemi átalakításai** a következők:

- két sor [oszlop] cseréje,
- egy sor [oszlop] szorzása valamely $(\mathbb{K} \setminus \{0\})$-beli elemmel,
- egy sorhoz [oszlophoz] hozzáadjuk valamely sor [oszlop] $\mathbb{K}$-beli elemszeresét.

Az elemi átalakítások tulajdonságait az alábbi állításban foglaljuk össze. Az állításokat csak sorokra mondjuk ki és igazoljuk, de a dualitási elv szerint oszlopokra is igazak.

Legyen A tetszőleges $\mathbb{K}$ test feletti $(n \times n)$-es mátrix $(n \in \mathbb{N})$. Definiáljuk az alábbi mátrixokat:

- $A_{i \leftrightarrow j}$ az A mátrix i-edik és j-edik sorainak felcserélésével kapott mátrix $(1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$,
- $A_{\alpha \times i}$ az A mátrix i-edik sorának $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ elemmel való szorzásával kapott mátrix $(1 \leqslant i \leqslant n)$,
- $A_{j+\beta \times i}$ az a mátrix, amely úgy keletkezik, hogy az A mátrix j-edik sorához hozzáadjuk i-edik sorának β-szorosát $(\beta \in \mathbb{K},\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$.

1.5. Állítás. *Legyen $\mathbb{K}$ test, $n \in \mathbb{N}$ és $A = (a_{i,j})_{n \times n} \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Ekkor igazak az alábbiak:*

(a) $\det(A_{i \leftrightarrow j}) = -\det(A) \quad (1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$*;*

(b) $\det(A_{\alpha \times i}) = \alpha \cdot \det(A) \quad (1 \leqslant i \leqslant n,\ \alpha \in \mathbb{K})$*;*

(c) $\det(A_{j+\beta \times i}) = \det(A) \quad (1 \leqslant i \neq j \leqslant n,\ \beta \in \mathbb{K})$.

Bizonyítás. (a) Legyen $a'_{i,\nu} = a_{j,\nu}$, $a'_{j,\nu} = a_{i,\nu}$ $(1 \leqslant \nu \leqslant n)$ és $a'_{u,\nu} = a_{u,\nu}$ $(1 \leqslant u,\nu \leqslant n,\ u \neq i,j)$, valamint legyen $\gamma = (i\,j)$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\det(A_{i \leftrightarrow j}) &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a'_{1,1\pi} \cdots a'_{i,i\pi} \cdots a'_{j,j\pi} \cdots a'_{n,n\pi} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1,1\pi} \cdots a_{j,i\pi} \cdots a_{i,j\pi} \cdots a_{n,n\pi} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1,1\pi} \cdots a_{i,j\pi} \cdots a_{j,i\pi} \cdots a_{n,n\pi} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\gamma\pi) \cdot a_{1,1\gamma\pi} \cdots a_{i,j\gamma\pi} \cdots a_{j,i\gamma\pi} \cdots a_{n,n\gamma\pi} \\
&= -\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1,1\pi} \cdots a_{i,i\pi} \cdots a_{j,j\pi} \cdots a_{n,n\pi} \\
&= -\det(A).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\det(A_{\alpha \times i}) &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1,1\pi} \cdots a_{i-1,(i-1)\pi} \cdot \alpha a_{i,i\pi} \cdot a_{i+1,(i+1)\pi} \cdots a_{n,n\pi} \\
&= \alpha \cdot \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1,1\pi} \cdots a_{i-1,(i-1)\pi} \cdot a_{i,i\pi} \cdot a_{i+1,(i+1)\pi} \cdots a_{n,n\pi} \\
&= \alpha \cdot \det(A).
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\det(A_{j+\beta\times i}) &= \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot a_{1,1\pi}\cdots(a_{j,j\pi}+\beta a_{i,j\pi})\cdots a_{n,n\pi}\\
&= \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot a_{1,1\pi}\cdots a_{i,i\pi}\cdots a_{j,j\pi}\cdots a_{n,n\pi} + \beta\sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot a_{1,1\pi}\cdots a_{i,i\pi}\cdots a_{i,j\pi}\cdots a_{n,n\pi}\\
&= \det(A)+\beta\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots\\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n}\\ \vdots & & \vdots\end{vmatrix}}_{0}\\
&= \det(A).
\end{aligned}$$

□

1.6. Tétel (Kifejtési tétel). *Legyen* $\mathbb{K}$ *test,* n *természetes szám és* $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$. *Ekkor tetszőleges* $r,c\in\{1,2,\dots,n\}$ *természetes számokra teljesül, hogy*

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{r,j}(-1)^{r+j}D_{r,j}=\sum_{j=1}^{n} a_{r,j}A_{r,j}\quad (\textit{az } r\textit{-edik sor szerinti kifejtés}),$$
$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{i,c}(-1)^{i+c}D_{i,c}=\sum_{i=1}^{n} a_{i,c}A_{i,c}\quad (\textit{a } c\textit{-edik oszlop szerinti kifejtés}).$$

Bizonyítás. Legyen $A=(a_{i,j})_{n\times n}$ és $r\in\{1,2,\dots,n\}$. Ekkor az 1.2 Következmény (d) részét többször alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{r,1} & \dots & a_{r,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n}\end{vmatrix}
&= \sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{r-1,1} & \dots & a_{r-1,j-1} & a_{r-1,j} & a_{r-1,j+1} & \dots & a_{r-1,n}\\ 0 & \dots & 0 & a_{r,j} & 0 & \dots & 0\\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,j-1} & a_{r+1,j} & a_{r+1,j+1} & \dots & a_{r+1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n}\end{vmatrix}\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{(i-1)+(j-1)}\begin{vmatrix} a_{r,j} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ a_{1,j} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{r-1,j} & \dots & a_{r-1,j-1} & a_{r-1,j+1} & \dots & a_{r-1,n}\\ a_{r+1,j} & \dots & a_{r+1,j-1} & a_{r+1,j+1} & \dots & a_{r+1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,j} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n}\end{vmatrix}\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{r,j}D_{r,j}.
\end{aligned}$$

Oszlop szerinti kifejtésre az állítás hasonlóan bizonyítható. □

1.7. Tétel (A ferde kifejtés tétele). *Legyen* $\mathbb{K}$ *test,* n *természetes szám és* $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$. *Ekkor tetszőleges* $r,r',c,c'\in\{1,2,\dots,n\}$ $(r\neq r',\ c\neq c')$ *természetes számokra teljesül, hogy*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{r,j}A_{r',j}=0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,c}A_{i,c'}=0.$$

1.8. Tétel (A determinánsok szorzástétele)**.** *Legyen* $\mathbb{K}$ *test,* n *természetes szám és* $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$*. Ekkor*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

1. Bizonyítás. Legyen $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ és $B = (b_{i,j})_{n\times n}$. Ekkor $A \cdot B = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right)_{n\times n}$ következtében

$$\begin{aligned}\det(A \cdot B) &= \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k_i=1}^{n} a_{i,k_i} b_{k_i,i\pi} \right)\\ &= \sum_{k_1=1}^{n} \dots \sum_{k_n=1}^{n} a_{1,k_1} \dots a_{n,k_n} \cdot d_{k_1,\dots,k_n},\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}d_{k_1,\dots,k_n} &= \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot b_{k_1,1\pi} \dots b_{k_n,n\pi}\\ &= \begin{vmatrix} b_{k_1,1} & \dots & b_{k_1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k_n,1} & \dots & b_{k_n,n} \end{vmatrix}\\ &= \begin{cases} 0, & \text{ha } |\{k_1,\dots,k_n\}| < n, \\ \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix} \cdot |B|, & \text{ha } |\{k_1,\dots,k_n\}| = n. \end{cases}\end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned}\det(A \cdot B) &= \sum_{k_1=1}^{n} \dots \sum_{k_n=1}^{n} a_{1,k_1} \dots a_{n,k_n} \cdot d_{k_1,\dots,k_n}\\ &= \sum_{k_1=1}^{n} \dots \sum_{k_n=1}^{n} a_{1,k_1} \dots a_{n,k_n} \cdot \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix} \cdot |B|\\ &= \left(\sum_{k_1=1}^{n} \dots \sum_{k_n=1}^{n} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix} \cdot a_{1,k_1} \dots a_{n,k_n} \right) \cdot |B|\\ &= \left(\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,1\sigma} \dots a_{n,n\sigma} \right) \cdot |B|\\ &= \det(A) \cdot \det(B).\end{aligned}$$

Ezzel az állítást igazoltuk. □

2. Bizonyítás. Tekintsük az alábbi $(2n \times 2n)$-es M mátrixot:

$$M = \begin{pmatrix} A & 0_{n\times n} \\ -E_n & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \dots & 0 & b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Ekkor $\det(M) = \det(A) \cdot \det(B)$. Alakítsuk át a $\det(M)$ determinánst:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \dots & 0 & b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \sum_{j=1}^n a_{1,j}b_{j,1} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{1,j}b_{j,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sum_{j=1}^n a_{n,j}b_{j,1} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{n,j}b_{j,n} \\ -1 & \dots & 0 & b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \sum_{j=1}^n a_{1,j}b_{j,1} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{1,j}b_{j,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sum_{j=1}^n a_{n,j}b_{j,1} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{n,j}b_{j,n} \\ -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \cdot B & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & E_n \end{vmatrix}$$

$$= \det(A \cdot B).$$

□

1.9. Tétel. *Legyen* $\mathbb{K}$ *test,* n *természetes szám és* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$*. Ekkor az* A *mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha* $\det(A) \neq 0$*. Ha* A*-nak van inverze, akkor*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}^T.$$

Az $\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$ mátrixot az A mátrix **adjungált mártixának** nevezzük (jel.: $\mathrm{Adj}(A)$).

1.3. Cramer-szabály

Legyen $\mathbb{K}$ test és $a_{i,j}, b_i \in K$ ($m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$). Az

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{cases} \tag{2}$$

egyenletrendszert **szabályosnak** nevezzük, ha $m = n$ és az egyenletrendszer mátrixának determinánsa nem 0.

1.10. Tétel (Cramer-szabály)**.** *Ha* (2) *szabályos egyenletrendszer, akkor pontosan egy megoldása van:*

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j-1} & b_m & a_{m,j+1} & \cdots & a_{m,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{vmatrix}} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az (2) egyenletrendszer szabályos. Legyen az egyenletrendszer mátrixa A, a konstansokat tartalmazó vektor $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$ és $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$. Mivel $\det(A) \neq 0$, ezért az egyenletrendszer mátrixa invertálható, így $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ az egyetlen megoldás. Továbbá, az 1.9 Tétel felhasználásával adódik, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\
&= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}^{T} \mathbf{b} \\
&= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{1,1}b_1 + \cdots + A_{n,1}b_n \\ \vdots \\ A_{1,n}b_1 + \cdots + A_{n,n}b_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (A_{1,1}b_1 + \cdots + A_{n,1}b_n)/\det(A) \\ \vdots \\ (A_{1,n}b_1 + \cdots + A_{n,n}b_n)/\det(A) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Az

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j-1} & b_m & a_{m,j+1} & \cdots & a_{m,n} \end{vmatrix} = A_{1,j}b_1 + \cdots + A_{n,j}b_n$$

egyenlőség a determináns j-edik oszlopa szerinti kifejtésével adódik ($1 \leqslant j \leqslant n$). □

1.4. Feladatok

1.4.1. Feladat. *Bizonyítandó, hogy*

(a) $$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

(b) $$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i).$$

1.4.2. Feladat. *Tetszőleges* m *természetes számra és* $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *valós függvényre legyen* $A_{f,m} = (f(i,j))_{m\times m}$. *Számítsa ki az* $A_{f,m}$ *mátrix determinánsának az értékét:*

(a) $m\in\mathbb{N}$ *és* $f(i,j) = \begin{cases} \binom{i+j-2}{j-1}, & \text{ha } i,j\in\mathbb{N}, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$

(b) $n,k\in\mathbb{N}_0$, $m\in\mathbb{N}$ *és* $f(i,j) = \begin{cases} \binom{n+i+j-2}{k+j-1}, & \text{ha } i,j\in\mathbb{N}, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$

(c) $b_k\in\mathbb{R}$ $(k\in\mathbb{N}_0)$, $m = n+1\in\mathbb{N}$ *és* $f(i,j) = \begin{cases} 1-b_{i-1}, & \text{ha } i=j\in\mathbb{N}, \\ b_i, & \text{ha } i,j\in\mathbb{N},\ i-j=-1, \\ -1, & \text{ha } i,j\in\mathbb{N},\ i-j=1, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$

(d) $a,x\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{N}$ *és* $f(i,j) = \begin{cases} x, & \text{ha } i=j\in\mathbb{N}, \\ a, & \text{különben,} \end{cases}$

(e) $a_k\in\mathbb{R}$ $(k\in\mathbb{N}_0)$, $m = n+1\in\mathbb{N}$ *és* $f(i,j) = \begin{cases} a_{i-1}+b_{i-1}, & \text{ha } i=j\in\mathbb{N}, \\ a_{j-1}, & \text{ha } i,j\in\mathbb{N},\ i\neq j, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$

(f) $m\in\mathbb{N}$ *és* $f(i,j) = \begin{cases} \text{ln.k.o.}(i,j), & \text{ha } i,j\in\mathbb{N}, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$ (g) $m\in\mathbb{N}$ *és* $f(i,j) = \begin{cases} \text{lk.k.t.}(i,j), & \text{ha } i,j\in\mathbb{N}, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$

1.4.3. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi determinánsok négyzetét:*

(a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix},$$ (b) $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

1.4.4. Feladat. *Számítsuk ki a következő determinánsok értékét:*

(a) $$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix},$$ (b) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix},$$

(c) $$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

1.4.5. Feladat. *Az* $a,b\in\mathbb{R}$ *paraméterek mely értékei esetén van megoldása az alábbi lineáris egyenletrendszernek?*

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 4, \\ x & + & by & + & z & = & 3, \\ x & + & 2by & + & z & = & 4. \end{array}$$

Határozza meg a megoldásokat.

1.4.6. Feladat. *Mi annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy egy egész számokból álló mátrix inverze is egész számokból álljon?*

1.4.7. Feladat. *Oldjuk meg a következő mátrixegyenleteket:*

(a) $X\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

(b) $X\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1\end{pmatrix} X \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0\\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2\end{pmatrix}$.

1.4.8. Feladat. *Határozza meg az 5. ábrán (75. old.) látható bűvösnégyzetek „determinánsát”.*

1.4.9. Feladat. *Legyenek* $a_{i,j}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant 2n)$ *valós számok* $(n \in \mathbb{N})$*, valamint legyen*

$$A_{1,1}=\begin{pmatrix}a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}, \qquad A_{1,2}=\begin{pmatrix}a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,n+n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,n+1} & \cdots & a_{n,n+n}\end{pmatrix},$$

$$A_{2,1}=\begin{pmatrix}a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n+n,1} & \cdots & a_{n+n,n}\end{pmatrix}, \qquad A_{1,2}=\begin{pmatrix}a_{n+1,n+1} & \cdots & a_{n+1,n+n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n+n,n+1} & \cdots & a_{n+n,n+n}\end{pmatrix}$$

és $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2n}$. *Igazak-e az alábbiak:*

(a) $\det(A)=\det(A_{1,1})\det(A_{2,2})-\det(A_{1,2})\det(A_{2,1})$;

(b) $\det(A)=\det(A_{1,1}A_{2,2}-A_{1,2}A_{2,1})$;

(c) $\det\begin{pmatrix}a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,n+n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & a_{n,n+1} & \cdots & a_{n,n+n}\\ & E_n & & & E_n & \end{pmatrix}=\det(A_{1,1}-A_{1,2})$;

(d) *ha* $A_{2,2}$ *invertálható, akkor* $\det(A)=\det(A_{1,1}A_{2,2}-A_{1,2}A_{2,2}^{-1}A_{2,1}A_{2,2})$?

Legyenek m és n természetes számok úgy, hogy $m \leqslant n-1$, valamint $\alpha_{-m},\dots,\alpha_{-1},\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m$ a K test elemei. Jelölje $\mathrm{Band}_n(\alpha_{-m},\dots,\alpha_{-1},\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ azt az $(n\times n)$-es $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (K test feletti) mátrixot, amelyre

$$a_{i,j}=\begin{cases}\alpha_k, & \text{ha } i-j=k,\\ 0, & \text{különben.}\end{cases}$$

1.4.10. Feladat. *Legyen* $\mathbb{K}$ *test,* $a,b\in\mathbb{K}$ *és* $n\in\mathbb{N}$*. Határozza meg az alábbi mátrixok determinánsát:*

(a) $\mathrm{Band}_n(1,2,1)$; (b) $\mathrm{Band}_n(1,a+1,1)$; (c) $\mathrm{Band}_n(1,a+b,ab)$;

(d) $\mathrm{Band}_n(1,\dots,1,2,1,\dots,1)$; (e) $\mathrm{Band}_n(1,\dots,1,a+1,1,\dots,1)$.

1.4.11. Feladat. *Legyen* $U_0=1$ *és* $U_n=\det(\mathrm{Band}_n(1,2x,1))\in\mathbb{R}[x]$ $(n\in\mathbb{N})$*. Bizonyítsa be a következőket:*

(a) *ha* $n\geqslant 2$ *egész szám, akkor* $U_n=2xU_{n-1}-U_{n-2}$;

(b) $U_n(1)=n+1$ $(n\in\mathbb{N}_0)$;

(c) $U_n(\cos\varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$ $(n \in \mathbb{N}_0,\ 0 < \varphi < \pi)$.

(Az U_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ polinomok a **másodfajú Csebisev-polinomok***.)*

1.4.12. Feladat. *Legyenek A és B a $\mathbb{K}$ test feletti $(n \times n)$-es mátrixok $(n \in \mathbb{N})$. Igazolja az alábbiakat:*

(a) $\mathrm{Adj}(A \cdot B) = \mathrm{Adj}(A) \cdot \mathrm{Adj}(B)$;

(b) $\mathrm{Adj}(\mathrm{Adj}(A)) = |A|^{n-2} \cdot A$.

1.4.13. Feladat. *Legyen* $A_n = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{n\times n} \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$. *Mutassa meg, hogy* $A_n^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$.

1.4.14. Feladat. *Legyenek A és B olyan $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli mátrixok, amelyek hasonlóak $\mathbb{C}^{n\times n}$-ben. Mutassa meg, hogy $\mathbb{R}^{n\times n}$-ben is hasonlóak.*

1.4.15. Feladat. *Legyen* $A_n = (i^j)_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$. *Határozza meg az A_n mátrix determinánsát.*

1.4.16. Feladat. *Legyen* $A_n = \left((-1)^{[i/j]}\right)_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$, *ahol $[x]$ az x valós szám egészrészét jelöli. Határozza meg az A_n mátrix determinánsát.*

1.4.17. Feladat. *Legyen* $A_n = \left((-1)^{[\mathrm{tg}(i/j)]}\right)_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$. *Határozza meg az A_n mátrix determinánsát.*

1.4.18. Feladat. *Legyen* $A_n = (\sigma(\mathrm{ln.k.o.}(i,j)))_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$, *ahol* $\sigma(m) = \sum_{d|m} d$. *Határozza meg az A_n mátrix determinánsát.*

1.4.19. Feladat. *Legyen* $A_n = (\sigma_2(\mathrm{ln.k.o.}(i,j)))_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$, *ahol* $\sigma_2(m) = \sum_{d|m} d^2$. *Határozza meg az A_n mátrix determinánsát.*

1.4.20. Feladat. *Legyen* $A_n = \left(\binom{n+i}{n-j}\right)_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$. *Határozza meg az A_n mátrix determinánsát.*

1.4.21. Feladat. *Legyen* $A_n = \left(\binom{2i}{n-j}\right)_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$. *Határozza meg az A_n mátrix determinánsát.*

1.4.22. Feladat. *Legyen* $A_n = (\mathrm{ln.k.o.}(n+i, n-j))_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$. *Határozza meg az A_n mátrix determinánsát.*

1.4.23. Feladat. *Legyen* $A_n = (\varphi(ij))_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$, *ahol φ az Euler-féle függvény. Határozza meg az A_n mátrix determinánsát.*

1.4.24. Feladat. *Legyen* $A_n = (\mu(ij))_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$, *ahol μ az Möbius-féle függvény. Határozza meg az A_n mátrix determinánsát.*

1.4.25. Feladat. *Legyen* $A_n = (|i-j|)_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$. *Határozza meg az A_n mátrix determinánsát.*

1.4.26. Feladat. *Legyen* $A_n = ((i-j)^2)_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$. *Határozza meg az A_n mátrix determinánsát.*

2. FEJEZET

VEKTORTEREK

Vektortér, altér, alterek metszete és összege. Alterek direkt összege. Lineáris kombináció, generátorrendszer. Lineárisan függő és független vektorrendszerek, kicserélési tétel, bázis, dimenzió. Vektor koordinátái adott bázisban. Vektorrendszer rangja. Alterekre vonatkozó dimenziótétel.

2.1. A vektorterek definíciója

Legyen $\mathbb{K} = (\mathbb{K}; +, \cdot)$ test és V nemüres halmaz. Legyen $\oplus\colon V \times V \to V$ kétváltozós, valamint legyenek $\lambda\odot\colon V \to V$ egyváltozós műveletek ($\lambda \in \mathbb{K}$). A $\mathbf{V} = (V; \oplus, \lambda\cdot\ (\lambda \in \mathbb{K}))$ algebrai struktúra **vektortér** a $\mathbb{K}$ test felett, ha az alábbiak teljesülnek:

(V_1) a $\oplus$ művelet asszociatív,

(V_2) a $\oplus$ művelet kommutatív,

(V_3) van olyan $\mathbf{0} \in V$ elem, amelyre $v \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0} \oplus v = v$ teljesül tetszőleges $v \in V$ esetén,

(V_4) tetszőleges $v \in V$ esetén van olyan $w \in V$, hogy $v \oplus w = w \oplus v = \mathbf{0}$,

továbbá tetszőleges $v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ elemekre érvényesek, hogy

(V_5) $\lambda \odot (v \oplus w) = \lambda \odot v \oplus \lambda \odot w$,

(V_6) $(\lambda + \mu) \odot v = \lambda \odot v \oplus \mu \odot v$,

(V_7) $(\lambda \cdot \mu) \odot v = \lambda \odot (\mu \odot v)$,

(V_8) $1 \cdot v = v$, ahol 1 a $\mathbb{K}$ test egységeleme.

Legyen V vektortér a $\mathbb{K}$ test felett. A V halmaz elemeit **vektoroknak** a $\mathbb{K}$ test elemeit pedig **skalároknak** nevezzük. Megjegyzésre érdemes, hogy a (V_1)-(V_4) tulajdonságok éppen azt mondják, hogy a $(V; \oplus)$ algebrai struktúra Abel-csoport, melynek egységeleme $\mathbf{0}$. Ebből azonnal adódnak a következők.

2.1. Állítás. *Legyen* $\mathbf{V}$ *vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett.*

(a) *A* (V_3) *pontban definiált* $\mathbf{0}$ *vektor egyértelmű; a* $\mathbf{0}$ *vektort a* $\mathbf{V}$ *vektortér* **zérusvektorának** *nevezzük.*

(b) *Tetszőleges* $v \in V$ *vektor esetén a* (V_4) *pontbeli* $w \in V$ *vektor egyértelmű; a* w *vektor* v **ellentett vektora**, *melyet a továbbiakban* $-v$*-vel jelölünk.*

2.2. Példa. *Az alábbi struktúrák vektorterek:*

- *Tetszőleges* $\mathbb{K} = (\mathbb{K}; +, \cdot)$ *test és* n *természetes szám esetén* $(\mathbb{K}^n; \oplus, \lambda\odot\ (\lambda \in \mathbb{K}))$, *ahol*

$$(a_1, \ldots, a_n) \oplus (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),$$
$$\lambda \odot (a_1, \ldots, a_n) = (\lambda \cdot a_1, \ldots, \lambda \cdot a_n).$$

- *Tetszőleges* $\mathbb{K} = (\mathbb{K}; +, \cdot)$ *test és* n *természetes szám esetén* $(\mathbb{K}^{n\times n}; \oplus, \lambda\odot\ (\lambda \in \mathbb{K}))$, *ahol*

$$(a_{i,j})_{n\times n} \oplus (b_{i,j})_{n\times n} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{n\times n},$$
$$\lambda \odot (a_{i,j})_{n\times n} = (\lambda \cdot a_{i,j})_{n\times n}.$$

- *Tetszőleges* $\mathbb{K} = (\mathbb{K}; +, \cdot)$ *test esetén* $(\mathbb{K}[x]; +, \lambda\cdot\ (\lambda \in \mathbb{K}))$, *ahol*

$$p \oplus q = p + q,$$
$$\lambda \odot p = \lambda p.$$

- $(C(\mathbb{R}); \oplus, \lambda\odot\ (\lambda \in \mathbb{R}))$, *ahol* $C(\mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ *mindenütt folytonos* $\}$ *és*

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)\ (x \in \mathbb{R}),$$
$$(\lambda \odot f)(x) = \lambda f(x)\ (x \in \mathbb{R}).$$

2.2. Alterek

Legyen $\mathbf{V} = (V;+,\lambda\cdot\ (\lambda\in\mathbb{K}))$ vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, $U\subseteq V$. Azt mondjuk, hogy U **altere** $\mathbf{V}$-nek, ha a $+$ kétváltozós és a $\lambda\cdot\ (\lambda\in\mathbb{K})$ egyváltozós műveletek megszoríthatók U-ra, valamint $(U;+|_U,\lambda\cdot|_U\ (\lambda\in\mathbb{K}))$ vektortér $\mathbb{K}$ felett (jel.: $U\leqslant\mathbf{V}$).

2.3. Állítás. *Legyen $\mathbf{V}$ vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, $U\subseteq V$. Ekkor U pontosan akkor altere a $\mathbf{V}$ vektortérnek, ha*

(a) $\mathbf{0}\in U$,

(b) *U zárt $+$-ra, azaz valahányszor $u,u'\in U$, mindannyiszor $u+u'\in U$,*

(c) *U zárt a $\mathbb{K}$-beli skalárokkal való szorzásra, azaz valahányszor $u\in U$ és $\lambda\in\mathbb{K}$, mindannyiszor $\lambda\cdot u\in U$.*

Legyen $\mathbf{V}$ vektrotér a $\mathbb{K}$ test felett és $U,U'\leqslant\mathbf{V}$. Ekkor az U és U' **alterek komplexus összegének** nevezzük és $U+U'$-vel jelöljük az

$$\{u+u'\mid u\in U,\ u'\in U'\}$$

halmazt. Azt mondjuk, hogy $U+U'$ az U és U' **alterek direkt összege**, ha minden $(U+U')$-beli vektor egyértelműen áll elő $u+u'$ alakban, ahol $u\in U$ és $u'\in U'$. Jelölése: $U+U'=U\oplus U'$.

2.4. Állítás. *Legyen $\mathbf{V}$ vektortér a $\mathbb{K}$ test felett és $U,U'\leqslant\mathbf{V}$. Ekkor $U\cap U'$ és $U+U'$ is altere $\mathbf{V}$-nek.*

2.5. Állítás. *Legyen $\mathbf{V}$ vektortér a $\mathbb{K}$ test felett és $U,U'\leqslant\mathbf{V}$. Ekkor V pontosan akkor direkt összege az U és U' altereknek, ha $U+U'=V$ és $U\cap U'=\{\mathbf{0}\}$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $V=U\oplus U'$. Ekkor minden $V=U\oplus U'=U+U'$. Legyen $v\in U\cap U'$. Ekkor $v\in U,U',V$ következtében $v=v+\mathbf{0}=\mathbf{0}+v$, ami maga után vonja, hogy $v=\mathbf{0}$. Azaz $U\cap U'=\{\mathbf{0}\}$.

Tegyük fel, hogy $U+U'=V$ és $U\cap U'=\{\mathbf{0}\}$ teljesül az U és U' alterekre. Ekkor minden V-beli v vektor felírható $v=u+u'$ alakban, ahol $u\in U$ és $u'\in U'$. Tegyük fel, hogy $v=u_1+u_1'=u_2+u_2'$, ahol $u_1,u_2\in U$ és $u_1',u_2'\in U'$. Ebben az esetben azt kapjuk, hogy $u_1-u_2=u_2'-u_1'\in U\cap U'=\{\mathbf{0}\}$, aminek következtében $u_1=u_2$ és $u_1'=u_2'$. Így minden V-beli vektor egyértelműen áll elő $u+u'$ alakban, ahol $u\in U$ és $u'\in U'$, ezért $V=U\oplus U'$. □

2.6. Állítás. *Legyen $\mathbf{V}$ vektortér a $\mathbb{K}$ test felett és $U_1,\dots,U_k\leqslant\mathbf{V}$ $(k\in\mathbb{N},\ k\geqslant 2)$. Ekkor V pontosan akkor direkt összege az $U_1,\dots,U_k$ altereknek, ha*

- $V=U_1+\cdots+U_k$,
- $U_j\cap(U_1+\cdots+U_{j-1})=\{\mathbf{0}\}$ *teljesül minden j-re $(2\leqslant j\leqslant k)$.*

Legyen $\mathbf{V}=(V;+,\lambda\cdot\ (\lambda\in\mathbb{K}))$ vektortér a $\mathbb{K}$ test felett. A $v_1,\dots,v_n\in V$ vektorok $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in K$ $(n\in\mathbb{N})$ skalárokkal vett **lineáris kombinációjának** nevezzük a

$$\lambda_1\cdot v_1+\cdots+\lambda_n\cdot v_n\in V$$

vektort. A $\lambda_1\cdot v_1+\cdots+\lambda_n\cdot v_n$ lineáris kombináció **triviális**, ha $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$. A triviális lineáris kombináció a zérusvektorral egyenlő.

2.7. Állítás. *Legyen $\mathbf{V}=(V;+,\lambda\cdot\ (\lambda\in\mathbb{K}))$ vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, $v_1,\dots,v_n\in V$. Ekkor a*

$$\{\lambda_1\cdot v_1+\cdots+\lambda_n\cdot v_n\mid\lambda_1,\dots,\lambda_n\in K\}\tag{3}$$

részhalmaz altér $\mathbf{V}$-ben.

Az (3) alteret a $v_1,\dots,v_n$ vektorok által **generált altérnek** nevezzük (jel.: $[v_1,\dots,v_n]$). A $v_1,\dots,v_n$ vektorrendszer **generátorrendszer**, ha $[v_1,\dots,v_n]=V$.

Legyenek a $v_1,\dots,v_n$ vektorok a $\mathbf{V}$ vektorrendszer tetszőleges vektorai. Azt mondjuk, hogy a $v_1,\dots,v_n$ vektorrendszer **lineárisan független**, ha valahányszor $\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_nv_n=\mathbf{0}$, mindannyiszor $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$. Azaz, a $v_1,\cdots,v_n$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő a zérusvektort. A $v_1,\dots,v_n$ vektorrendszer **lineárisan függő**, ha nem lineárisan független, azaz vannak olyan $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ skalárok, amelyek nem mindegyike 0 és $\lambda_1\cdot v_1+\cdots+\lambda_n\cdot v_n=\mathbf{0}$.

2.8. Állítás. *Legyen $\mathbf{V}$ vektortér a $\mathbb{K}$ test felett és $v_1,\dots,v_n\in V$ $(n\in\mathbb{N})$.*

(a) *Ha $\mathbf{0}\in\{v_1,\dots,v_n\}$, akkor a $v_1,\dots,v_n$ vektorrendszer lineárisan függő.*

(b) *Ha $v_i=v_j$ teljesül valamely i-re és j-re $(1\leqslant i<j\leqslant n)$, akkor a $v_1,\dots,v_n$ vektorrendszer lineárisan függő.*

(c) *Ha a* $v_1, \dots, v_n$ *vektorrendszer lineárisan független és* $I \subseteq \{1, \dots, n\}$*, akkor a* v_i $(i \in I)$ *vektorrendszer is lineárisan független.*

2.9. Tétel (Kicserélési tétel)**.** *Legyen* $\mathbf{V}$ *vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett,* $v_1, \dots, v_n$ *lineárisan független vektorrendszer, valamint* $u_1, \dots, u_m$ *generátorrendszer* $\mathbf{V}$*-ben. Ekkor minden* i *indexhez* $(i \in \{1, \dots, n\})$ *van olyan* $j \in \{1, \dots, m\}$ *index, hogy a* $v_1, \dots, v_{i-1}, u_j, v_{i+1}, \dots, v_n$ *vektorrendszer lineárisan független.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a tétel állítása nem igaz. Ekkor van olyan i index $(i \in \{1, \dots, n\})$, amelyre a $v_1, \dots, v_{i-1}, u_j, v_{i+1}, \dots, v_n$ vektorrendszer tetszőleges j index esetén nem lineárisan független $(j \in \{1, \dots, m\})$. Mivel a $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független, ezért ez csak úgy lehetséges, hogy

$$u_1, \dots, u_m \in [v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n],$$

aminek következtében

$$[u_1, \dots, u_m] \subseteq [v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n] \subsetneqq V.$$

Ez pedig ellentmond annak, hogy $u_1, \dots, u_m$ generátorrendszer. □

A $\mathbf{V}$ vektortér $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszerét **bázisnak** nevezzük, ha lineárisan független és generátorrendszere a vektortérnek. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{V}$ **véges dimenziós**, ha $\mathbf{V}$-nek van véges bázisa.

2.10. Állítás. *Legyen* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett. Ekkor* $\mathbf{V}$ *minden bázisa véges, sőt bármely két bázis elemszáma megegyezik.*

Véges dimenziós vektortérben a bázisok közös elemszámát a vektortér **dimenziójának** nevezzük és $\dim(\mathbf{V})$-val jelöljük.

2.11. Állítás. *Legyen* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett,* $v_1, \dots, v_n$ *bázis* $\mathbf{V}$*-ben. Ekkor tetszőleges* $\mathbf{V}$*-beli vektor egyértelműen írható fel a bázisvektorok lineáris kombinációjaként.*

Legyen $\mathbf{V}$ véges dimenziós vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, $\mathcal{B}$: $v_1, \dots, v_n$ bázis $\mathbf{V}$-ben. Legyen továbbá v egy tetszőleges $\mathbf{V}$-beli vektor. Ekkor a 2.11 Állítás szerint vannak olyan egyételműen meghatározott $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ skalárok, hogy $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$. A $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ skalárokat a v vektor $v_1, \dots, v_n$ bázisra vontakozó **koordinátáinak** nevezzük. A $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in K^n$ elem-n-es a v vektor **koordinátasora** a $v_1, \dots, v_n$ bázisban (jel.: $[v]_{\mathcal{B}}$).

2.12. Tétel. *Legyen* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett. Ekkor igazak az alábbiak:*

(a) V *bármely véges generátorrendszeréből kiválasztható bázis;*

(b) V *bármely lineárisan független vektorrendszere kiegészíthető bázissá.*

2.13. Következmény. *Legyen* $\mathbf{V}$ n*-dimenziós vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett* $(n \in \mathbb{N})$ *és* $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{V}$*. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) *A* $v_1, \dots, v_n$ *vektorrendszer bázis.*

(ii) *A* $v_1, \dots, v_n$ *vektorrendszer lineárisan független.*

(iii) $V = [v_1, \dots, v_n]$.

2.14. Következmény. *Legyen* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett. Ekkor tetszőleges* $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{V}$ *vektorrendszer bármely két maximális lineárisan független részrendszere ugyanannyi vektorból áll.*

Legyen $\mathbf{V}$ véges dimenziós vektortér a $\mathbb{K}$ test felett. Ekkor a $v_1, \dots, v_n \in V$ vektorrendszer **rangja** a maximális lineárisan független részrendszereinek közös elemszáma. Jelölése: $r(v_1, \dots, v_n)$.

2.15. Következmény. *Legyen* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett,* $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{V}$*. Ekkor* $r(v_1, \dots, v_n)$ *megegyezik a* $[v_1, \dots, v_n]$ *altér dimenziójával.*

2.16. Tétel (Alterekre vonatkozó dimenziótétel)**.** *Legyen* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett,* $U, U' \leqslant \mathbf{V}$*. Ekkor* U *és* U' *is véges dimenziós, továbbá fennáll a*

$$\dim(U + U') + \dim(U \cap U') = \dim(U) + \dim(U').$$

Bizonyítás. Legyen $u_1, \dots, u_k$ bázis az $U \cap U'$ altérben. A 2.12 Tétel szerint az U, illetve U' alterek $u_1, \dots, u_k$ generátorrendszere kiegészíthető bázissá; legyen

$$u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_l \text{ bázis } U\text{-ban},$$
$$u_1, \dots, u_k, u_{l+1}, \dots, u_m \text{ bázis } U'\text{-ban}.$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy az $u_1, \dots, u_m$ vektorrendszer bázis az $U + U'$ altérben. Legyen $u + u'$ az $U + U'$ altér tetszőleges vektora. Ekkor vannak olyan $\mathbb{K}$-beli $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, illetve $\beta_1, \dots, \beta_k, \beta_{l+1}, \dots, \beta_m$ skalárok, hogy

$$u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot u_i + \sum_{i=k+1}^{l} \alpha_i \cdot u_i,$$
$$u' = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \cdot u_i + \sum_{i=l+1}^{m} \beta_i \cdot u_i,$$

így

$$u + u' = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta_i) \cdot u_i + \sum_{i=k+1}^{l} \alpha_i \cdot u_i + \sum_{i=l+1}^{m} \beta_i \cdot u_i,$$

azaz $u_1, \dots, u_m$ generátorrendszer $U + U'$-ben.

Az $u_1, \dots, u_m$ vektorrendszer lineáris függetlenségének igazolásához, tegyük fel, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \cdot u_i = \mathbf{0},$$

ahol $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{K}$. Legyen $u = \sum_{i=1}^{l} \gamma_i \cdot u_i \in U$. Ekkor $u = -\sum_{i=l+1}^{m} \gamma_i \cdot u_i \in U'$ következtében $u \in U \cap U'$. Így $\gamma_{k+1} = \dots = \gamma_l = 0$, mivel $u_1, \dots, u_l$ bázis U-ban. Legyen $u' = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \cdot u_i + \sum_{i=l+1}^{m} \gamma_i \cdot u_i \in U'$. Ekkor $u' = -\sum_{i=k+1}^{l} \gamma_i \cdot u_i \in U$ következtében $u' \in U \cap U'$. Így $\gamma_{l+1} = \dots = \gamma_m = 0$, mivel $u_1, \dots, u_k, u_{l+1}, \dots, u_m$ bázis U'-ben. Végül az adódik, hogy

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \cdot u_i = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \cdot u_i,$$

így $\gamma_1 = \dots = \gamma_k = 0$, hiszen az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer lineárisan független. Ezzel beláttuk, hogy az $u_1, \dots, u_m$ vektorrendszer lineárisan független, így bázis.

Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\dim(U + U') + \dim(U \cap U') = m + k = l + \big(k + (m - l)\big) = \dim(U) + \dim(U').$$

Ezzel a tételt igazoltuk. □

2.3. Feladatok

2.3.1. Feladat. *Fejezze ki a* $v = (3, 1, 4)^T \in \mathbb{R}^3$ *vektort az*

$$u_1 = (1, 1, -1)^T, \quad u_2 = (-1, 2, -3)^T, \quad u_3 = (3, -4, 7)^T$$

vektorok lineáris kombinációjaként.

2.3.2. Feladat. *Fejezze ki a* $v = (2, -5, 3)^T \in \mathbb{R}^3$ *vektort az*

$$u_1 = (1, -3, 2)^T, \quad u_2 = (2, -4, -1)^T, \quad u_3 = (1, -5, 7)^T$$

vektorok lineáris kombinációjaként.

2.3.3. Feladat. *Fejezze ki a* $p = 5x^2 - 3x + 4 \in \mathbb{R}[x]$ *polinomot az*

$$p_1 = x^2 - 2x + 5, \quad p_2 = 2x^2 - 3x, \quad p_3 = x + 2$$

polinomok lineáris kombinációjaként.

2.3.4. Feladat. *Kifejezhető-e az* $M = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *mátrix az*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrixok lineáris kombinációjaként.

2.3.5. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett és* U *nemüres részhalmaza* $\mathbf{V}$*-nek. Mutassa meg, hogy* U *pontosan akkor altere* $\mathbf{V}$*-nek, ha tetszőleges* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ *skalárokra és* $u_1, u_2 \in U$ *vektorokra* $\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 \in U$.

2.3.6. Feladat. *Mutassa meg, hogy az* $u_1 = (1, 1, 1)^T$, $u_2 = (1, 2, 2)^T$, $u_3 = (3, 3, -3)^T$ *vektorok kifeszítik a* $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ *vektorteret.*

2.3.7. Feladat. *Milyen feltételek teljesülése esetén lesz a* $v = (a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3$ *vektor eleme az* $[u_1, u_2, u_3] \leqslant \mathbb{R}^3$ *altérnek, ahol* $u_1 = (1, 2, 0)^T$, $u_2 = (-1, 1, 2)^T$, $u_3 = (3, 0, -4)^T$*?*

2.3.8. Feladat. *Legyen* S *a* $\mathbb{K}$ *test feletti* $\mathbf{V}$ *vektortér tetszőleges részhalmaza. Bizonyítsa be az alábbiakat.*

(a) *A* $\mathbf{V}$ *vektortér*

$$[S] \stackrel{def.}{=} \{\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \mid n \in \mathbb{N}_0,\ u_1, \ldots, u_n \in S,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}$$

részhalmaza altere $\mathbf{V}$*-nek, amely tartalmazza* S*-et.*

(b) *Ha a* $\mathbf{V}$ *vektortér* $\mathbf{W}$ *altere tartalmazza* S*-et, akkor* $[S] \subseteq \mathbf{W}$.

2.3.9. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *a valós függvények* $K = \mathbb{R}$ *feletti vektortere. Mutassa meg, hogy az* $f = \sin$, $g = \cos$ *és* $h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ *függvények lineárisan függetlenek.*

2.3.10. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *valós vektortér és* $u, v, w \in V$ *lineárisan független vektorok. Igaz-e, hogy az* $u + v$, $u - v$, $u - 2v + w$ *vektorrendszer lineárisan független.*

2.3.11. Feladat. *Mutassa meg, hogy az* $u = (1 + i, 2i)^T$ *és* $v = (1, 1 + i)^T$ *vektorok lineárisan függők a* $\mathbb{C}$ *feletti* $\mathbb{C}^2$ *vektortérben, de lineárisan függetlenek az* $\mathbb{R}$ *feletti* $\mathbb{C}^2$ *vektortérben.*

2.3.12. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett,* $\lambda \in \mathbb{K}$ *és* $v \in V$*. Mutassa meg, hogy* $\lambda \cdot v = \mathbf{0}$ *pontosan akkor teljesül, ha* $\lambda = 0$ *vagy* $v = \mathbf{0}$.

2.3.13. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett. Mutassa meg, hogy tetszőleges* $v \in V$ *vektor esetén* $-v = (-1) \cdot v$ *teljesül.*

2.3.14. Feladat. *Legyenek* $\mathbf{V} = (V; \oplus, \lambda\odot\ (\lambda \in \mathbb{K}))$ *és* $\mathbf{W} = (V; \boxplus, \lambda\boxdot\ (\lambda \in \mathbb{K}))$ *vektorterek a* $\mathbb{K}$ *test felett. Igaz-e, hogy* $\oplus = \boxplus$ *és* $\lambda\odot = \lambda\boxdot\ (\lambda \in \mathbb{K})$*?*

2.3.15. Feladat. *Legyenek* $\mathbf{V} = (V; \oplus, \lambda\odot\ (\lambda \in \mathbb{K}))$ *és* $\mathbf{W} = (V; \oplus, \lambda\boxdot\ (\lambda \in \mathbb{K}))$ *vektorterek a* $\mathbb{K}$ *test felett. Igaz-e, hogy* $\lambda\odot = \lambda\boxdot\ (\lambda \in K)$*?*

2.3.16. Feladat. *Legyenek* $\mathbf{V} = (V; \oplus, \lambda\odot\ (\lambda \in \mathbb{K}))$ *és* $\mathbf{W} = (V; \boxplus, \lambda\odot\ (\lambda \in \mathbb{K}))$ *vektorterek a* $\mathbb{K}$ *test felett. Igaz-e, hogy* $\oplus = \boxplus$*?*

2.3.17. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett. Igazoljuk, hogy a* $v_1, \ldots, v_k \in V$ *vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha minden* $\mathbf{V}$*-beli vektor legfeljebb egyfélekképen áll elő a* $v_1, \ldots, v_k$ *vektorok lineáris kombinációjaként.*

2.3.18. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ n*-dimenziós vektortér,* $\mathbf{U}$ *pedig* $\mathbf{V}$ *egy* $(n-1)$*-dimenziós altere. Bizonyítsuk be, hogy* $\mathbf{V}$*-nek van* $\mathbf{U}$*-n kívüli vektorokból álló bázisa.*

2.3.19. Feladat. *Igaz-e, hogy tetszőleges* $\mathbf{V}$ *vektortér bármely* u, v, w *vektorára*

$$r(u, v, w) = r(u + v, u + w, v + w)?$$

2.3.20. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós vektortér, akkor* $\mathbf{V}$ *bármely* $\mathbf{U}$ *alteréhez van olyan* $\mathbf{U}'$ *altér, hogy*

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}'.$$

2.3.21. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a „két vektor cseréje" elemi átalakítás előállítható a többi két fajta elemi átalakítás véges számú alkalmazásával.*

MÁTRIXOK

3.1. Mátrix rangja

Mátrix determinánsrangja, rangszámtétel. Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága (Kronecker–Capelli-tétel). Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak altere.

Legyen $\mathbb{K}$ tetszőleges test és $m, n \in \mathbb{N}$. Legyen $A = (a_{i,j})_{m\times n} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ és $0 \leqslant s_1 < \cdots < s_k \leqslant m$ (sorindexek), $1 \leqslant o_1 < \cdots < o_k \leqslant n$ (oszlopindexek), ahol $k \in \mathbb{N}$ és $1 \leqslant k \leqslant n$. Ekkor az A mátrix $s_1, \ldots, s_k$ idexű sorai és $o_1, \ldots, o_k$ indexű oszlopai által meghatározott **aldeterminánsán** a

$$D_{s_1,\ldots,s_k;o_1,\ldots,o_k}(A) = \begin{vmatrix} a_{s_1,o_1} & \cdots & a_{s_1,o_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s_k,o_1} & \cdots & a_{s_k,o_k} \end{vmatrix}$$

k-rendű determinánst értjük. Az A mátrix **determinánsrangja** pedig a legnagyobb rendű nemeltűnő aldeterminánsának a rendje (jelölés: $r_d(A)$). Azaz, az A mátrix determinánsrangja k, ha vannak olyan $1 \leqslant s_1 < \cdots < s_k \leqslant m$ és $1 \leqslant o_1 < \cdots < o_k \leqslant n$ indexek, hogy

$$D_{s_1,\ldots,s_k;o_1,\ldots,o_k}(A) \neq 0$$

és minden k-nál nagyobb rendű aldetermináns 0.

A determinánsrang definíciójának közvetlen következménye az alábbi állítás.

3.1. Állítás. *Legyen A tetszőleges $\mathbb{K}$ test feletti $(m \times n)$-es mátrix $(m, n \in \mathbb{N})$. Ekkor*

$$0 \leqslant r(A) \leqslant \min\{m, n\},$$

továbbá $r(A)$ pontosan akkor 0, ha A minden eleme 0.

Az $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mátrixhoz természetes módon rendelhető további kétféle rang. Az A mátrix **sorrangja**, a mátrix sorai mint $\mathbb{K}^n$-beli vektorok által alkotott vektrorrendszer rangja (jel.: $r_s(A)$).

Az A mátrix **oszloprangja**, a mátrix oszlopai mint $\mathbb{K}^m$-beli vektorok által alkotott vektrorrendszer rangja (jel.: $r_o(A)$).

3.2. Tétel (Rangszámtétel)**.** *Tetszőleges $\mathbb{K}$ test feletti A mátrix esetén $r_s(A) = r_o(A) = r_d(A)$.*

Tetszőleges $\mathbb{K}$ test feletti A mátrix esetén az $r_s(A) = r_o(A) = r_d(A)$ mennyiséget az A mátrix **rangjának** nevezzük és $r(A)$-val jelöljük.

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ tetszőleges vektorrendszer a $\mathbb{K}$ test feletti V vektortérben, valamint legyen $A = (a_{i,j})_{m\times n}$ tetszőleges $\mathbb{K}$ feletti $(m \times n)$-es mátrix.

Vektorrendszerek elemi átalakításai.

$$v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k \overset{E^{(4)}_{i,j}}{\rightsquigarrow} v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k \qquad (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k), \tag{4}$$

$$v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k \overset{E^{(5)}_{i,\alpha}}{\rightsquigarrow} v_1, \ldots, \alpha \cdot v_i, \ldots, v_k \qquad (1 \leqslant i \leqslant k,\ \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}), \tag{5}$$

$$v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k \overset{E^{(6)}_{i,j,\alpha}}{\rightsquigarrow} v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j + \alpha \cdot v_i, \ldots, v_k \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant k,\ \alpha \in \mathbb{K}). \tag{6}$$

Mátrixok elemi átalakításai sorokra.

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \overset{E^{(7)}_{i,j}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \qquad (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k), \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \overset{E^{(8)}_{i,\alpha}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i,1} & \cdots & \alpha a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \qquad (\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\},\ 1 \leqslant i \leqslant k), \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \overset{E^{(9)}_{i,j,\alpha}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}+\alpha a_{j,1} & \cdots & a_{i,n}+\alpha a_{j,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \qquad (\alpha \in \mathbb{K},\ 1 \leqslant i,j \leqslant k); \tag{9}$$

Mátrixok elemi átalakításai oszlopokra.

$$\begin{pmatrix} \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,j} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{m,i} & \cdots & a_{m,j} & \cdots \end{pmatrix} \overset{E^{(10)}_{i,j}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,j} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,i} & \cdots \end{pmatrix} \qquad (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k), \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & a_{1,i} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & a_{m,i} & \cdots \end{pmatrix} \overset{E^{(11)}_{i,\alpha}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \cdots & \alpha a_{1,i} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \alpha a_{m,j} & \cdots \end{pmatrix} \qquad (\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\},\ 1 \leqslant i \leqslant k), \tag{11}$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,j} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{m,i} & \cdots & a_{m,j} & \cdots \end{pmatrix} \overset{E^{(12)}_{i,j,\alpha}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \cdots & a_{1,i}+\alpha a_{1,j} & \cdots & a_{1,j} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{m,i}+\alpha a_{m,j} & \cdots & a_{m,j} & \cdots \end{pmatrix} \qquad (\alpha \in \mathbb{K},\ 1 \leqslant i,j \leqslant k). \tag{12}$$

3.3. Állítás. (a) *Vektorrendszerek* (4)–(6) *elemi átalakításai nem változtatják meg a vektorrendszerek rangját.*

(b) *Mátrixok sorokra vonatkozó* (7)–(9) *elemi átalakításai nem változtatják meg a mátrixok sorrangját.*

(c) *Mátrixok oszlopokra vonatkozó* (10)–(12) *elemi átalakításai nem változtatják meg a mátrixok oszloprangját.*

Bizonyítás. (a) Legyen $v_1, \ldots, v_k$ tetszőleges vektorrendszer a $\mathbb{K}$ test feletti V vektortérben, és legyen $v'_1, \ldots, v'_k$ a (4)–(6) elemi átalakítások valamelyikével kapott vektrorrendszer. Ekkor $[v'_1, \ldots, v'_k] \subseteq [v_1, \ldots, v_k]$ miatt $r(v'_1, \ldots, v'_k) \leqslant r(v_1, \ldots, v_k)$. Ha

$$v_1, \ldots, v_k \overset{E^{(4)}_{i,j}}{\rightsquigarrow} v'_1, \ldots, v'_k, \quad \text{akkor} \quad v'_1, \ldots, v'_k \overset{E^{(4)}_{i,j}}{\rightsquigarrow} v_1, \ldots, v_k,$$

$$v_1, \ldots, v_k \overset{E^{(5)}_{i,c}}{\rightsquigarrow} v'_1, \ldots, v'_k, \quad \text{akkor} \quad v'_1, \ldots, v'_k \overset{E^{(5)}_{i,c^{-1}}}{\rightsquigarrow} v_1, \ldots, v_k,$$

$$v_1, \ldots, v_k \overset{E^{(6)}_{i,j,c}}{\rightsquigarrow} v'_1, \ldots, v'_k, \quad \text{akkor} \quad v'_1, \ldots, v'_k \overset{E^{(6)}_{i,j,-c}}{\rightsquigarrow} v_1, \ldots, v_k,$$

így a vektorrendszer rangja változatlan kell maradjon az elemi átalakítások során, mivel megfelelő elemi átalakítással a $v'_1, \ldots, v'_k$ vektorrendszerből megkapható a $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszer.

A tétel (b) és (c) részei az (a) rész következményei. □

A 3.3. Állítás birtokában már a Rangszámtétel is egyszerűen bizonyítható.

A 3.2. Tétel (Rangszámtétel) bizonyítása. Legyen A tetszőleges $\mathbb{K}$ feletti $(m \times n)$-es mátrix. Ha $A = 0_{m\times n}$, akkor $r_d(A) = r_s(A) = r_o(A) = 0$. A továbbiakban tegyük fel, hogy $A \neq 0_{m\times n}$.

Sorokon végrehajtott elemi átalakításokkal az A mátrix lépcsős alakú mátrixszá alakítható, legyen ez a mátrix L. A 3.3. Állítás következtében $r_s(A) = r_s(L)$.

A bizonyítás második részében megmutatjuk, hogy elemi átalakítások során a determinánsrang nem csökken. Legyen $k = r_d(A)$ és legyenek $1 \leqslant s_1 < \cdots < s_k \leqslant m$, $1 \leqslant o_1 < \cdots < o_k \leqslant n$ olyan sor-, illetve oszlopindexek, amelyekre $D_{s_1,\ldots,s_k;o_1,\ldots,o_k}(A) \neq 0$, valamint legyen $B = (a_{s_u,o_v})_{k\times k}$. Ekkor $|B| = D_{s_1,\ldots,s_k;o_1,\ldots,o_k}(A) \neq 0$. Megmutatjuk, hogy az A mátrix sorain végzett elemi átalakítás után is van a kapott mátrixban nemeltűnő k-rendű aldetermináns:

- sorcsere: ld. 6. ábra (76. old.);
- valamely sor szorzása egy 0-tól különböző skalárral: ld. 7. ábra (77. old.);
- valamely sor skalárszorosát hozzáadni egy másik sorhoz: ld. 8. ábra (78. old.).

□

3.2. Kronecker–Capelli-tétel

Legyen $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}$ test és $a_{i,j}, b_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$. Az

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1, \\ & \vdots & \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{13}$$

A (13) **lineáris egyenletrendszer mátrixán** az

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$$

mátrixot értjük, az egyenletrendszer **kiegészített mátrixán** az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right) \in K^{m\times (n+1)}$$

mátrixot értjük.

A (13) egyenletrendszer **mátrixos**, illetve **vektoros alakja**:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad \text{(mátrixos alak)}$$

$$\mathbf{a}_1 \cdot x_1 + \cdots + \mathbf{a}_n \cdot x_n = \mathbf{b}, \qquad \text{(vektoros alak)}$$

ahol A a (13) egyenletrendszer mátrixa, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$ és $\mathbf{a}_j = (a_{1,j}, \ldots, a_{m,j})^T$ $(j = 1, \ldots, n)$.

3.4. Tétel (Kronecker–Capelli-tétel)**.** *Legyen $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}$ test és $a_{i,j}, b_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$. A (13) egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha*

$$r(A) = r(A \mid \mathbf{b}),$$

ahol $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$, A az egyenletrendszer mátrixa és $(A \mid \mathbf{b})$ az egyenletrendszer kiegészített mátrixa.

A (13) egyenletrendszer **homogén**, ha $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

3.5. Példa. *Tekintsük az*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & + & 5x_6 & + & 4x_7 & = & 2 \\ x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & + & 2x_6 & - & 4x_7 & = & 0 \\ x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & + & 3x_7 & = & 1 \\ 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & 4x_5 & + & 6x_6 & + & 4x_7 & = & 6 \end{array}$$

lineáris egyenletrendszert, amelynek mátrixos alakja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Először határozzuk meg az egyenletrendszer bővített mátrixának lépcsős alakját (sorokon végzett elemi átalakításokkal):

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 5 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -9 & 0 & -62 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -11 \end{array}\right).$$

Az egyenletrendszer

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -9 & 0 & -62 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}$$

„kiegészített” kiegészített mátrixában az oszlopokhoz tartozó ismeretlenek is megjelentek; a kötött ismeretleneket (piros színnel jelölt változók) fejezhetjük ki a szabad ismeretlenekkel (kék színnel jelöltekkel) az alábbi módon:

$$\begin{aligned} x_2 &= -62 + x_4 + 9x_6, \\ x_3 &= 42 - x_4 - 4x_6, \\ x_5 &= 12 - 3x_6, \\ x_7 &= -11, \end{aligned}$$

ahol az $x_1, x_4, x_6 \in \mathbb{R}$ ismeretlenek értéke tetszőlegesen megválasztható. Így az egyenletrendszer megoldáshalmaza:

$$U_{A,\mathbf{b}} = \left\{ (x_1, -62 + x_4 + 9x_6, 42 - x_4 - 4x_6, x_4, 12 - 3x_6, x_6, -11)^T \mid x_1, x_4, x_6 \in \mathbb{R} \right\}.$$

A fejezet zárásaként a homogén lineáris egyenletrendszerek megoldáshalmazait fogjuk megvizsgálni.

3.6. Tétel. *Legyen $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}$ test és $A = (a_{i,j})_{m\times n} \in K^{m\times n}$. Ekkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak U_A halmaza altér $\mathbb{R}^n$-ben, amelynek dimenziója $n - r(A)$.*

Bizonyítás. Legyen $d = r(A)$. Ha $d = 0$, akkor $A = 0_{m\times n}$, $U_A = \mathbb{R}^n$. A továbbiakban feltesszük, hogy $d > 0$. Az egyenletek sorrendjének átrendezésével és az ismeretlenek átindexelésével elérhető, hogy

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1} & \cdots & a_{d,d} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Legyen $B = (a_{i,j})_{d\times n}$. Ekkor a $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer ekvivalens az eredetivel, így $U_B = U_A$. Legyen $c_{d+1}, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Az

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,d}x_d & = & -a_{1,d+1}c_{d+1} - \cdots - a_{1,n}c_n \\ & \vdots & \\ a_{d,1}x_1 + \cdots + a_{d,d}x_d & = & -a_{d,d+1}c_{d+1} - \cdots - a_{d,n}c_n \end{array} \right.$$

egyenletrendszer szabályos, így a Cramer-szabály (1.10. Tétel) szerint pontosan egy megoldása van. Legyenek a

$$\begin{aligned} v_1 &= (c_1^{(1)}, \ldots, c_d^{(d)}, 1, 0, \ldots, 0)^T \\ &\vdots \\ v_{n-d} &= (c_1^{(n-d)}, \ldots, c_d^{(n-d)}, 0, \ldots, 0, 1)^T \end{aligned}$$

vektorok megoldásai a $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek. Ekkor a $v_1, \ldots, v_{n-d}$ vektorok bázist alkotnak $U_B = U_A$-ban. Ha $(c_1, \ldots, c_n) \in U_A$, akkor

$$c_{d+1} \cdot v_1 + \cdots + c_{d+(n-d)} \cdot v_{n-d} = \left(\sum_{j=1}^{n-d} c_{d+j} c_1^{(j)}, \ldots, \sum_{j=1}^{n-d} c_{d+j} c_d^{(j)}, c_{d+1}, \ldots, c_n \right)$$

következtében $(c_1, \ldots, c_d, c_{d+1}, \ldots, c_n) = c_{d+1} \cdot v_1 + \cdots + c_{d+(n-d)} \cdot v_{n-d}$, azaz $v_1, \ldots, v_{n-d}$ generátorrendszer. Tegyük fel, hogy $c_{d+1} \cdot v_1 + \cdots + c_{d+(n-d)} \cdot v_{n-d} = \mathbf{0}$. Ekkor $c_{d+1} = \cdots = c_n = 0$, aminek következtében $v_1, \ldots, v_{n-d}$ lineárisan független, ezért bázis. Így $\dim(U_A) = n - d = n - r(A)$. □

Az U_A altér tetszőleges bázisát az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer **fundamentális megoldásrendszerének** nevezzük.

3.7. Tétel. *A* (13) *egyenletrendszer megoldásainak halmaza* $\mathbf{c}_0 + U_A$*, ahol* $\mathbf{c}_0$ *a* (13) *egyenletrendszer egy tetszőleges megoldása.*

3.3. Mátrixegyenletek

A lineáris egyenletrendszerek általánosításaként vizsgálhatjuk az

$$AX = B \tag{14}$$

alakú egyenleteket, ahol A és B adott K test feletti mátrixok. A célunk az X (K feletti) mátrix(ok) meghatározása.

3.8. Állítás (Szükséges feltétel a méret alapján)**.** *Legyen* K *test,* $A \in K^{m\times n}$ *és* $B \in K^{r\times s}$*. Ha a (14) mátrixegyenlet megoldható, akkor* $m = r$ *és (14) tetszőleges* X *megoldására* $X \in K^{n\times s}$ *teljesül.*

3.9. Tétel (Kronecker–Capelli-tétel mátrixegyenletekre)**.** *Legyen* K *test,* $A = (a_{i,j})_{m\times n} \in K^{m\times n}$ *és* $B = (b_{i,k})_{m\times s} \in K^{m\times s}$*. Ekkor a (14) mátrixegyenlet pontosan akkor oldható meg, ha* $r(A) = r(A|B)$*, ahol*

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_{1,1} & \dots & b_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_{m,1} & \dots & b_{m,s} \end{array}\right).$$

Bizonyítás. Az A és B mátrixok oszlopvektorait jelölje $\mathbf{a}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ és $\mathbf{b}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant s)$. Ekkor

$$\begin{aligned} AX = B \text{ megoldható} &\iff (\exists (x_{j,k})_{n\times s} \in K^{n\times s})(\mathbf{b}_k = x_{1,k}\cdot \mathbf{a}_1 + \dots + x_{n,k}\cdot \mathbf{a}_n \ (1 \leqslant k \leqslant s)) \\ &\iff \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s \in [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] \\ &\iff [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s] \\ &\iff r(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = r(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s) \\ &\iff r(A) = r(A|B). \end{aligned}$$

□

Mátrixegyenlet megoldása is lehetséges Gauss-eliminációval. Az előző tétel jelöléseit használva, a (14) egyenlet megoldása azt jelenti, hogy egyszerre kell megoldanunk az $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{x}_s = \mathbf{b}_1$ lineáris egyenletrendszereket. Tegyük fel, hogy $r(A) = r(A|B)$. Elemi átalakítások alkalmazásával keressük meg az $(A|B)$ mátrix lépcsős alakját:

$$(A|B) \sim (L_A|B').$$

Ekkor L_A az A mátrix lépcsős alakja, valamint ha L_A valamely sora csak 0-kat tartalmaz, akkor B' megfelelő sora is csak 0-kat tartalmaz. Most már csak az a kérdés, hogy hogyan olvasható le a megoldás. (Ezt a kedves olvasóra bízzuk.)

3.4. Feladatok

3.4.1. Feladat. *Határozza meg az alábbi $\mathbb{C}$ feletti mátrixok rangját. A feladat* (b) *és* (c) *részében az* a, b, t *paraméterek tetszőleges komplex számok.*

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & a \\ 1 & -1 & 1 & -1 & b \\ 4 & -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, (c) $C = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t & 1 & t & t^2 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix}$.

3.4.2. Feladat. *Oldja meg az alábbi $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszereket. A feladat* (d) *részében* a *tetszőleges valós paraméter.*

(a) $\begin{cases} x + y = f, \\ 5x + 6y = 2e, \\ 5x + 6y = 3\nu, \\ f + \nu = e + 2, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 12x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 12x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 12x_2 + x_3 + x_4 = 1, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 12x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 12x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 12x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 12x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 12x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 12x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 12x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 12x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = a. \end{cases}$

A **3.4.2 Feladat** (d) részének megoldása. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & 12 & 1 \\ 1 & 12 & 1 & 1 \\ 12 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_4)^T$ és $\mathbf{b} = (2, 7, 1, 8, a)^T$. Ekkor egyenletrendszerünk mátrixos alakja: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$; az egyenletrendszer kiegészített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 & 2 \\ 1 & 1 & 12 & 1 & 7 \\ 1 & 12 & 1 & 1 & 1 \\ 12 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & a \end{array}\right),$$

(csak sorokon végzett elemi átalakításokat alkalmazva) a mátrix lépcsős alakja az alábbi:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 23/33 - a/51 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/33 - a/51 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -19/33 + 14a/51 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/33 - a/51 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 55a/221 \end{array}\right).$$

Ha $1 - 55a/221 \neq 0$, azaz $a \neq 221/55$, akkor az egyenletrendszer a Kronecker–Capelli-tétel szerint nem oldható meg. Ha $a = 221/55$, akkor az egyenletrendszer megoldható, egyetlen megoldása van: $(34/55, -1/55, 29/55, 4/55)^T$.

3.4.3. Feladat. *Oldjuk meg a komplex számok körében az*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + ix_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -1 + i, \\ x_1 + x_2 + ix_3 + x_4 + x_5 = -1 - i, \\ x_1 + x_2 + x_3 + ix_4 + x_5 = 1 - i, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + ix_5 = 1 + i. \end{cases}$$

egyenletrendszert.

3.4.4. Feladat. *Határozzuk meg az*

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 4, \\ x_1 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ x_2 & + & x_3 & + & x_5 & = & 3. \end{cases}$$

egyenletrendszer összes megoldását a K *testben, ahol* K *a* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$, $\mathrm{GF}(2^2), \mathrm{GF}(2^3)$ *testek valamelyike.*[1]

3.4.5. Feladat. *Tetszőleges* $n \geqslant 3$ *természetes számra oldjuk meg az* $x_1 + x_2 = \cdots = x_{n-1} + x_n = x_n + x_1 = 1$ *egyenletrendszert a racionális számok körében.*

3.4.6. Feladat. *Legyenek* $m < n$ *természetes számok. Oldjuk meg az*

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_m & = & 1, \\ x_2 + \cdots + x_{m+1} & = & 1, \\ & \vdots & \\ x_{n-m+1} + \cdots + x_n & = & 1, \\ x_{n-m+2} + \cdots + x_n + x_1 & = & 1, \\ & \vdots & \\ x_n + x_1 + \cdots + x_{m-1} & = & 1, \end{cases}$$

egyenletrendszert a racionális számok körében.

3.4.7. Feladat. *Legyen* N *természetes szám és* $f\colon \{0, 1, \ldots, N\} \to \mathbb{R}$ *olyan leképezés, amelyre teljesülnek az*

$$f(n) = 1 + \frac{f(n-1) + f(n+1)}{2} \quad (1 \leqslant n < N) \tag{15}$$

egyenlőségeknek.

(a) *Mutassa meg, hogy a* $\{0, 1, \ldots, N\} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto -n^2$ *leképezés eleget tesz a* (15) *egyenlőségeknek.*

(b) *Mutassa meg, hogy tetszőleges* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *valós számokra a* $\{0, 1, \ldots, N\} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto \alpha n + \beta$ *leképezés is eleget tesz* (15)*-nek.*

(c) *Határozza meg azokat az* $f\colon \{0, 1, \ldots, N\} \to \mathbb{R}$ *leképezéseket, amelyekre* (15) *és* $f(0) = 0$, $f(N) = 0$ *teljesül.*

3.4.8. Feladat. (a) *Mutassa meg, hogy mátrixok elemi átalakításai* $(E^{(7)}_{i,j}, \ldots, E^{(12)}_{i,j,c})$ *alkalmas invertálható mátrixokkal való szorzással is megvalósíthatók.*

(b) *Legyen* K *test és* $A, B \in \mathsf{K}^{m \times n}$, *ahol* $m, n \in \mathbb{N}$. *Ha a* B *mátrix elemi átalakításokkal keletkezik az* A *mátrixból, akkor van olyan invertálható* C *mátrix, amelyre* $B = CA$ *teljesül.*

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $1 \leqslant i, j \leqslant n$, valamint $U^{(n)}_{i,j} \in \mathsf{K}^{n \times n}$ az a mátrix, amely i-edik sorának j-edik eleme 1, a többi elem pedig 0.
(a) Legyen

$$\begin{aligned} C^{(m)}_{[i]\leftrightarrow[j]} &= E_m - U^{(m)}_{i,i} - U^{(m)}_{j,j} + U^{(m)}_{i,j} + U^{(m)}_{j,i}, \\ C^{(m)}_{[i]+c\cdot[j]} &= E_m + U^{(m)}_{i,j}, \\ C^{(m)}_{c\cdot[i]} &= E_m + (c-1)\cdot U^{(m)}_{i,i}. \end{aligned}$$

Ekkor a fenti mátrixokkal való bal oldali szorzás éppen a sorokon végzett, a transzponáltjukkal való jobb oldali szorzás pedig az oszlopokon végzett elemi átalakításokat eredményezi.

[1] Legyen p prímszám és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor $\mathrm{GF}(p^n)$-nel jelöljük a p^n-elemű testet, amely izomorfiától eltekintve egyértelmű, $\mathrm{GF}(p^n) \cong \mathbb{Z}_p[x]/(f)$, ahol $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ irreducibilis n-edfokú polinom. A GF jelölés a „Galois field” kifejezésből ered.

3.4.9. Feladat. *Legyen* A *a* K *test feletti* $(n \times n)$*-es mátrix. Mutassa meg, hogy ha az* $(A \mid E_n) \in K^{n \times 2n}$ *mátrix elemi (csak sorokra vonatkozó) átalakításokkal* $(E_n \mid C)$ *alakra hozható, akkor* C *szükségképpen az* A *mátrix inverze.*

3.4.10. Feladat. (a) *Mikor kollineárisak*[2] *az* $\mathbb{R}^2$*-beli* $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$ *pontok?*

(b) *Mikor kollineárisak az* $\mathbb{R}^2$*-beli* $P_1(x_1, y_1), \ldots, P_n(x_n, y_n)$ *pontok* $(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3)$*?*

(c) *Mikor kollineárisak az* $\mathbb{R}^3$*-beli* $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$ *pontok?*

(d) *Mikor kollineárisak az* $\mathbb{R}^3$*-beli* $P_1(x_1, y_1, z_1), \ldots, P_n(x_n, y_n, z_n)$ *pontok* $(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3)$*?*

3.4.11. Feladat. (a) *Mikor illeszkednek az* $\mathbb{R}^2$*-beli* $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$ *pontok egyazon körre?*

(b) *Mikor illeszkednek az* $\mathbb{R}^2$*-beli* $P_1(x_1, y_1), \ldots, P_n(x_n, y_n)$ *pontok egyazon körre* $(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4)$*?*

3.4.12. Feladat. *Legyen* $f\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ *tetszőleges leképezés, valamint tetszőleges* n *természetes számra legyen* $A_f^{(n)} = (a_{i,j})_{n \times n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$*, ahol* $a_{i,j} = f(i + j - 2, j - 1)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$*. Határozza meg az* $A_f^{(n)}$ *mátrix rangját az alábbi esetekben:*

(a) $f(a, b) = a,\ n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(b) $f(a, b) = \binom{a}{b},\ n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(c) $f(a, b) = \min(a, b),\ n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(d) $f(a, b) = \max(a, b),\ n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(e) $f(a, b) = a + bi,\ n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(f) $f(a, b) = a/(b + 1),\ n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3.4.13. Feladat. *Oldja meg az alábbi* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *alakú homogén lineáris egyenletrendszereket. Ha van nemtriviális megoldása az egyenletrendszernek, akkor adjon meg egy fundamentális megoldásrendszert is.*

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$; (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

3.4.14. Feladat. *Határozza meg az* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *együtthatókat az alábbi kémiai reakciókban.*

$$\alpha\, Br^- + \beta\, H^+ + \gamma\, MnO_4 \longrightarrow \delta\, BrO_3^- + \varepsilon\, Mn^{2+} + \zeta\, H_2O;$$
$$\eta\, Fe + \vartheta\, OH^- \longrightarrow \iota\, Fe(OH)_2 + \kappa\, e^-;$$
$$\lambda\, H_2O + \mu\, O_2 + \xi\, e^- \longrightarrow \pi\, OH^-;$$
$$\rho\, Fe(OH)_2 + \sigma\, O_2 + \tau\, H_2O \longrightarrow \varphi\, Fe(OH)_3.$$

3.4.15. Feladat. *Legyen* $f_1, \ldots, f_t \in K^n$ *az* $A\mathbf{x} = 0$ *(*K *feletti) homogén lineáris egyenletrendszer egy fundamentális megoldásarendszere. Mutassuk meg, hogy* $f_1', \ldots, f_t' \in K^n$ *akkor és csak akkor fundamentális megoldásrendszere ugyanennek a lineáris egyenletrendszernek, ha van olyan* $C \in K_{t \times t}$ *nemelfajuló mátrix, amelyre*

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_t' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix}$$

teljesül.

3.4.16. Feladat. *Legyen* $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *és* $B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Oldja meg az* $A_iX = B_j$, $B_jX = A_i$, $XA_i = B_j$ *és* $XB_j = A_i$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 3)$ *mátrixegyenleteket.*

3.4.17. Feladat. *Legyen* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$ *és* $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$. *Határozza meg az* $AX = B$ *mátrixegyenlet összes megoldását.*

[2] A $P_1, \ldots, P_n$ pontok kollineárisak, ha egy egyenesre illeszkednek.

4. Fejezet

Lineáris leképezések

Lineáris leképezések és transzformációk, vektorterek izomorfiája. Lineáris leképezések mag- és képtere, rangja, lineáris leképezések dimenziótétele. Műveletek lineáris leképezésekkel. Lineáris leképezés mátrixa. Bázisátmenet-mátrix, lineáris leképezés mátrixa különböző bázisokban, hasonló mátrixok.

4.1. Lineáris leképezések

Legyenek $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ a $\mathbb{K}$ test feletti vektorterek. A $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ leképzést **lineáris leképezésnek** nevezzük, ha bármely $v, v' \in V$ vektorokra és $\lambda \in \mathbb{K}$ skalárra teljesül, hogy

$$\varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v'),$$
$$\varphi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \varphi(v).$$

Ha $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, akkor a $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezést **lineáris transzformációnak** nevezzük.

Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ vektorterek **izomorfak**, ha van egy $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ bijektív lineáris leképezés. A $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ vektorterek izomorfizmusát az alábbi módon jelöljük $\mathbf{V} \cong \mathbf{W}$ vagy $\mathbf{V} \cong_\varphi \mathbf{W}$.

4.1. Állítás. *Legyenek $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ a $\mathbb{K}$ test feletti vektorterek. A $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ leképzés pontosan akkor lineáris leképezés, ha*

$$\varphi(\lambda \cdot v + \lambda' \cdot v') = \lambda \cdot \varphi(v) + \lambda' \cdot \varphi(v')$$

teljesül tetszőleges $v, v' \in V$ vektorokra és $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ skalárokra.

4.2. Tétel. *Legyenek $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ véges dimenziós vektorterek, $v_1, \dots, v_n$ bázis $\mathbf{V}$-ben és $w_1, \dots, w_n$ tetszőleges vektorok $\mathbf{W}$-ben. Ekkor pontosan egy olyan $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezés létezik, amelyre $\varphi(v_i) = w_i$ teljesül minden i-re $(1 \leqslant i \leqslant n)$.*

4.3. Példa. (a) *Legyenk $\mathbf{V}$ a sík vektorainak vektortere $\mathbb{R}$ felett. Ekkor az origó körüli α-szögű forgatás $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$ és az x-tengelyre vonatkozó tükrözés is lineáris transzformációja $\mathbf{V}$-nek.*

(b) *Ha $\mathbf{V}$ a valós számok halmazán értelmezett, akárhányszor differenciálható függvények tere, akkor a*

$$\mathbf{V} \to \mathbf{V},\ f \mapsto f'$$

leképezés lineáris transzformációja $\mathbf{V}$-nek.

(c) *Legyen $\mathbf{V}$ a valós számok halmazán értelmezett összes függvények tere és $\mathbf{W} = \mathbb{R}$. Ekkor a*

$$\mathbf{V} \to \mathbf{W},\ f \mapsto f(0)$$

leképezés lineáris.

(d) *Tetszőleges $\mathbf{V}$ vektortér esetén az*

$$\mathrm{id}_{\mathbf{V}}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V},\ v \mapsto v$$

leképezés lineáris transzformációja $\mathbf{V}$-nek.

(e) *Tetszőleges $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ vektorterek esetén a*

$$\mathbf{V} \to \mathbf{W},\ v \mapsto \mathbf{0_W}$$

leképezés lineáris.

Legyenek $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ a $\mathbb{K}$ test feletti vektorterek, valamint legyen $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképzés. Ekkor φ **képtere:**

$$\mathrm{Im}\,(\varphi) = \{\varphi(v) \mid v \in \mathbf{V}\},$$

magtere:

$$\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{v \in \mathbf{V} \mid \varphi(v) = \mathbf{0_W}\}.$$

4.4. Állítás. *Legyenek* $\mathbf{V}$ *és* $\mathbf{W}$ *a* $\mathbb{K}$ *test feletti vektorterek, valamint legyen* $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *lineáris leképzés. Ekkor* $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ *altér* $\mathbf{W}$*-ben és* $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ *altér* $\mathbf{V}$*-ben.*

4.5. Tétel (Lineáris leképezések dimenziótétele)**.** *Legyenek* $\mathbf{V}$ *és* $\mathbf{W}$ *a* $\mathbb{K}$ *test feletti véges dimenziós vektorterek, valamint legyen* $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *lineáris leképzés. Ekkor*

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}\,(\varphi)) = \dim(\mathbf{V}).$$

4.6. Következmény. *Legyen* $\mathbf{V}$ *a* $\mathbb{K}$ *test feletti véges dimenziós vektortér, valamint legyen* $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineáris transzformáció. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(a) φ *bijektív,*

(b) φ *injektív,*

(c) φ *szürjektív.*

Legyenek $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ a $\mathbb{K}$ test feletti vektorterek, $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $\psi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképzések és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor a $\varphi + \psi$ és $\lambda \cdot \varphi$ leképezéseket az alábbi módon definiáljuk:

$$\varphi + \psi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W},\ v \mapsto \varphi(v) + \psi(v),$$
$$\lambda \cdot \varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W},\ v \mapsto a \cdot \varphi(v).$$

4.7. Állítás. *Legyenek* $\mathbf{V}$ *és* $\mathbf{W}$ *a* $\mathbb{K}$ *test feletti vektorterek,* $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$*,* $\psi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *lineáris leképzések és* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Ekkor a* $\varphi + \psi$ *és* $\lambda \cdot \varphi$ *leképezések lineárisak.*

4.2. Lineáris leképezés mátrixa

Legyenek $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ véges dimenziós vektorterek a $\mathbb{K}$ test felett, $\mathcal{E}\colon e_1, \ldots, e_m$ bázis $\mathbf{V}$-ben, $\mathcal{F}\colon f_1, \ldots, f_n$ bázis $\mathbf{W}$-ben. Ha $w_1, \ldots, w_m$ tetszőleges $\mathbf{W}$-beli vektorok, akkor a 4.2 Tétel szerint pontosan egy olyan $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezés van, hogy $\varphi(e_j) = w_j$ teljesül minden j-re ($1 \leqslant j \leqslant m$). A $w_1, \ldots, w_m$ vektorokat írjuk fel az $f_1, \ldots, f_n$ bázisban:

$$\varphi(e_j) = w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot f_i \quad (a_{i,j} \in \mathbb{K}).$$

Ekkor az $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ ($1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m$) együtthatók egyértelműen meghatározottak. Az

$$A_\varphi^{(\mathcal{E},\mathcal{F})} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,m} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times m}$$

mátrixot a φ **lineáris leképezés mátrixának** nevezzük az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban. Ha $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, akkor egy bázist választunk; a $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ **lineáris transzformáció mátrixa** az $\mathcal{E}\colon e_1, \ldots, e_m$ bázisban: $A_\varphi^{(\mathcal{E})}$.

4.8. Állítás. *Legyenek* $\mathbf{V}$ *és* $\mathbf{W}$ *véges dimenziós vektorterek a* $\mathbb{K}$ *test felett,*

$$\mathcal{E}\colon e_1, \ldots, e_m \textit{ bázis } \mathbf{V}\textit{-ben} \qquad \textit{és} \qquad \mathcal{F}\colon f_1, \ldots, f_n \textit{ bázis } \mathbf{W}\textit{-ben.}$$

Ekkor

$$[\varphi(v)]_\mathcal{F} = A_\varphi^{(\mathcal{E},\mathcal{F})} \cdot [v]_\mathcal{E}$$

teljesül tetszőleges $v \in \mathbf{V}$*-re.*

4.9. Állítás. *Legyenek* $\mathbf{V}$ *és* $\mathbf{W}$ *véges dimenziós vektorterek a* $\mathbb{K}$ *test felett,*

$$\mathcal{E}\colon e_1, \ldots, e_m \textit{ bázis } \mathbf{V}\textit{-ben} \qquad \textit{és} \qquad \mathcal{F}\colon f_1, \ldots, f_n \textit{ bázis } \mathbf{W}\textit{-ben.}$$

Ekkor a

$$\{\varphi \mid \varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W} \textit{ lineáris leképezés}\} \to K^{n \times m},\ \ \varphi \mapsto A_\varphi^{(\mathcal{E},\mathcal{F})}$$

leképezés bijekció.

4.10. Példa. (a) *Legyen* $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ *mint a valós test feletti vektortér és a* φ *lineáris transzformáció az origóra való tükrözés. Ekkor* φ *mátrixa az* $\mathcal{E}\colon e_1 = (1,0)^T,\ e_2 = (0,1)^T$ *(standard) bázisban:*

$$A_\varphi^{(\mathcal{E})} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

mivel $\varphi(e_1) = (-1,0)^T = (-1)\cdot e_1 + 0\cdot e_2$ *és* $\varphi(e_2) = (0,-1)^T = 0\cdot e_1 + (-1)\cdot e_2$.

(b) *Legyen* $\mathbf{V}$ n*-dimenziós vektortér. Ekkor az* $\mathrm{id}_\mathbf{V}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V},\ v \mapsto v$ *identikus transzformáció mátrixa* $\mathbf{V}$ *bármely bázisában* E_n *(az* $(n\times n)$*-es egységmátrix).*

(c) *Legyen* $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ *mint a valós test feletti vektortér és a* ψ *lineáris transzformáció az* x*-tengelyre való tükrözés. Ekkor* ψ *mátrixa a standard bázisban:*

$$A_\psi^{(\mathcal{E})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

mivel $\psi(e_1) = e_1$ *és* $\psi(e_2) = -e_2$.

4.3. A bázisátmenet-mátrix

Legyen $\mathbf{V}$ véges dimenziós vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, $\mathcal{E}\colon e_1,\dots,e_m$ és $\mathcal{E}'\colon e'_1,\dots,e'_m$ bázisok $\mathbf{V}$-ben. Ekkor

$$e_j = \sum_{i=1}^m c_{ij}\cdot e'_i \quad (j = 1,\dots,m),$$

ahol $(c_{1j},\dots,c_{mj})^T \in \mathbb{K}^m$ az e_j (bázis)vektor koordinátasora az $e'_1,\dots,e'_m$ bázisban $(i = 1,\dots,m)$. A $C_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = (c_{ij})_{m\times m} \in \mathbb{K}^{m\times m}$ mátrixot az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{E}'$ bázisra történő **bázisátmenet-mátrixnak** nevezzük. Legyen v tetszőleges $\mathbf{V}$-beli vektor, melynek koordinátasora az $e_1,\dots,e_m$ bázisban $[v]_\mathcal{E} = (\lambda_1,\dots,\lambda_m)^T \in \mathbb{K}^m$, az $e'_1,\dots,e'_m$ bázisban pedig $[v]_{\mathcal{E}'} = (\lambda'_1,\dots,\lambda'_m)^T \in \mathbb{K}^m$. Ekkor

$$v = \sum_{j=1}^m \lambda_j\cdot e_j = \sum_{j=1}^m\left(\lambda_j\sum_{i=1}^m c_{ij}\cdot e'_i\right) = \sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j c_{ij}\cdot e'_i\right)$$

következtében $\lambda'_i = \sum_{j=1}^m \lambda_j c_{ij} \quad (i = 1,\dots,m)$, azaz

$$[v]_{\mathcal{E}'} = (\lambda'_1,\dots,\lambda'_m)^T = C_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}\cdot(\lambda_1,\dots,\lambda_m)^T = C_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}\cdot[v]_\mathcal{E}.$$

4.11. Állítás. *Legyen* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett,* $\mathcal{E}\colon e_1,\dots,e_m$ *és* $\mathcal{E}'\colon e'_1,\dots,e'_m$ *bázisok* $\mathbf{V}$*-ben. Ekkor a* $C_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} \in \mathbb{K}^{m\times m}$ *mátrix invertálható, melynek inverze* $C_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}$.

4.4. Lineáris leképezés mátrixa különböző bázisokban

Legyenek $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ véges dimenziós vektorterek a $\mathbb{K}$ test felett, $\mathcal{E}\colon e_1,\dots,e_m$ és $\mathcal{E}'\colon e'_1,\dots,e'_m$ bázisok $\mathbf{V}$-ben, továbbá $\mathcal{F}\colon f_1,\dots,f_n$ és $\mathcal{F}'\colon f'_1,\dots,f'_n$ bázisok $\mathbf{W}$-ben. Tekintsük a $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezést, melynek mátrixai: $A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}} = (a_{ij})_{n\times m}$ és $A_\varphi^{\mathcal{E}',\mathcal{F}'} = (a'_{ij})_{n\times m}$. Ha $v \in \mathbf{V}$, akkor $v\varphi$ koordinátasora az $\mathcal{F}$ bázisban, az 4.8 Állítás szerint, a következőképpen számolható:

$$[\varphi(v)]_\mathcal{F} = A_\varphi^{(\mathcal{E},\mathcal{F})}\cdot[v]_\mathcal{E},$$

másrészt

$$\begin{aligned}
[\varphi(v)]_\mathcal{F} &= C_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}\cdot[\varphi(v)]_{\mathcal{F}'} \\
&= C_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}\cdot\left(A_\varphi^{(\mathcal{E}',\mathcal{F}')}\cdot[v]_{\mathcal{E}'}\right) \\
&= C_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}\cdot\left(A_\varphi^{(\mathcal{E}',\mathcal{F}')}\cdot(C_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}\cdot[v]_\mathcal{E})\right) \\
&= \left(C_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}\cdot A_\varphi^{(\mathcal{E}',\mathcal{F}')}\cdot C_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}\right)\cdot[v]_\mathcal{E}.
\end{aligned}$$

Ezen két eredményt összevetve azt kapjuk, hogy $A_\varphi^{(\mathcal{E},\mathcal{F})} = C_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}\cdot A_\varphi^{(\mathcal{E}',\mathcal{F}')}\cdot C_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = C_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}^{-1}\cdot A_\varphi^{(\mathcal{E}',\mathcal{F}')}\cdot C_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$, azaz

$$A_\varphi^{(\mathcal{E}',\mathcal{F}')} = C_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}\cdot A_\varphi^{(\mathcal{E},\mathcal{F})}\cdot C_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}^{-1}.$$

4.12. Tétel. *Legyenek* $\mathbf{V}$ *és* $\mathbf{W}$ *véges dimenziós vektorterek a* $\mathbb{K}$ *test felett,* $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ *bázisok* $\mathbf{V}$*-ben és* $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ *bázisok* $\mathbf{W}$*-ben. Ekkor tetszőleges* $\varphi \colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *lineáris leképezésre*

$$A_\varphi^{(\mathcal{E}',\mathcal{F}')} = C_{\mathcal{F},\mathcal{F}'} \cdot A_\varphi^{(\mathcal{E},\mathcal{F})} \cdot C_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}^{-1}$$

teljesül.

Legyenek A és B a $\mathbb{K}$ test feletti $(m \times n)$-es mátrixok. Azt mondjuk, hogy az A és B mátrixok **ekvivalensek**, ha vannak olyan $C \in \mathbb{K}^{m \times m}$ és $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertálható mátrixok, hogy $B = CAD^{-1}$ (jelölés: $A \sim B$).

Legyenek A és B a $\mathbb{K}$ test feletti $(m \times m)$-es mátrixok. Azt mondjuk, hogy az A és B mátrixok **hasonlóak**, ha van olyan $C \in \mathbb{K}^{m \times m}$ invertálható mátrix, hogy $B = CAC^{-1}$ (jelölés: $A \sim B$).

4.13. Állítás. *Mátrixok ekvivalenciája, illetve hasonlósága ekvivalenciareláció.*

4.14. Tétel. *Legyen* $\mathbf{V}$ m*-dimenziós és* $\mathbf{W}$ n*-dimenziós vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett.*

(a) *Két* $\mathbb{K}^{n \times m}$*-beli mátrix akkor és csak akkor ekvivalens, ha előállnak úgy mint egy* $\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *lineáris leképezés mátrixai különböző bázisokban.*

(b) *Két* $\mathbb{K}^{m \times m}$*-beli mátrix akkor és csak akkor hasonló, ha előállnak úgy mint egy* $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineáris transzformáció mátrixai különböző bázisokban.*

4.5. Feladatok

4.5.1. Feladat. *Mutassa meg, hogy a 4.3 Példában megadott leképezések valóban lineárisak.*

4.5.2. Feladat. *Legyen $\mathbb{K}$ test, és tekintsük a $\mathbb{K}[x]$ polinomgyűrű (mint $\mathbb{K}$ feletti vektortér) alábbi leképezéseit:*

(a) $\mathbb{K}[x] \to \mathbb{K},\ f \mapsto f(1)$; (b) $\mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x],\ f \mapsto f(x-1)$; (c) $\mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x],\ f \mapsto 1 + f(x-1)$;
(d) $\mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x],\ f \mapsto \pi f(x^2)$; (e) $\mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x],\ f \mapsto f^2$; (f) $\mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x],\ f \mapsto \int_0^x f(t)dt$.

Melyek lineárisak a fenti leképezések közül. Lineáris leképezések esetén határozza meg a kép- és magteret is.

4.5.3. Feladat. *Melyek lineárisak az alábbi leképezések közül. Lineáris leképezések esetén határozza meg a kép- és magteret is.*

(a) $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ (a,b,c,d)^T \mapsto (a+b+c+d, 1)^T$; (b) $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ (a,b,c,d)^T \mapsto (a+b, c+d)^T$;
(d) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ (a,b,c)^T \mapsto (a+b, b+c, c+a, 0)^T$; (e) $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ (a,b,c,d)^T \mapsto ac+bd$.

4.5.4. Feladat. *Legyen $\mathbb{K}$ test és $m, n \in \mathbb{N}$. Tetszőleges $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ mátrix esetén legyen φ_A az alábbi leképezés:*

$$\varphi_A\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n,\ (a_1,\dots,a_m)^T \mapsto A\cdot(a_1,\dots,a_m)^T.$$

Mutassa meg, hogy a φ_A leképezés lineáris. Határozza meg a φ_A lineáris leképezések kép- és magterét az alábbi A mátrixok esetén:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 9 & -27 \end{pmatrix}$.

Legyen $\mathbb{K}$ test, $m, n \in \mathbb{N}$ és $A = (a_{i,j})_{m\times n} \in \mathbb{K}^{n\times m}$. A φ_A leképezés lineáris, mivel

- $\varphi(\mathbf{0}_{\mathbb{K}^m}) = A\cdot\mathbf{0}_{\mathbb{K}^m} = \mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}$,
- $\varphi(\mathbf{a}+\mathbf{a}') = A\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{a}') = A\cdot\mathbf{a} + A\cdot\mathbf{a}' = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{a}')$ $(\mathbf{a},\mathbf{a}' \in \mathbb{K}^m)$,
- $\varphi(\lambda\cdot\mathbf{a}) = A\cdot(\lambda\cdot\mathbf{a}) = \lambda\cdot(A\cdot\mathbf{a}) = \lambda\cdot\varphi(\mathbf{a})$ $(\mathbf{a}\in\mathbb{K}^m, \lambda\in\mathbb{K})$.

Tekintsük K^m-ben és K^n-ben is a standard bázist: $\mathcal{E}: e_1,\dots,e_m$ és $\mathcal{F}: f_1,\dots,f_n$. Ezekben a bázisokban φ_A mátrixa:

$$\mathcal{A}_\varphi^{(\mathcal{E},\mathcal{F})} = A,$$

mivel $\varphi_A(e_k) = A\cdot e_k = (a_{j,i})_{n\times m}\cdot(0,\dots,0,1,0,\dots,0) = (a_{1,k},\dots,a_{n,k})$ $(k \in \{1,\dots,m\})$.

A **4.5.4 Feladat** (a) részének megoldása. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ekkor tetszőleges $\mathbf{a} = (a,b)^T \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\varphi_A(\mathbf{a}) = A\cdot(a,b)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a-b, 2b, 2a+b).$$

A φ_A lineáris leképezés magtere:

$$\mathrm{Ker}\,(\varphi_A) = \left\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^2 \mid \varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{0}\right\} = \left\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^2 \mid \mathbf{a}\cdot A = \mathbf{0}\right\} = \left\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^2 \mid A\cdot\mathbf{a} = \mathbf{0}\right\} = U_A.$$

Határozzuk meg A lépcsős alakját:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor A rangja 2, így $\dim(U_A) = m - r(A) = 3 - 2 = 1$ és $U_A = \left\{(0,0,c)^T \mid c\in\mathbb{R}\right\} = [(0,0,1)^T]$. A φ_A lineáris leképezés képterét pedig az $\varphi_A(e_1), \varphi_A(e_2)$ vektorok generálják, ahol e_1, e_2 a standard bázis $\mathbb{R}^2$-ben:

$$\mathrm{Im}\,(\varphi_A) = [\varphi_A(e_1), \varphi_A(e_2)] = [(1,0,2)^T, (-1,2,1)^T].$$

4.5.5. Feladat. *Legyenek* $\mathbf{V}$ *és* $\mathbf{W}$ *a* $\mathbb{K}$ *test feletti vektorterek, valamint legyen* $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *lineáris leképzés. Mutassa meg, hogy*

(a) φ *pontosan szürjektív, ha* $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbf{W}$*;*

(b) φ *pontosan injektív, ha* $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{\mathbf{0_V}\}$.

4.5.6. Feladat. *Tetszőleges* $\mathbb{K}$ *testre és* m, n *pozitív egészekre határozza meg a* $\mathbb{K}^{m\times n}$ ($\mathbb{K}$ *feletti) vektortér dimenzióját.*

4.5.7. Feladat. *Legyenek* $\mathbf{V}$ *és* $\mathbf{W}$ *ugyanazon test feletti véges dimenziós vektorterek. Hány dimenziós a* $\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *lineáris leképezések tere?*

4.5.8. Feladat. *Igazoljuk, hogy minden* $\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *injektív lineáris leképezésnek van a lineáris leképezések körében balinverze.*[3]

4.5.9. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *tetszőleges véges dimenziós vektortér,* φ *pedig* $\mathbf{V}$ *egy lineáris transzformációja. Igazoljuk, hogy* φ*-re ekvivalensek az alábbi feltételek:*

(a) $r(\varphi) < \dim(\mathbf{V})$,

(b) *létezik* $\mathbf{V}$*-nek olyan nemtriviális* ψ *lineáris transzformációja, amelyre* $\varphi \circ \psi = O_{\mathbf{V}}$,

(c) *létezik* $\mathbf{V}$*-nek olyan nemtriviális* χ *lineáris transzformációja, amelyre* $\chi \circ \varphi = O_{\mathbf{V}}$.

4.5.10. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ $\mathbb{K}$ *feletti* n*-dimenziós vektortér,* $v_1, \ldots, v_n$ *tetszőleges vektorrendszer* $\mathbf{V}$*-ben, és tegyük fel, hogy* $\mathbb{K}$*-ban* $1 + 1 \neq 0$. *Mutassuk meg, hogy léteznek* $\mathbf{V}$*-nek olyan* $e_1, \ldots, e_n$*, illetve* $f_1, \ldots, f_n$ *bázisai, hogy*

$$v_1 = e_1 + f_1, \ldots, v_n = e_1 + f_n.$$

4.5.11. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ n*-dimenziós vektortér,* φ *pedig* $\mathbf{V}$*-nek olyan lineáris transzformációja, amelyre* $\varphi^2 = \varphi$ *teljesül. Bizonyítandó, hogy*

(a) $\operatorname{Im}(\varphi) = \{v \in \mathbf{V} \mid \varphi(v) = v\}$,

(b) $\mathbf{V} = \operatorname{Im}(\varphi) \oplus \operatorname{Ker}(\varphi)$,

(c) $\mathbf{V}$*-nek van olyan* $e_1, \ldots, e_n$ *bázisa, hogy* $\varphi(e_i) \in \{e_i, 0\}$ *minden* i*-re* $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

4.5.12. Feladat. *Legyenek* $\mathbf{V}$ *és* $\mathbf{W}$ *a* $\mathbb{K}$ *test feletti vektorterek,* $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *lineáris leképezés. Mutassa meg, hogy* φ *pontosan akkor injektív, ha megőrzi a lineáris függetlenséget, azaz valahányszor* $v_1, \ldots, v_k$ *lineáris független vektorrendszer* $\mathbf{V}$*-ben, mindannyiszor* $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k)$ *lineárisan független vektorrendszer* $\mathbf{W}$*-ben.*

4.5.13. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. *Tetszőleges* $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ *és* $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ $\mathbf{V}$*-beli vektorokra legyen*

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)^T.$$

Mutassa meg, hogy tetszőleges $v \in \mathbf{V}$ *vektorra a* $\sqcup \times v\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V},\ u \mapsto u \times v$ *leképezés lineáris. Határozza meg a* $\sqcup \times v$ *lineáris leképezés kép- és magterét.*

4.5.14. Feladat. *Legyen* $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *lineáris leképezés. Mutassa meg, hogy a* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y)^T \mapsto (x, y - \varphi(x))^T$ *leképezés izomorfizmus.*

4.5.15. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ n*-dimenziós vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett,* φ *lineáris transzformációja* $\mathbf{V}$*-nek. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(i) $\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Ker}(\varphi)$*;*

(ii) $\varphi \neq O_{\mathbf{V}}$, $\varphi^2 = O_{\mathbf{V}}$ *és* $\dim \operatorname{Im}(\varphi) = n/2$.

4.5.16. Feladat. *Legyen* α *tetszőleges valós szám,* $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ *és* $B = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$. *Hasonlóak-e az* A *és* B $\mathbb{C}$ *feletti mátrixok?*

4.5.17. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V} = \mathbb{Z}_2^3$ *a* $\mathbb{Z}_2$ *test feletti vektortér. Melyek lineárisak az alábbi* $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *leképezések közül. Lineáris leképezések esetén határozza meg a kép- és magteret is.*

(a) $\varphi\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ \bar{1} \end{pmatrix}$; (b) $\varphi\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix}$; (c) $\varphi\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\bar{1} \\ b+\bar{1} \\ c+\bar{1} \end{pmatrix}$.

[3] A $\psi\colon \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ lineáris leképrzés **balinverze** φ-nek, ha $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbf{V}}$.

4.5.18. Feladat. *Legyen* p *prímszám és* $\mathbf{V}$ *egy* $\mathbb{Z}_p$ *felett* 3*-dimenziós vektortér. A* $\varphi_p\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineáris transzformáció mátrixa* $\mathbf{V}$ *valamely bázisában*

$$\begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{3} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} \end{pmatrix}.$$

Mutassa meg, hogy φ_p *pontosan akkor izomorfizmus, ha* $p \neq 5$.

4.5.19. Feladat. *Határozza meg a* φ *lineáris leképezés mátrixát, ahol az* (c)–(f) *részekben* $\mathbb{K}$ *tetszőleges test:*

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ (a,b,c)^T \mapsto (a+b, b+c, c+a, a+b+c)^T$;

(b) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ (a,b,c,d)^T \mapsto (a+b+c, a+c+d, a+b+d)^T$;

(c) $\varphi\colon \mathbb{K}^{2\times 2} \to \mathbb{K},\ (a_{i,j})_{2\times 2} \mapsto a_{1,1} + a_{2,2}$;

(d) $\varphi\colon \mathbb{K}^{2\times 2} \to \mathbb{K}^{2\times 2},\ A \mapsto A^T$;

(e) $\varphi\colon \mathbb{K}_4[x] \to \mathbb{K}_3[x],\ f \mapsto f'$;

(f) $\varphi\colon \mathbb{K}_3[x] \to \mathbb{K}_4[x],\ f \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$;

4.5.20. Feladat. *Legyenek* $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ *és* $\mathbf{W}$ *ugyanazon* ($\mathbb{K}$) *test feletti véges dimenziós vektorterek, valamint* $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}(\mathbf{U},\mathbf{V})$ *és* $\gamma \in \mathrm{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})$. *Az* α, β *és* γ *lineáris leképezések mátrixa az* $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ *bázisokban rendre* $A = \mathcal{A}_\alpha^{(\mathcal{E},\mathcal{F})}$, $B = \mathcal{A}_\beta^{(\mathcal{E},\mathcal{F})}$ *és* $C = \mathcal{A}_\gamma^{(\mathcal{F},\mathcal{G})}$. *Határozza meg az* $\alpha+\beta$, $\lambda\cdot\alpha$ ($\lambda \in \mathbb{K}$) *és* $\gamma \circ \alpha$ *lineáris leképezések mátrixát a megadott bázisokban.*

4.5.21. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V} = \mathbb{R}[x,y]$ *és* $\mathbf{W} = \{f \in \mathbf{V} \mid f^* \leqslant 3\}$.

(a) *Adjon meg egy* $\mathcal{E}$ *bázist* $\mathbf{W}$*-ben.*

(b) *Mutassa meg, hogy a* $\mathbf{W} \to \mathbf{W},\ f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$ *leképezés lineáris, majd adja meg a mátrixát az* $\mathcal{E}$ *bázisban.*

(c) *Mutassa meg, hogy a* $\mathbf{W} \to \mathbf{W},\ f \mapsto x\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}$ *leképezés lineáris, majd adja meg a mátrixát az* $\mathcal{E}$ *bázisban.*

(d) *Mutassa meg, hogy a* $\Delta\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V},\ f \mapsto \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ *leképezés lineáris. Bizonyítsa be, hogy* $\mathrm{Ker}\,(\Delta)$ *nem véges dimenziós. Határozza meg a* $\mathbf{W} \cap \mathrm{Ker}\,(\Delta)$ *altér dimenzióját.*

4.5.22. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *és* $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V},\ M \mapsto MA$, $\psi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V},\ M \mapsto AMA$. *Adjon meg bázist a* $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ *és* $\mathrm{Ker}\,(\psi)$ *alterekben.*

4.5.23. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós vektortér és* $\pi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *olyan lineáris transzformáció, amelyre* $\pi^2 = \pi$ *teljesül, azaz legyen* π **projekció**. *Bizonyítsa be, hogy*

(a) $\mathbf{V} = \mathrm{Im}\,(\pi) \oplus \mathrm{Ker}\,(\pi)$;

(b) $\pi|_{\mathrm{Im}(\pi)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(\pi)}$, *azaz* $\pi(v) = v$, *ha* $v \in \mathrm{Im}\,(\pi)$;

(c) $\pi|_{\mathrm{Ker}(\pi)} = O_{\mathrm{Ker}(\pi)}$, *azaz* $\pi(v) = \mathbf{0}_\mathbf{V}$, *ha* $v \in \mathrm{Ker}\,(\pi)$.

4.5.24. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós vektortér és* $\pi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{V})$ *projekció. Mutassa meg, hogy*

$$\mathrm{Ker}\,(\pi) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{id}_\mathbf{V} - \pi)\,.$$

Ha $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{V})$, *akkor* $\mathrm{Im}\,(\pi)$ *pontosan akkor* φ*-invariáns, ha* $\pi \circ \varphi \circ \pi = \pi \circ \varphi$, *valamint* $\mathrm{Ker}\,(\pi)$ *pontosan akkor* φ*-invariáns, ha* $\pi \circ \varphi \circ \pi = \varphi \circ \pi$.[4]

4.5.25. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós vektortér és* $\pi_1, \dots, \pi_\ell$ *olyan projekciók* $\mathbf{V}$*-n, amelyekre* $\pi_j \circ \pi_i = \pi_i \circ \pi_j = O_V$ *teljesül* ($1 \leqslant i \neq j \leqslant \ell$). *Bizonyítsa be, hogy*

(a) $\pi = \pi_1 + \cdots + \pi_\ell$ *projekció* $\mathbf{V}$*-n;*

(b) $\mathrm{Im}\,(\pi_1) + \cdots + \mathrm{Im}\,(\pi_\ell) = \mathrm{Im}\,(\pi_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\,(\pi_\ell)$ *a* π *projekció képtere.*

4.5.26. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós vektortér, valamint* π *és* σ *projekciók* $\mathbf{V}$*-n. Bizonyítsa be, hogy*

(a) $\pi + \sigma$ *pontosan akkor projekció* $\mathbf{V}$*-n, ha* $\pi \circ \sigma + \sigma \circ \pi = O_\mathbf{V}$;

(b) $\pi + \sigma$ *pontosan akkor projekció* $\mathbf{V}$*-n, ha* $\pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi = O_\mathbf{V}$;

[4] A $\mathbf{V}$ vektortér $\mathbf{U}$ altere invariáns a $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{V})$ lineáris transzformációra vonatkozóan, ha $\varphi(\mathbf{U}) \subseteq \mathbf{U}$, azaz tetszőleges $u \in \mathbf{U}$ esetén $\varphi(u) \in \mathbf{U}$.

(c) $\pi - \sigma$ *pontosan akkor projekció* $\mathbf{V}$*-n, ha* $\pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi = \sigma$.

4.5.27. Feladat. *Mely* $\mathbb{K}^{n\times n}$*-beli mátrixok cserélhetők fel minden* $\mathbb{K}^{n\times n}$*-beli mátrixszal?*

4.5.28. Feladat. *Határozzuk meg azokat a lineáris transzformációkat (véges dimenziós vektortereken), amelyeknek a mátrixa minden bázisban ugyanaz.*

4.5.29. Feladat. *Mutassuk meg, hogy tetszőleges* $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ *mátrixhoz van olyan* C *nemelfajuló mátrix, amelyre* CA *lépcsős alakú.*

4.5.30. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy minden* $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ *mátrix előáll* PBQ *alakban, ahol* $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $Q \in \mathbb{K}^{m\times m}$ *nemelfajuló mátrixok és alkalmas* k *nemnegatív egészre* $B = (b_{i,j}) \in \mathbb{K}^{n\times m}$,

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1, & \textit{ha } i = j \leqslant k, \\ 0, & \textit{különben.} \end{cases}$$

Határozzon meg alkalmas P, B *és* Q *mátrixokat az* $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -9 & -17 & 16 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ *mátrix esetén.*

4.5.31. Feladat. *Bizonyítandó, hogy ha a* $\mathbb{K}$ *testben* $1 + 1 \neq 0$, *akkor bármely* $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *mátrixokra az*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \qquad \textit{és} \qquad \begin{pmatrix} A - B & 0 \\ 0 & A + B \end{pmatrix}$$

alakú $(2n \times 2n)$*-es mátrixok hasonlóak.*

4.5.32. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *tetszőleges* $\mathbb{K}$ *feletti vektortér. A* $\mathbf{V}$ *halmazon tekintsük a*

$$p(x, y, z) = x - y + z \qquad \textit{és} \qquad f_c(x, y) = cx + (1 - c)y \;\; (c \in \mathbb{K})$$

műveleteket. Bizonyítsuk be, hogy a $(\mathbf{V}; p, \{f_c \mid c \in \mathbb{K}\})$ *algebra részalgebrái pontosan a* $\mathbf{V}$ *altereinek a mellékosztályai, azaz az* $\mathbf{U} + v$ *alakú halmazok, ahol* $\mathbf{U}$ *altér* $\mathbf{V}$*-ben és* $v \in \mathbf{V}$.

5. Fejezet

Lineáris transzformációk

Lineáris transzformációk és mátrixok sajátértékei, sajátvektorai és karakterisztikus polinomja. Jordan-normálalak (ismertetés). Euklideszi terek, főtengely- és spektráltétel.

5.1. Euklideszi terek

Vektorok skalár vagy belső szorzata jól ismert fogalom a sík- vagy a térvektorok körében. Célunk az, hogy ezeket a fogalmakat más vektorterekre is kiterjesszük.

Standard belső szorzatnak nevezzük az $\mathbb{R}^n$ vektortéren a

$$\langle \sqcup, \sqcup \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \left\langle (u_1, \dots, u_n)^T, (v_1, \dots, v_n)^T \right\rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

leképezést. Milyen tulajdonságai vannak a standard belső szorzatnak? Legyenek $u = (u_1, \dots, u_n)^T$, $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ és $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ tetszőleges elemei $\mathbb{R}^n$-nek, valamint legyen $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor az alábbi tulajdonságok nyilvánvalóan teljesülnek:

$$\begin{aligned}
\langle u, v \rangle &= \sum_{j=1}^{n} u_j v_j = \sum_{j=1}^{n} v_j u_j = \langle v, u \rangle\,, \\
\langle u, \lambda v \rangle &= \sum_{j=1}^{n} u_j (\lambda v_j) = \lambda \sum_{j=1}^{n} u_j v_j = \lambda \langle u, v \rangle\,, \\
\langle u, v + w \rangle &= \sum_{j=1}^{n} v_j (v_j + w_j) = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j + \sum_{j=1}^{n} u_j w_j = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle\,.
\end{aligned}$$

Továbbá, $\langle u, u \rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j^2 \geqslant 0$ és $\langle u, u \rangle = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $u = \mathbf{0}$. Ezek lesznek azok a tulajdonságok, amelyek kívánatosak lesznek általában a belső szorzat esetén.

Legyen $\mathbf{V}$ **valós vektortér**, azaz vektortér a valós számtest felett. A

$$\langle \sqcup, \sqcup \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$$

leképezés **belső szorzat** $\mathbf{V}$-n, ha tetszőleges $u, v, w \in \mathrm{V}$ vektorokra és $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ skalárokra teljesülnek az alábbiak:

(a) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (szimmetria),

(b) $\langle u, \kappa \cdot v + \lambda \cdot w \rangle = \kappa \langle u, v \rangle + \lambda \langle u, w \rangle$ (linearitás),

(c) $\langle u, u \rangle \geqslant 0$ és $\langle u, u \rangle = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $u = \mathbf{0}_\mathrm{V}$ (pozitív definitség).

A (b) tulajdonság valójában az „első változóban való linearitás”, de a szimmetria következtében

$$\langle v, \kappa \cdot w + \lambda \cdot u \rangle = \langle \kappa \cdot w + \lambda \cdot u, v \rangle = \kappa \langle w, v \rangle + \lambda \langle u, v \rangle = \kappa \langle v, w \rangle + \lambda \langle v, u \rangle\,,$$

azaz a belső szorzat a „második változóban is lineáris”.[5]

A (véges dimenziós) valós $\mathbf{V}$ vektorteret **(valós) Euklideszi térnek** nevezzük, ha adott rajta egy belső szorzat. Mivel a továbbiakban csak valós Euklideszi terekkel foglalkozunk, ezért a „valós” jelzőt el fogjuk hagyni.

[5] Két apró változtatással valós vektorterekről könnyen áttérhetünk komplex vektorterekre. Legyen $\mathbf{V}$ a komplex számtest feletti vektortér. A

$$\langle \sqcup, \sqcup \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{C}$$

leképezés **(komplex) belső szorzat** $\mathbf{V}$-n, ha tetszőleges $u, v, w \in \mathrm{V}$ vektorokra és $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$ skalárokra teljesülnek az alábbiak:

(a) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ („konjugált szimmetria”),

(b) $\langle \kappa \cdot v + \lambda \cdot w, u \rangle = \overline{\kappa} \langle v, u \rangle + \overline{\lambda} \langle w, u \rangle$ (linearitás),

(c) $\langle u, u \rangle \geqslant 0$ és $\langle u, u \rangle = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $u = \mathbf{0}_\mathbf{V}$ (pozitív definitség).

5.1. Példa. *Az alábbi vektorterek Euklideszi teret alkotnak a megadott belső szorzatokkal.*

(a) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$ *és* $\langle \sqcup, \sqcup \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ *a standard belső szorzat* $\mathbf{V}$*-n;*

(b) $\mathbf{V} = \mathcal{C}[a, b]$ *az* $[a, b]$ *zárt intervallumon folytonos függvények vektortere és* $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ $(f, g \in \mathbf{V})$*;*

(c) $\mathbf{V} = \mathbb{R}_n[x]$ *a legfeljebb* n*-edfokú valós együtthatós polinomok vektortere és* $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ $(f, g \in \mathbf{V})$.

A $\mathbf{V}$ Euklideszi tér v vektorának **normája** $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. A v és w vektorok $d(v, w)$ **távolságán** a $v - w$ vektor normáját értjük, azaz $d(v, w) = \|v - w\|$.

A norma legalapvetőbb tulajdonságait foglalja össze az alábbi tétel.

5.2. Tétel. *Tetszőleges* $\mathbf{V}$ *Euklideszi tér bármely* v, w *vektoraira és* $\lambda \in \mathbb{R}$ *skalárra igazak az alábbiak:*

(a) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$*;*

(b) $|\langle v, w \rangle| \leqslant \|v\| \cdot \|w\|$ *(Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség);*

(c) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ *(Háromszög-egyenlőtlenség).*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{V}$ Euklideszi tér, $\lambda \in \mathbb{R}$ és $v, w \in \mathbf{V}$.

(a) Ekkor

$$\|\lambda \cdot v\| = \sqrt{\langle \lambda \cdot v, \lambda \cdot v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|\,.$$

(b) Mivel tetszőleges x valós számra

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|v + x \cdot w\|^2 \\ &= \langle v + x \cdot w, v + x \cdot w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle \cdot x + \langle w, w \rangle \cdot x^2, \end{aligned}$$

ezért $(2\langle v, w \rangle)^2 - 4\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle \leqslant 0$, aminek következtében $|\langle v, w \rangle| \leqslant \|v\|\,\|w\|$.

(c) Mivel tetszőleges vektor normája nemnegatív, ezért

$$\begin{aligned} \|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\| &\iff \|v + w\|^2 \leqslant (\|v\| + \|w\|)^2 \\ &\iff \langle v + w, v + w \rangle \leqslant \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| \\ &\iff \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + 2\langle v, w \rangle \leqslant \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| \\ &\iff \langle v, w \rangle \leqslant \|v\| \cdot \|w\|\,, \end{aligned}$$

ez utóbbi egyenlőtlenség pedig (b) következménye. □

A $\mathbf{V}$ Euklideszi tér v és w vektorai által **közbezárt szöge** az a $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ szög, amelyre

$$\cos\varphi = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

teljesül. A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség szerint

$$-\|v\| \cdot \|w\| \leqslant \langle v, w \rangle \leqslant \|v\| \cdot \|w\|\,,$$

ezért a közbezárt szög jóldefiniált.

5.1.1. Ortogonális bázisok

Legyen $\mathbf{V}$ Euklideszi tér. A v vektor **merőleges** vagy **ortogonális** a $w \in \mathbf{V}$ vektorra, ha $\langle v, w \rangle = 0$. A $v_1, \ldots, v_n \in \mathbf{V}$ vektorrendszer **ortogonális**, ha $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ $(1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$, azaz a vektorok páronként ortogonálisak.

5.3. Tétel. *Legyen* $\mathbf{V}$ *Euklideszi tér,* $v_1, \ldots, v_n \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$*. Ha a* $v_1, \ldots, v_n$ *vektorok páronként ortogonálisak, akkor lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok páronként ortogonálisak. Legyenek $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ olyan valós skalárok, amelyekre $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = \mathbf{0}$ teljesül. Ekkor tetszőleges k-ra $(1 \leqslant k \leqslant n)$:

$$0 = \langle v_k, \mathbf{0} \rangle = \langle v_k, \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \rangle = \alpha_1 \cdot \langle v_k, v_1 \rangle + \cdots + \alpha_k \cdot \langle v_k, v_k \rangle + \cdots + \alpha_n \cdot \langle v_k, v_n \rangle = \alpha_k \cdot \|v_k\|^2$$

teljesül, aminek következtében $\alpha_k = 0$, hiszen $\|v_k\| \neq 0$. Ezzel igazoltuk, hogy a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független. □

5.1.2. A Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció

Legyen $\mathbf{V}$ Euklideszi tér. A $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{V}$ vektorrendszer **ortonormált**, ha $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$, ahol δ_{ij} a **Kronecker-féle delta-szimbólum**.

5.4. Tétel (Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció)**.** *Legyen $v_1, \dots, v_n$ tetszőleges lineárisan független vektorrendszer a $\mathbf{V}$ Euklideszi térben. Ekkor van olyan $w_1, \dots, w_n$ ortonormált vektorrendszer $\mathbf{V}$-ben, amelyre*

$$[v_1, \dots, v_k] = [w_1, \dots, w_k]$$

teljesül tetszőleges k-ra $(1 \leqslant k \leqslant n)$. A

$$w_1' = v_1, \quad w_k' = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_j', v_k \rangle}{\langle w_j', w_j' \rangle} \cdot w_j' \ (2 \leqslant k \leqslant n)$$

vektorrendszer ortogonális, így a

$$w_k = \frac{1}{\|w_k'\|} \cdot w_k' \ (1 \leqslant k \leqslant n)$$

vektorrendszer eleget tesz a fentieknek.

Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{V}$ és W **Euklideszi terek izomorfak**, ha van olyan $\varphi \colon V \to W$ bijektív lineáris leképezés, amelyre megőrzi a belső szorzatot, azaz

$$\langle \varphi(v), \varphi(v') \rangle_W = \langle v, v' \rangle_V$$

teljesül tetszőleges $v, v' \in V$ vektorokra, ahol rendre $\langle \llcorner\lrcorner, \llcorner\lrcorner \rangle_V$, illetve $\langle \llcorner\lrcorner, \llcorner\lrcorner \rangle_W$ a belső szorzatok a $\mathbf{V}$, illetve a W Euklideszi terekben.

5.5. Tétel. *Legyen $\mathbf{V}$ n-dimenziós Euklideszi tér a $\langle \llcorner\lrcorner, \llcorner\lrcorner \rangle_V$ belső szorzattal. Ekkor $\mathbf{V}$ izomorf az $\mathbb{R}^n$ Euklideszi térrel, ahol a belső szorzat a standard belső szorzat.*

5.1.3. Ortogonális komplementum

Legyen X tetszőleges részhalmaza a $\mathbf{V}$ Euklideszi térnek. Az X részhalmaz **ortogonális komplementuma**

$$X^\perp = \{v \in \mathbf{V} \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ teljesül minden } u \in X\text{-re}\}.$$

5.6. Állítás. *Legyen $\mathbf{V}$ Euklideszi tér, $X \subseteq \mathbf{V}$ és $\mathbf{U}$ véges dimenziós altere $\mathbf{V}$-nek. Ekkor teljesülnek az alábbiak:*

(a) *$X^\perp$ altér $\mathbf{V}$-ben;*

(b) *$\mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp = V$;*

(c) *ha $u_1, \dots, u_k$ bázis U-ban, akkor $U^\perp = \{v \in \mathbf{V} \mid \langle u_j, v \rangle = 0$ teljesül minden j-re $(1 \leqslant j \leqslant k)\}$.*

5.7. Következmény. *Ha $\mathbf{V}$ véges dimenziós Euklideszi tér és $\mathbf{U}$ altér $\mathbf{V}$-ben, akkor*

(a) *$\left(\mathbf{U}^\perp\right)^\perp = \mathbf{U}$;*

(b) *$\dim(\mathbf{U}) + \dim(\mathbf{U}^\perp) = \dim(\mathbf{V})$.*

5.2. Bilineáris alakok

Legyen $\mathbf{V}$ valós vektortér. Az $F \colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ leképezés **bilineáris alak**, ha „mindkét változójában lineáris", azaz tetszőleges $u, v, w \in \mathbf{V}$ vektorokra és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalárokra

- $F(\alpha \cdot u + \beta \cdot v, w) = \alpha F(u, w) + \beta F(v, w)$,
- $F(u, \alpha \cdot v + \beta \cdot w) = \alpha F(u, v) + \beta F(u, w)$

teljesül. Az F bilineáris alak **szimmetrikus**, ha

- $F(u, v) = F(v, u)$ $(u, v \in \mathbf{V})$.

5.8. Példa. *Legyen $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$ és $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ekkor az $F \colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ leképezés bilineáris alak $\mathbf{V}$-n, amely pontosan akkor szimmetrikus, ha az A mátrix szimmetrikus.*

5.2.1. Reprezentáció mátrixokkal

Legyen F bilineáris alak a $\mathbf{V}$ vektortéren, valamint legyen $\mathcal{E}\colon e_1,\dots,e_n$ bázis $\mathbf{V}$-ben. Ha $v=\sum_{k=1}^n \alpha_k\cdot e_k$ és $w=\sum_{k=1}^n \beta_k\cdot e_k$, akkor

$$\begin{aligned}F(v,w)&=F(\alpha_1\cdot e_1+\cdots+\alpha_n\cdot e_n,\beta_1\cdot e_1+\cdots+\beta_n\cdot e_n)\\&=\sum_{k=1}^n \alpha_k F(e_k,\beta_1\cdot e_1+\cdots+\beta_n\cdot e_n)\\&=\sum_{k=1}^n \alpha_k\sum_{l=1}^n \beta_l F(e_k,e_l)\\&=\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n \alpha_k\beta_l F(e_k,e_l).\end{aligned}$$

Legyen F bilineáris alak a $\mathbf{V}$ vektortéren, valamint legyen $\mathcal{E}\colon e_1,\dots,e_n$ bázis $\mathbf{V}$-ben. Az

$$\mathcal{A}_F^{(\mathcal{E})}=\begin{pmatrix}F(e_1,e_1)&\cdots&F(e_1,e_n)\\\vdots&\ddots&\vdots\\F(e_n,e_1)&\cdots&F(e_n,e_n)\end{pmatrix}$$

mátrix az F **bilineáris alak mátrixa az $\mathcal{E}$ bázisban**.

5.9. Állítás. *Legyen F bilineáris alak a $\mathbf{V}$ vektortéren, valamint legyen $\mathcal{E}\colon e_1,\dots,e_n$ bázis $\mathbf{V}$-ben. Ekkor tetszőleges $v,w\in\mathbf{V}$ vektorokra:*

$$F(v,w)=[v]_{\mathcal{E}}^T\cdot\mathcal{A}_F^{(\mathcal{E})}\cdot[w]_{\mathcal{E}}$$

teljesül.

5.10. Állítás. *Legyen F bilineáris alak a $\mathbf{V}$ vektortéren, valamint legyenek $\mathcal{E}\colon e_1,\dots,e_n$ és $\mathcal{F}\colon f_1,\dots,f_n$ bázisok $\mathbf{V}$-ben. Ekkor*

$$\mathcal{A}_F^{(\mathcal{F})}=P^T\cdot\mathcal{A}_F^{(\mathcal{E})}\cdot P,$$

ahol $P=C_{\mathcal{E},\mathcal{F}}^{-1}=C_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$.

Bizonyítás. Legyen v és w tetszőleges $\mathbf{V}$-beli vektorok. Ekkor $[v]_{\mathcal{F}}=P^{-1}\cdot[v]_{\mathcal{E}}$ és $[w]_{\mathcal{F}}=P^{-1}\cdot[w]_{\mathcal{E}}$ következtében egyrészt

$$F(v,w)=[v]_{\mathcal{E}}^T\cdot\mathcal{A}_F^{(\mathcal{E})}\cdot[w]_{\mathcal{E}},$$

másrészt

$$\begin{aligned}F(v,w)&=[v]_{\mathcal{F}}^T\cdot\mathcal{A}_F^{(\mathcal{F})}\cdot[w]_{\mathcal{F}},\\&=\left(P^{-1}\cdot[v]_{\mathcal{E}}\right)^T\cdot\mathcal{A}_F^{(\mathcal{F})}\cdot\left(P^{-1}\cdot[w]_{\mathcal{F}}\right),\\&=[v]_{\mathcal{E}}^T\cdot\left(P^{-1}\right)^T\cdot\mathcal{A}_F^{(\mathcal{F})}\cdot P^{-1}\cdot[w]_{\mathcal{E}}.\end{aligned}$$

Így $\mathcal{A}_F^{(\mathcal{E})}=\left(P^{-1}\right)^T\cdot\mathcal{A}_F^{(\mathcal{F})}\cdot P^{-1}=\left(P^T\right)^{-1}\cdot\mathcal{A}_F^{(\mathcal{F})}\cdot P^{-1}$ miatt

$$\mathcal{A}_F^{(\mathcal{F})}=P^T\cdot\mathcal{A}_F^{(\mathcal{E})}\cdot P.$$

□

5.2.2. Kvadratikus alakok

Legyen F szimmetrikus bilineáris alak a $\mathbf{V}$ valós vektortéren. Ekkor a $Q\colon\mathbf{V}\to\mathbb{R}, Q(v)=F(v,v)$ leképezést az F-hez tartozó **kvadratikus alaknak** nevezzük.

A (mindkét változóban fennálló) linearitást felhasználva azonnal adódik az alábbi állítás, feltéve, hogy $1+1\neq 0$ teljesül a K testben, de a számtestek ilyen tulajdonságúak.

5.11. Állítás. *Legyen F szimmetrikus bilineáris alak a $\mathbf{V}$ vektortéren, és legyen Q a hozzá tartozó kvadratikus alak. Ekkor*

$$F(v,w)=\frac{1}{2}\left(Q(v+w)-Q(v)-Q(w)\right)$$

teljesül tetszőleges $v,w\in\mathbf{V}$ vektorokra.

5.12. Állítás. *Legyen* Q *kvadratikus alak a* $\mathbf{V}$ *valós vektortéren. Ekkor*

$$Q(\lambda \cdot v) = \lambda^2 Q(v)$$

teljesül tetszőleges $v \in \mathbf{V}$ *vektorra és* $\lambda \in \mathbb{R}$ *skalárra.*

5.13. Állítás. *Legyen* $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$ *vektortéren. Ekkor minden* $\mathbf{V}$*-n definiált kvadratikus alak a koordináták legfeljebb másodfokú homogén polinomjaként adható meg. Megfordítva, a koordináták minden legfeljebb másodfokú homogén polinomja kvadratikus alak* $\mathbf{V}$*.*

Legyen Q az $F\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris alakhoz tartozó kvadratikus alak. Ekkor a Q **kvadratikus alak mátrixa** (a $\mathbf{V}$ vektortér adott bázisában) az F bilineáris alak mátrixa (az adott bázisában).

5.14. Tétel (Sylvester Tehetetlenségi Tétele)**.** *Legyen* $\mathbf{V}$ n*-dimenziós valós vektortér,* F *szimmetrikus bilineáris alak* $\mathbf{V}$*-n és* Q *a hozzá tartozó kvadratikus alak.*
(Szimmetrikus bilineáris alakokra:)

(a) *Vannak olyan* k *és* m *nemnegatív egészek, valamint* $\mathbf{V}$*-nek olyan* $\mathcal{B}\colon w_1, \ldots, w_n$ *bázisa, hogy tetszőleges* i, j *indexekre* $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$*:*

$$F(w_i, w_j) = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ 1, & \text{ha } i = j \leqslant k, \\ -1, & \text{ha } k < i = j \leqslant k + m, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(b) *Ha* $\mathcal{A}'$ *és* $\mathcal{A}''$ *az* F *szimmetrikus bilineáris alak diagonális mátrixai az* $\mathcal{F}'$ *és* $\mathcal{F}''$ *bázisokban, amelyek főátlójában rendre* k, k' *pozitív,* m, m' *negatív érték van, akkor* $k = k'$ *és* $m = m'$*.*

(Kvadratikus alakokra:)

(c) *Vannak olyan* k *és* m *nemnegatív egészek, valamint* $\mathbf{V}$*-nek olyan* $\mathcal{F}\colon w_1, \ldots, w_n$ *bázisa, amelyben* Q *mátrixa diagonális mátrix, amelynek főátlójában* k *darab* 1*-es,* m *darab* (-1)*-es és* $n - k - m$ *darab* 0 *van.*

(d) *Ha* $\mathcal{A}'$ *és* $\mathcal{A}''$ *a* Q *kvadratikus alak diagonális mátrixai az* $\mathcal{F}'$ *és* $\mathcal{F}''$ *bázisokban, amelyek főátlójában rendre* k, k' *pozitív és* m, m' *negatív érték van, akkor* $k = k'$ *és* $m = m'$*.*

A 5.14 Tétel jelöléseit használva, legyen Q az F bilineáris alakhoz tartozó kvadratikus alak. Azt mondjuk, hogy az F **bilineáris alak rangja** $m+k$, **szignatúrája** $k-m$. A Q **kvadratikus alak rangja**, illetve **szignatúrája** az F bilineáris alak rangja, illetve szignatúrája.

A kvadratikus alakok az alábbi módon osztályozhatók. Legyen Q az $F\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris alakhoz tartozó kvadratikus alak. Azt mondjuk, hogy Q

- **pozitív definit**, ha $Q(v) \geqslant 0$ teljesül minden $v \in \mathbf{V}$ vektorra és $Q(v)$ pontosan akkor 0, ha $v = \mathbf{0}$;
- **negatív definit**, ha $Q(v) \leqslant 0$ teljesül minden $v \in \mathbf{V}$ vektorra és $Q(v)$ pontosan akkor 0, ha $v = \mathbf{0}$;
- **pozitív szemidefinit**, ha $Q(v) \geqslant 0$ teljesül minden $v \in \mathbf{V}$ vektorra;
- **negatív szemidefinit**, ha $Q(v) \leqslant 0$ teljesül minden $v \in \mathbf{V}$ vektorra;
- **indefinit**, ha Q helyettesítési értékei között negatív és pozitív érték is előfordul.

Legyen $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ekkor az

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\ell,1} & \cdots & a_{\ell,\ell} \end{vmatrix} \qquad (\ell = 1, \ldots, n)$$

determinánsokat az A mátrix **főminorainak** nevezzük.

5.15. Tétel. *Legyen* Q *az* $F\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ *szimmetrikus bilineáris alakhoz tartozó kvadratikus alak. A* Q *kvadratikus alak pontosan akkor pozitív definit, ha* Q *mátrixának minden főminora pozitív.*

5.16. Példa. *Legyen*

$$F((u_1,u_2,u_3)^T,(v_1,v_2,v_3)^T) = 2u_1v_1 - 4u_2v_1 + 6u_3v_1 - 4u_1v_2 + 11u_2v_2 - 6u_3v_2 + 6u_1v_3 - 6u_2v_3 + 29u_3v_3.$$

Ekkor F *bilineáris alak a* $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ *valós vektortéren, mivel* $F(u,v) = u^T A v$*, ahol* $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -4 & 11 & -6 \\ 6 & -6 & 29 \end{pmatrix}$*. Így* F *mátrixa az* $\mathcal{E}$: $(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T$ *bázisban* $\mathcal{A}_F^{(\mathcal{E})} = A$*. Az* A *mátrix szimmetrikus, így* F *is szimmetrikus. Az* F *szimmetrikus bilineáris alakhoz tartozó* Q *kvadratikus alak:*

$$Q((v_1,v_2,v_3)^T) = F((v_1,v_2,v_3)^T,(v_1,v_2,v_3)^T) = 2v_1^2 - 8v_2v_1 + 12v_3v_1 + 11v_2^2 + 29v_3^2 - 12v_2v_3.$$

Térjünk át az $\mathcal{F}$: $f_1 = (1/\sqrt{2},0,0)^T, f_2 = (2/\sqrt{3},1/\sqrt{3},0)^T, f_3 = (-7,-2,1)^T$ *bázisra. Az áttérés mátrixa, pontosabban az* $\mathcal{E}$ *bázisról az* $\mathcal{F}$ *bázisra történő áttérés mátrixa:*

$$C_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

melynek inverze $P = C_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{3} & -7 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*. Így* F *és* Q *mátrixa az* $\mathcal{F}$ *bázisban:*

$$\mathcal{A}_F^{(\mathcal{F})} = P^T \mathcal{A}_F^{(\mathcal{E})} P = P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

továbbá,

$$\begin{aligned} F(\kappa_1 \cdot f_1 + \kappa_2 \cdot f_2 + \kappa_3 \cdot f_3, \lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \lambda_3 \cdot f_3) &= (\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3)\mathcal{A}_F^{(\mathcal{F})}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)^T \\ &= \kappa_1\lambda_1 + \kappa_2\lambda_2 - \kappa_3\lambda_3, \\ Q(\kappa_1 \cdot f_1 + \kappa_2 \cdot f_2 + \kappa_3 \cdot f_3) &= (\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3)\mathcal{A}_F^{(\mathcal{F})}(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3)^T \\ &= \kappa_1^2 + \kappa_2^2 - \kappa_3^2. \end{aligned}$$

Amelyből „látszik", hogy a Q *kavdratikus alak indefinit.*

5.17. Példa. *Kvadratikus alak kanonikus diagonális alakjának meghatározása* **„teljes négyzetté való kiegészítéssel".** *Legyen* Q *az alábbi kvadratikus alak a* $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ *vektortéren:*

$$Q((x,y,z)^T) = 2x^2 + 4xy + 6xz - y^2 + 3yz + 7z^2.$$

Ekkor a Q*-t definiáló szimmetrikus bilineáris alak:*

$$\begin{aligned} F((u_1,u_2,u_3)^T,(v_1,v_2,v_3)^T) &= \frac{1}{2} \cdot \left(Q(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)^T - Q((u_1,u_2,u_3)^T) - Q((v_1,v_2,v_3)^T)\right) \\ &= 2u_1v_1 + 2u_2v_1 + 3u_3v_1 + 2u_1v_2 - u_2v_2 + \frac{3u_3v_2}{2} + 3u_1v_3 + \frac{3u_2v_3}{2} + 7u_3v_3. \end{aligned}$$

A Q *kvadratikus alak mátrixa a standard bázisban:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3/2 \\ 3 & 3/2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Az A *mátrix főminorai: 2, −6, −39/2, így az 5.15 Tétel szerint* Q *nem pozitív definit. Mivel*

$$\begin{aligned} Q((x,y,z)^T) &= 2x^2 + 4xy + 6xz - y^2 + 3yz + 7z^2 \\ &= 2(x^2 + 2xy + 3xz) - y^2 + 3yz + 7z^2 \\ &= 2\left(x + y + \frac{3z}{2}\right)^2 - 3\left(y + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{13z^2}{4} \\ &= \left(\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \frac{3\sqrt{2}}{2}z\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{2}z\right)^2 - \left(\sqrt{3}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2, \end{aligned}$$

ezért Q *indefinit kvadratikus alak. Most már „szép bázist" is találhatunk. Legyen* $x' = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \frac{3\sqrt{2}}{2}z$, $y' = \frac{\sqrt{13}}{2}z$ *és* $z' = \sqrt{3}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z$. *Ha a* v *vektor koordinátasora az* $\mathcal{E}$ *standard bázisban* $[v]_\mathcal{E} = (x, y, z)$, *akkor* $\mathcal{F}$ *legyen az a bázis, melyben* v *koordinátasora* $(x', y', z')^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{13}/2 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} (x, y, z)^T$. *Azaz* $C_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{13}/2 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$, *így* $P = C_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = C_{\mathcal{E},\mathcal{F}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 \end{pmatrix}$. *Ezért* Q *mátrixa az*

$$\mathcal{F} : f_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 0)^T, f_2 = (-2/\sqrt{13}, -1/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13})^T, f_3 = (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0)^T$$

bázisban:

$$\mathcal{A}_Q^{(\mathcal{F})} = P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.18. Példa. *Kvadratikus alak kanonikus diagonális alakjának meghatározása* **„elemi átalakítások" segítségével.** *A* Q *kvadratikus alak diagonális alakját elemi átalakítások segítségével is megkaphatjuk, az alábbi egyszerű észrevételeket felhasználva. Legyen* $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *és* $E_{i,j}^{(n)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *az a mátrix, amelyben az* i*-edik sor* j*-edik eleme* 1 *és a többi elem* 0. *Legyen*

$$\begin{aligned} X_{i,\alpha} &= E_n + (\alpha - 1) \cdot E_{i,i}^{(n)}, \\ X_{i,j,\alpha} &= E_n + \alpha \cdot E_{i,j}^{(n)}, \\ X_{i,j} &= E_n + E_{i,j}^{(n)} + E_{j,i}^{(n)} - E_{i,i}^{(n)} - E_{j,j}^{(n)}, \end{aligned}$$

ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ *és* $1 \leqslant i, j \leqslant n$. *Ekkor*

- *az* M *mátrix* i*-edik sorának* α*-val való szorzását eredményezi az* $X_{i,\alpha}$ *mátrixszal való bal oldali szorzás:* $X_{i,\alpha}M$;
- *az* M *mátrix* i*-edik oszlopának* α*-val való szorzását eredményezi az* $X_{i,\alpha}^T$ *mátrixszal való jobb oldali szorzás:* $MX_{i,\alpha}^T$;
- *az* M *mátrix* i*-edik sorához hozzáadjuk* M j*-edik sorának* α*-szeresét, az így kapott mátrix:* $X_{i,j,\alpha}M$;
- *az* M *mátrix* i*-edik oszlopához hozzáadjuk* M j*-edik oszlopának* α*-szeresét, az így kapott mátrix:* $MX_{i,j,\alpha}^T$;
- *az* M *mátrix* i*-edik és* j*-edik sorának cseréjével kapott mátrix:* $X_{i,j}M$;
- *az* M *mátrix* i*-edik és* j*-edik oszlopának cseréjével kapott mátrix:* $MX_{i,j}^T = MX_{i,j}$.

Legyen $P_1 = X_{2,1,-1}$, $P_2 = X_{3,1,-3/2}$, $P_3 = X_{3,2,-1/2}$, $P_4 = X_{1,1/\sqrt{2}}X_{2,1/\sqrt{3}}X_{3,2/\sqrt{13}}$, $P_5 = X_{2,3}$ *és* $P = (P_5P_4P_3P_2P_1)^T$. *Ekkor*

$$\begin{aligned} P^TAP &= P_5P_4P_3P_2P_1A(P_5P_4P_3P_2P_1)^T = P_5P_4P_3P_2P_1AP_1^TP_2^TP_3^TP_4^TP_5^T = P_5P_4P_3P_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -\frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & 7 \end{pmatrix} P_2^TP_3^TP_4^TP_5^T \\ &= P_5P_4P_3 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} P_3^TP_4^TP_5^T = P_5P_4 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{4} \end{pmatrix} P_4^TP_5^T = P_5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_5^T, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ahol $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 \end{pmatrix}$.

5.19. Példa. *Legyen* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *és* Q *az alábbi kvadratikus alak a* $V = \mathbb{R}^3$ *vektortéren:*

$$Q(v) = [v]_\mathcal{E}^T \cdot A \cdot [v]_\mathcal{E},$$

azaz $Q((x,y,z)^T) = 2xy+2xz+2yz$ $(x,y,z \in \mathbb{R})$. *Ekkor* Q *mátrixa az* $\mathcal{E} : e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ *standard bázisban* $\mathcal{A}_Q^{(\mathcal{E})} = A$. *Mivel* Q*-ban nincsen négyzetes tag, ezért először azt fogunk készíteni. Tekintsük az*

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

összefüggéssel definiált $\mathcal{F} : f_1, f_2, f_3$ *vektorrendszert. Mivel* $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, *ezért* $\mathcal{F}$ *bázis és* $C_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *A* $C_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ *mátrix inverze* $C_{\mathcal{E},\mathcal{F}}^{-1} = C_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Az* $\mathcal{F}$ *bázisban* Q *mátrixa*

$$C_{\mathcal{F},\mathcal{E}}^T \cdot \mathcal{A}_Q^{(\mathcal{E})} \cdot C_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

így $Q(x' \cdot f_1 + y' \cdot f_2 + z' \cdot f_3) = 2(x')^2 + 2x'y' + 4x'z' + 2y'z'$. *már tartalmaz négyzetes tagot. Elkezdődhet a teljes négyzetté kiegészítés:*

$$\begin{aligned} Q(x' \cdot f_1 + y' \cdot f_2 + z' \cdot f_3) &= 2(x')^2 + 2x'y' + 4x'z' + 2y'z' \\ &= \left(\sqrt{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + \sqrt{2}z'\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 - \left(\sqrt{2}z'\right)^2 \\ &= (x'')^2 - (y'')^2 - (z'')^2, \end{aligned}$$

ahol $x'' = \sqrt{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + \sqrt{2}z'$, $y'' = \frac{\sqrt{2}}{2}y'$, $z'' = \sqrt{2}z'$. *Így azt kapjuk, hogy*

$$\begin{aligned} (x'', y'', z'')^T &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot (x', y', z')^T \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x, y, z)^T \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot (x, y, z)^T. \end{aligned}$$

Legyen $\mathcal{G} : g_1, g_2, g_3$ *az a bázisa* $\mathbf{V}$*-nek, melyben az* $(x,y,z)^T$ *vektor koordinátasora* $(x'', y'', z'')^T$. *Ekkor*

$$C_{\mathcal{E},\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$C_{\mathcal{G},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix},$$

aminek következtében $g_1 = (\sqrt{2}/2, 0, 0)^T$, $g_2 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)^T$, $g_3 = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$. *A* Q *kvadratikus alak mátrixa a* $\mathcal{G}$ *bázisban*

$$C_{\mathcal{G},\mathcal{E}}^T \cdot A \cdot C_{\mathcal{G},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

így Q *indefinit kvadratikus alak.*

5.3. Lineáris transzformációk

5.3.1. Sajátértékek és sajátvektorok

Legyen $\mathbf{V}$ n-dimenziós vektortér a $\mathbb{K}$ test felett és $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris transzformációja $\mathbf{V}$-nek. Azt mondjuk, hogy a $v \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektor **sajátvektora** φ-nek, ha van olyan $\lambda \in K$, hogy $\varphi(v) = \lambda \cdot v$. A λ skalárt a v sajátvektorhoz tartozó **sajátértéknek** nevezzük.

5.20. Példa. *Legyen* $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ *és* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(a) *Ha* $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *az origó körüli* $\frac{\pi}{2}$*-szögű forgatás, akkor* φ*-nek nincs sajátvektora.*

(b) *Ha* $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *az origóra vonatkozó tükrözés, akkor* φ*-nek minden* $v \in \mathbf{V}\setminus\{\mathbf{0}\}$ *vektor sajátvektora a* $\lambda = -1$ *sajátértékkel.*

(c) *Ha* $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *az* x*-tengelyre való tükrözés, akkor* φ *sajátvektorai:*

- ◇ $(a, 0)$*, ahol* $a \in K$*,* $a \neq 0$ *(a hozzájuk tartozó sajátérték* $\lambda = 1$*),*
- ◇ $(0, b)$*, ahol* $b \in K$*,* $b \neq 0$ *(a hozzájuk tartozó sajátérték* $\lambda = -1$*).*

5.21. Állítás. *Legyen* φ *a* $\mathbb{K}$ *test feletti* $\mathbf{V}$ *vektortér lineáris transzformációja,* $\lambda \in \mathbb{K}$ *legyen* φ *egy sajátértéke. Ekkor*

$$U_\lambda = \{u \in \mathbf{V} \mid v\varphi = \lambda \cdot v\} = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{V}})$$

altere $\mathbf{V}$*-nek.*

Az $\mathbf{U}_\lambda$ altér a φ lineáris transzformáció λ sajátértékéhez tartozó **sajátaltere**. Az $\mathbf{U}_\lambda$ sajátaltér dimenzióját λ **geometriai multiplicitásának** nevezzük.

5.22. Állítás. *Legyen* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós vektortér* $\mathbb{C}$ *felett,* $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{V})$*. Ekkor a* φ *lineáris transzformációnak van legalább egy sajátértéke.*

Bizonyítás. Legyen v tetszőleges vektor $\mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$-ben. Legyen n a $\mathbf{V}$ vektortér dimenziója. Ekkor a $\varphi^\ell(v)$ $(0 \leqslant \ell \leqslant n)$ vektorok alkotta vektorrendszer nem lineárisan függetlenek:

$$a_0 \cdot v + a_1 \cdot \varphi(v) + \cdots + a_n \cdot \varphi^n(v) = \mathbf{0}$$

teljesül valamely $a_0, a_1, \ldots, a_n$ komplex számokra, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nem mind 0. Legyen $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{C}[x]$. Ekkor $f \neq 0$ és $f = c(x - r_1)\cdots(x - r_n)$ teljesül valamely $c, r_1, \ldots, r_n$ komplex számokra $(c \neq 0)$, így

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= a_0 \cdot v + a_1 \cdot \varphi(v) + \cdots + a_n \cdot \varphi^n(v)\\
&= f(\varphi)(v)\\
&= (c \cdot (\varphi - r_1 \cdot \mathrm{id}_V) \circ \cdots \circ (\varphi - r_n \cdot \mathrm{id}_V))(v).
\end{aligned}$$

Mivel $v \neq \mathbf{0}$, ezért van olyan $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, amelyre $((\varphi - r_1 \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{V}}) \circ \cdots \circ (\varphi - r_i \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{V}}))(v) \neq \mathbf{0}$ és $((\varphi - r_1 \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{V}}) \circ \cdots \circ (\varphi - r_{i+1} \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{V}}))(v) = \mathbf{0}$. Legyen $w = ((\varphi - r_1 \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{V}}) \circ \cdots \circ (\varphi - r_i \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{V}}))(v)$. Ekkor $w \neq \mathbf{0}$ és $w(\varphi - r_{i+1} \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{V}}) = \mathbf{0}$, ezért w sajátvektora φ-nek az r_{i+1} sajátértékkel. (Ld. 5.4.1 Feladat.) □

5.23. Tétel. *Legyen* φ *a* $\mathbb{K}$ *test feletti* $\mathbf{V}$ *vektortér lineáris transzformációja, melynek* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *különböző sajátértékei. Ekkor*

$$\mathbf{U}_{\lambda_1} + \cdots + \mathbf{U}_{\lambda_k} = \mathbf{U}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{U}_{\lambda_k}.$$

Bizonyítás. Az állítást k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás $k = 1$-re triviálisan teljesül. Tegyük fel, hogy $k \geqslant 2$ és $(k-1)$ darab sajátértékre az állítás igaz. Az indukciós feltevés szerint

$$\mathbf{U}_{\lambda_1} + \cdots + \mathbf{U}_{\lambda_{k-1}} = \mathbf{U}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{U}_{\lambda_{k-1}},$$

aminek következtében

$$\mathbf{U}_{\lambda_i} \cap (\mathbf{U}_{\lambda_1} + \cdots + \mathbf{U}_{\lambda_{i-1}}) = \{\mathbf{0}\} \tag{16}$$

teljesül tetszőleges i-re ($2 \leqslant i \leqslant k-1$). Azt fogjuk bizonyítani, hogy a (16) egyenlőség $i = k$ esetén is teljesül. Tegyük fel, hogy $u \in \mathbf{U}_{\lambda_k} \cap (\mathbf{U}_{\lambda_1} + \cdots + \mathbf{U}_{\lambda_{k-1}})$. Ekkor egyrészt $\varphi(u) = \lambda_k \cdot u$, másrészt $u = u_1 + \cdots + u_{k-1}$, ahol $u_i \in \mathbf{U}_{\lambda_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, k-1$). Így a

$$\lambda_k \cdot u = \varphi(u) = \varphi(u_1 + \cdots + u_{k-1}) = \lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_{k-1} \cdot u_{k-1}$$
$$\lambda_k \cdot u = \lambda_k \cdot (u_1 + \cdots + u_{k-1}) = \lambda_k \cdot u_1 + \cdots + \lambda_k \cdot u_{k-1}$$

egyenlőségek következtében

$$\mathbf{0} = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k) \cdot u_1}_{\in \mathbf{U}_{\lambda_1}} + \cdots + \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \cdot u_{k-1}}_{\in \mathbf{U}_{\lambda_{k-1}}} \in \mathbf{U}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{U}_{\lambda_{k-1}}.$$

Amiből $(\lambda_i - \lambda_k) \cdot u_i = \mathbf{0}$ ($i = 1, 2, \ldots, k-1$) következik. Mivel $\lambda_1 - \lambda_k, \ldots, \lambda_{k-1} - \lambda_k \neq 0$, ezért $u_1, \ldots, u_{k-1} = \mathbf{0}$. Ennek következtében $u = u_1 + \cdots + u_{k-1} = \mathbf{0}$. Azaz

$$\mathbf{U}_{\lambda_k} \cap (\mathbf{U}_{\lambda_1} + \cdots + \mathbf{U}_{\lambda_{k-1}}) = \{\mathbf{0}\}.$$

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. □

Legyen $\mathbf{V}$ m-dimenziós vektortér a $\mathbb{K}$ test felett és $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{V})$, melynek mátrixa az $\mathcal{F}\colon v_1, \ldots, v_m$ bázisban $A = \mathcal{A}_\varphi^{\mathcal{F}} \in \mathbb{K}^{m \times m}$. Legyen $e_1, \ldots, e_m$ a standard bázis $\mathbb{K}^m$-ben. Ekkor az

$$\iota\colon \mathbb{K}^m \to \mathbf{V},\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T \mapsto \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_m \cdot v_m$$

leképezés izomorfizmus a $\mathbb{K}^m$ és a $\mathbf{V}$ vektorterek között. Tekintsük az alábbi diagramot:

$$\begin{array}{cccc} & \mathbb{K}^m & \xrightarrow{\iota} & \mathbf{V} & \\ \varphi' & \downarrow & & \downarrow & \varphi \\ & \mathbb{K}^m & \xrightarrow[\iota]{} & \mathbf{V} & \end{array}$$

Legyen $\varphi' = \iota^{-1}\varphi\iota$. Ekkor $\varphi'\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ leképezés lineáris transzformációja $\mathbb{K}^m$-nek, melynek mátrixa A a standard bázisban, mivel

$$\varphi'(e_j) = (\iota^{-1}\varphi\iota)(e_j) = \iota^{-1}(\varphi(v_j)) = \iota^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_j\right) = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T \qquad (j = 1, \ldots, m).$$

5.24. Állítás. *A $\mathbf{c} \in \mathbb{K}^m$ vektor pontosan akkor sajátvektora φ'-nek a $\lambda \in \mathbb{K}$ sajátértékkel, ha $\iota(\mathbf{c}) \in \mathbf{V}$ sajátvektora φ-nek a $\lambda \in \mathbb{K}$ sajátértékkel.*

Tegyük fel, hogy $\lambda \in \mathbb{K}$ sajátértéke φ-nek. Ekkor van olyan $v \in \mathbf{V}$, $v \neq \mathbf{0}$ vektor, amelyre $v\varphi = \lambda \cdot v$ teljesül. Ekkor

$$\begin{aligned}[v\varphi]_{\mathcal{F}} = [\lambda \cdot v]_{\mathcal{F}} &\iff A \cdot [v]_{\mathcal{F}} = \lambda \cdot [v]_{\mathcal{F}} \\ &\iff A \cdot [v]_{\mathcal{F}} = [v]_{\mathcal{F}} \cdot (\lambda \cdot E_m) \\ &\iff (A - \lambda \cdot E_m) \cdot [v]_{\mathcal{F}} = \mathbf{0},\end{aligned}$$

ez utóbbi egyenlőség pedig pontosan azt jelenti, hogy az

$$(A - \lambda \cdot E_m) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{17}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, azaz

$$|A - \lambda \cdot E_m| = 0.$$

5.25. Állítás. *Legyen φ a $\mathbb{K}$ test feletti m-dimenziós $\mathbf{V}$ vektortér lineáris transzformációja, melynek mátrixa $\mathbf{V}$ valamely bázisban $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$. Ha $\lambda \in \mathbb{K}$ sajátértéke φ-nek, akkor λ megoldása az $|A - xE_m| = 0$ egyenletnek.*

A $|A - xE_m| \in \mathbb{K}[x]$ m-edfokú polinomot a φ lineáris transzformáció **karakterisztikus polinomjának** nevezzük és χ_φ-vel jelöljük.

Legyen $\mathbb{K}$ test és $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$ négyzetes mátrix. Az A **mátrix karakterisztikus polinomja** / **sajátértéke** / **sajátvektora** a

$$\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m,\ \mathbf{c} \mapsto A \cdot \mathbf{c}$$

lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja / sajátértéke / sajátvektora.

5.26. Következmény. *Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjai, és így sajátértékeik is megegyeznek.*

5.27. Példa. *Legyen* $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ *és* $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V},\ (a, b, c)^T \mapsto (7x - y + 8z, 6x - 3y + 5z, -5x + y - 6z)^T$. *Először meghatározzuk* φ *sajátértékeit. A* φ *lineáris transzformáció mátrixa az* $\mathcal{E}$ *standard bázisban:*

$$\mathcal{A}_\varphi^\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 8 \\ 6 & -3 & 5 \\ -5 & 1 & -6 \end{pmatrix},$$

így φ *karakterisztikus polinomja*

$$\chi_\varphi = |\mathcal{A}_\varphi^\mathcal{E} - x \cdot E_3| = -x^3 - 2x^2 + 4x + 8 = -(x-2)(x+2)^2,$$

ezért φ *sajátértékei* $\lambda = 2$ *és* $\lambda = -2$. *A sajátvektorok pedig a* (17) *homogén lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldásaiként adódnak.*

Ha $\lambda = 2$, *akkor* (17) *az alábbi lesz:*

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 8 \\ 6 & -5 & 5 \\ -5 & 1 & -8 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Az egyenletrendszer mátrixának lépcsős alakja: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 35/19 \\ 0 & 1 & 23/19 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *ezért a megoldások halmaza*

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_{A-2\cdot E_3} = \left\{ \left(-\frac{35}{19}c, -\frac{23}{19}c, c \right)^T \mid c \in \mathbb{R} \right\} = [(-35, -23, 19)^T],$$

a $\lambda = 2$ *sajátértékhez tartozó sajátvektorok pedig* $\alpha \cdot (-35, -23, 19)^T$ $(\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0)$. *Így a* $\lambda = 2$ *sajátértékhez egy darab lineárisan független sajátvektor tartozik (azaz a sajátvektorok alkotta vektorrendszer rangja* 1*).*

Ha $\lambda = -2$, *akkor* (17) *az alábbi lesz:*

$$\begin{pmatrix} 9 & -1 & 8 \\ 6 & -1 & 5 \\ -5 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Az egyenletrendszer mátrixának lépcsős alakja: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *ezért a megoldások halmaza*

$$\mathbf{U}_{-2} = \mathbf{U}_{A-(-2)\cdot E_3} = \{(-c, -c, c)^T \mid c \in \mathbb{R}\} = [(-1, -1, 1)^T],$$

a $\lambda = -2$ *sajátértékhez tartozó sajátvektorok pedig* $\alpha \cdot (-1, -1, 1)^T$ $(\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0)$. *Így a* $\lambda = -2$ *sajátértékhez is egy darab lineárisan független sajátvektor tartozik (azaz a sajátvektorok alkotta vektorrendszer rangja itt is* 1*).*

Válasszunk egy-egy sajátvektort az $\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_{-2}$ *sajátalterekből:* $u = (-35, -23, 19)^T$, $v = (-1, -1, 1)^T$*; és egészítsük ki bázissá:* $v_1 = u$, $v_2 = v$, $v_3 = (0, 0, 1)^T$ *bázis* $\mathbf{V}$*-ben, amelyben* φ *mátrixa*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1/4 \\ 0 & -2 & 3/4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

mivel $\varphi(v_1) = 2 \cdot v_1$, $\varphi(v_2) = (-2) \cdot v_2$ *és* $\varphi(v_3) = (8, 5, -6)^T = (-1/4) \cdot v_1 + (3/4) \cdot v_2 + (-2) \cdot v_3$. *Próbálkozzunk egy másik bázissal is. Tekintsük a* $v_1' = v_1$, $v_2' = v_2$, $v_3' = (1, 2, -1)^T$ *bázist. Mivel* $\varphi(v_1') = 2 \cdot v_1'$, $\varphi(v_2') = (-2) \cdot v_2'$ *és* $\varphi(v_3') = (-3, -5, 3)^T = \cdot v_2' + (-2) \cdot v_3'$, *ezért ebben a bázisban* φ *mátrixa:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ez a mátrix már majdnem diagonális, és később látni fogjuk, hogy φ*-nek ennél „szebb” mátrixa már nincs is.*

5.3.2. Minimálpolinom

5.28. Állítás. *Legyen* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett és* $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineáris transzformáció. Ekkor van olyan* $f \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$ *polinom, amelyre* $f(\varphi) = O_{\mathbf{V}}$.

Bizonyítás. Legyen $v_1, \ldots, v_n$ bázis $\mathbf{V}$-ben. Ha φ a zérus lineáris transzformáció, akkor bármely $f \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$ polinomra $f(\varphi) = O_{\mathbf{V}}$ teljesül. A továbbiakban tegyük fel, hogy $\varphi \neq O_{\mathbf{V}}$. Tetszőleges i-re ($i \in \{1, \ldots, n\}$) tekintsük a

$$v_i, \varphi(v_i), \ldots, \varphi^n(v_i)$$

vektorrendszert. Mivel a vektorrendszer elemszáma $(n+1)$, ezért a vektorrendszer lineárisan függő, így vannak olyan $a_0^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}$ skalárok, amelyek nem mind 0-ák és

$$a_0^{(i)} \cdot v_i + a_1^{(i)} \cdot \varphi(v_i) \cdots + a_n^{(i)} \cdot \varphi^n(v_i) = \mathbf{0}. \tag{18}$$

Legyen $p_i = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}x + \cdots + a_n^{(i)}x^n \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$ és legyen $p = p_1 \cdots p_n$. Ekkor (18) következtében

$$p_i(\varphi)(v_i) = (a_0^{(i)} \cdot \mathrm{id}_V + a_1^{(i)}\varphi + \cdots + a_n^{(i)}\varphi^n)(v_i) = \mathbf{0}.$$

Így $p(\varphi)(v_i) = (p_1(\varphi) \circ \cdots \circ p_n(\varphi))(v_i) = \mathbf{0}$ $(i = 1, \ldots, n)$ következtében $p(\varphi) = O_{\mathbf{V}}$.[6] □

A $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ **lineáris transzformáció minimálpolinomja** az a legalacsonyabb fokú $f \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$ főpolinom, amelyre $f(\varphi) = O_{\mathbf{V}}$ teljesül. Hasonlóan, a $\mathbb{K}$ test feletti A **négyzetes mátrix minimálpolinomja** az a legalacsonyabb fokú $f \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$ főpolinom, amelyre $f(A) = O_{\mathbf{V}}$ teljesül.

5.29. Állítás. *A minimál polinom jóldefiniált.*

A φ lineáris transzformáció minimálpolinomja m_φ, az A mátrix minimálpolinomja m_A.

5.30. Állítás. *Ha* $f \in \mathbb{K}[x]$ *és* $f(\varphi) = 0$, *akkor* $m_\varphi \mid f$.

5.31. Tétel. *Legyen* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett,* $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineáris transzformáció és* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Ekkor* λ *pontosan akkor sajátértéke* φ*-nek, ha* λ *gyöke az* m_φ *polinomnak.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy λ sajátértéke φ-nek, és legyen $m_\varphi = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + ax + a_0$. Ekkor van olyan $v \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektor, amelyre $v\varphi = \lambda \cdot v$ teljesül. Ezért $m_\varphi(\varphi) = O_{\mathbf{V}}$ következtében

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= m_\varphi(\varphi)(v) \\
&= (\varphi^n + a_{n-1} \cdot \varphi^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \varphi + a_0 \cdot \mathrm{id}_V)(v) \\
&= \lambda^n \cdot v + a_{n-1}\lambda^{n-1} \cdot v + \cdots + a_1\lambda \cdot v + a_0 \cdot v \\
&= m_\varphi(\lambda) \cdot v.
\end{aligned}$$

Mivel $v \neq \mathbf{0}$, ezért $m_\varphi(\lambda) = 0$. Azaz λ gyöke m_φ-nek.

Tegyük fel, hogy $\lambda \in \mathbb{K}$ gyöke m_φ-nek. Ekkor a Bézout-tétel szerint $m_\varphi = (x - \lambda)p$, ahol $p \in \mathbb{K}[x]$. Mivel $p^* < m_\varphi^*$, ezért $p(\varphi) \neq O_{\mathbf{V}}$. Legyen $v \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ olyan vektor, amelyre $w = p(\varphi)(v) \neq \mathbf{0}$. Ekkor

$$\mathbf{0} = m_\varphi(\varphi)(v) = ((\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \circ p(\varphi))(v) = (p(\varphi))(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(v) = w\varphi - \lambda \cdot w,$$

azaz w sajátvektora φ-nek a λ sajátértékkel. □

5.32. Tétel (Cayley–Hamilton-tétel)**.** *Ha* φ *lineáris transzformációja a* $\mathbb{K}$ *test feletti véges dimenziós* $\mathbf{V}$ *vektortérnek, akkor*

$$\chi_\varphi(\varphi) = 0.$$

5.33. Következmény. *Ha* φ *lineáris transzformációja a* $\mathbb{K}$ *test feletti véges dimenziós* $\mathbf{V}$ *vektortérnek, akkor* $m_\varphi \mid \chi_\varphi$.

Legyen φ lineáris transzformációja a $\mathbb{K}$ test feletti véges dimenziós $\mathbf{V}$ vektrotérnek, és legyen $\lambda \in \mathbb{K}$ sajátértéke φ-nek. Ekkor λ **algebrai multiplicitása** a χ_φ (vagy χ_A) karakterisztikus polinom λ gyökének multiplicitása.

[6] Mutassa meg, hogy tetszőleges $q, r \in \mathbb{K}[x]$ polinomokra $q(\varphi) \circ r(\varphi) = r(\varphi) \circ q(\varphi)$ teljesül. Ld.: **4.5.20 Feladat**.

5.34. Példa. *Tekintsük az*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -7 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrixokat és az általuk definiált $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto A \cdot v$ *és* $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto B \cdot v$ *lineáris transzformációkat. A* φ, *illetve* ψ *lineáris transzformációk mátrixai az* $\mathcal{E}$ *standard bázisban* $\mathcal{A}_\varphi^\mathcal{E} = A$, *illetve* $\mathcal{A}_\psi^\mathcal{E} = B$. *A karakterisztikus polinomok a következők:*

$$\chi_\varphi = \chi_A = -x^3 + x^2 + x - 1 = -(x+1)(x-1)^2,$$
$$\chi_\psi = \chi_B = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = -(x-1)^2(x-2).$$

A 5.33 Következmény szerint $m_\varphi \mid \chi_\varphi$ *és* $m_\psi \mid \chi_\psi$. *A lehetséges eseteket megvizsgálva azt kapjuk, hogy*

$$m_\varphi = m_A = (x+1)(x-1)^2,$$
$$m_\psi = m_B = (x-1)(x-2).$$

5.3.3. Diagonalizálhatóság

A $\mathbb{K}$ test feletti A négyzetes mátrix **diagonális**, ha a főátlóján kívüli elemek mind 0-ák. A továbbiakban tetszőleges $d_1, \dots, d_n \in K$ elemekre $\operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$-nel jelöljük azt a diagonális mátrixot, amelynek főátlójában rendre a $d_1, \dots, d_n$ elemek állnak.

Legyen $\mathbf{V}$ véges dimenziós valós vektortér, $\varphi \in \operatorname{Hom}(\mathbf{V})$. Azt mondjuk, hogy a φ **lineáris transzformáció diagonalizálható**, ha $\mathbf{V}$-nek van olyan bázisa, amelyben φ mátrixa diagonális. Az A valós **négyzetes mátrix diagonalizálható**, ha az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto A \cdot v$ lineáris transzformáció diagonalizálható.

5.35. Tétel. *Legyen* φ *a véges dimenziós valós* $\mathbf{V}$ *vektortér lineáris transzformációja. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(i) φ *diagonalizálható;*

(ii) $\mathbf{V}$*-nek van* φ *sajátvektoraiból álló bázisa;*

(iii) $\mathbf{V}$ *előáll* φ *sajátaltereinek direkt összegeként.*

Ha a φ *lineáris transzformáció mátrixa* $\mathbf{V}$ *valamely bázisában diagonális, akkor a mátrix diagonálisában* φ *sajátértékei szerepelnek, mégpedig mindegyik pontosan annyiszor, amennyi a hozzátartozó sajátaltér dimenziója.*

Bizonyítás. Legyen $n = \dim(\mathbf{V})$ és legyenek $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ a φ lineáris transzformáció sajátértékei, valamint legyenek rendre $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_k$ a hozzájuk tartozó sajátalterek.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Tegyük fel, hogy φ mátrixa a $\mathbf{V}$ vektortér $v_1, \dots, v_n$ bázisában $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Ekkor $\varphi(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$ teljesül minden i-re $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Tegyük fel, hogy $\mathbf{V}$-nek van sajátvektorokból álló bázisa: $v_1, \dots, v_n$. Legyen $I_\ell = \{i \mid v_i \in \mathbf{U}_\ell\}$, ahol $1 \leqslant \ell \leqslant k$. Ekkor az $I_1, \dots, I_k$ halmazok az $\{1, \dots, n\}$ halmaz egy osztályozását alkotják. Ha $v \in \mathbf{V}$, akkor

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{i \in I_\ell} \alpha_i \cdot v_i \in \mathbf{U}_1 + \cdots + \mathbf{U}_k$$

következtében $v \in \mathbf{U}_1 + \cdots + \mathbf{U}_k$. Így

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}_1 + \cdots + \mathbf{U}_k = \mathbf{U}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{U}_k$$

teljesül az 5.23 Tétel szerint.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Tegyük fel, hogy $\mathbf{V}$ az $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_k$ sajátalterek direkt összege. Válasszunk bázist az $\mathbf{U}_i$ alterekben:

$$v_1^{(\ell)}, \dots, v_{d_\ell}^{(\ell)} \quad \text{bázis } \mathbf{U}_\ell\text{-ben} \quad (1 \leqslant \ell \leqslant k).$$

Ekkor a $v_i^{(\ell)}$ $(1 \leqslant \ell \leqslant k,\ 1 \leqslant i \leqslant d_\ell)$ vektorrendszer bázis $\mathbf{V}$-ben.

Ezzel igazoltuk a tételben szereplő állítások ekvivalenciáját.

A kiegészítés bizonyítása: Legyen $v_1, \dots, v_n$ olyan bázisa $\mathbf{V}$-nek, amelyben φ mátrixa diagonális. Jelöljük m_ℓ-lel a λ_ℓ sajátérték előfordulásainak számát ebben a diagonális mátrixban $(1 \leqslant \ell \leqslant k)$. Ekkor a $v_1, \dots, v_n$ bázisvektorok közül pontosan m_ℓ darab vektor tartozik a λ_ℓ sajátértékhez, aminek következtében $\dim(\mathbf{U}_\ell) \geqslant m_\ell$ $(1 \leqslant \ell \leqslant k)$. Mivel $m_1 + \cdots + m_k = n$ és $\dim(\mathbf{U}_1) + \cdots + \dim(\mathbf{U}_k) = \dim(\mathbf{U}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{U}_k) = \dim(\mathbf{V}) = n$, ezért $\dim(\mathbf{U}_\ell) = m_\ell$ $(1 \leqslant \ell \leqslant k)$.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. □

5.36. Példa. (a) *Legyen* $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *és* $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $(a,b,c,d)^T \mapsto A \cdot (a,b,c,d)^T$. *Ekkor* φ *mátrixa a standard bázisban* A, *így karakterisztikus polinomja*

$$\chi_\varphi = |A - x \cdot E_4| = \begin{pmatrix} 7-x & -3 & -2 & -3 \\ 3 & -x & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -x & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -x \end{pmatrix} = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = (x-1)^2(x-2)(x-3),$$

sajátértékei: 1, 2 *és* 3. *A sajátértékekhez tartozó sajátalterek pedig a következők:*

$$\mathbf{U}_1 = \left\{(a,a,0,a)^T \mid a \in \mathbb{R}\right\} = [(1,1,0,1)^T],$$
$$\mathbf{U}_2 = \left\{(a,0,a,a)^T \mid a \in \mathbb{R}\right\} = [(1,0,1,1)^T],$$
$$\mathbf{U}_3 = \left\{(a,a/2,a/2,a/2)^T \mid a \in \mathbb{R}\right\} = [(2,1,1,1)^T].$$

Mivel $\mathbf{V} \neq \mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2 \oplus \mathbf{U}_3$, *ezért* φ *nem diagonalizálható.*

(b) *Legyen* $A = \begin{pmatrix} -18 & 10 & 10 & 10 \\ -10 & 7 & 5 & 5 \\ -10 & 5 & 7 & 5 \\ -10 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ *és* $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $(a,b,c,d)^T \mapsto A \cdot (a,b,c,d)^T$. *Ekkor* φ *mátrixa a standard bázisban* A, *így karakterisztikus polinomja*

$$\chi_\varphi = |A - x \cdot E_4| = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 28x - 24 = (x+3)(x-2)^3,$$

sajátértékei: -3 *és* 2. *A sajátértékekhez tartozó sajátalterek pedig a következők:*

$$\mathbf{U}_{-3} = \left\{(a,a/2,a/2,a/2)^T \mid a \in \mathbb{R}\right\} = [(2,1,1,1)^T],$$
$$\mathbf{U}_2 = \left\{(a,b,c,2a-b-c)^T \mid a \in \mathbb{R}\right\} = [(1,0,0,2)^T, (0,1,0,-1)^T, (0,0,1,-1)^T],$$

Mivel $V = \mathbf{U}_{-3} \oplus \mathbf{U}_2$, *ezért* φ *diagonalizálható,* φ *mátrixa az*

$$\mathcal{F}\colon (2,1,1,1)^T, (1,0,0,2)^T, (0,1,0,-1)^T, (0,0,1,-1)^T$$

bázisban

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \cdot A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.3.4. Önadjungált lineáris transzformációk

Legyen $\mathbf{V}$ véges dimenziós valós Euklideszi tér (a $\langle \llcorner\lrcorner, \llcorner\lrcorner \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to V$ belső szorzattal), $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$. A φ lineáris transzformáció **ortogonális**, ha megőrzi a belső szorzatot, azaz tetszőleges $v, w \in \mathbf{V}$ vektorok esetén

$$\langle v, w \rangle = \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle .$$

5.37. Állítás. *Legyen* φ *a* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós valós Euklideszi tér lineáris transzformációja. Ekkor* φ *pontosan akkor ortogonális, ha valahányszor* $e_1, \ldots, e_n$ *ortonormális bázis* $\mathbf{V}$*-ben, mindannyiszor* $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ *ortonormált vektorrendszer.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy φ ortogonális. Legyen $e_1, \ldots, e_n$ ortonormális bázis $\mathbf{V}$-ben. Ekkor tetszőleges i és j indexekre $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$

$$\langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j},$$

azaz az $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ vektorrendszer ortonormált.

Tegyük fel, hogy valahányszor $e_1, \dots, e_n$ ortonormális bázis $\mathbf{V}$-ben, mindannyiszor $e_1\varphi, \dots, e_n\varphi$ ortonormált vektorrendszer. Legyen $v_1, \dots, v_n$ bázis $\mathbf{V}$. A Gram–Schmidt-féle eljárással kaphatunk egy ortonormált $w_1, \dots, w_n$ bázist. Legyenek v és w tetszőleges vektorok $\mathbf{V}$-ben, $v = \alpha_1 \cdot w_1 + \cdots + \alpha_n \cdot w_n$ és $w = \beta_1 \cdot w_1 + \cdots + \beta_n \cdot w_n$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(v), \varphi(w)\rangle &= \langle \varphi(\alpha_1 \cdot w_1 + \cdots + \alpha_n \cdot w_n), \varphi(\beta_1 \cdot w_1 + \cdots + \beta_n \cdot w_n)\rangle \\
&= \langle \alpha_1 \cdot \varphi(w_1) + \cdots + \alpha_n \cdot \varphi(w_n), \beta_1 \cdot \varphi(w_1) + \cdots + \beta_n \cdot \varphi(w_n)\rangle \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_i \beta_j \langle \varphi(w_i), \varphi(w_j)\rangle \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_i \beta_j \delta_{i,j} \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_i \beta_i \langle w_i, w_j\rangle \\
&= \langle \alpha_1 \cdot w_1 + \cdots + \alpha_n \cdot w_n, \beta_1 \cdot w_1 + \cdots + \beta_n \cdot w_n\rangle \\
&= \langle v, w\rangle,
\end{aligned}$$

mivel a feltételünk következtében a $\varphi(w_1), \dots, \varphi(w_n)$ vektorrendszer is ortonormált. □

5.38. Állítás. *Legyen φ a $\mathbf{V}$ véges dimenziós valós Euklideszi tér lineáris transzformációja, melynek mátrixa az $\mathcal{E}$: $e_1, \dots, e_n$ ortonormális bázisban $A = \mathcal{A}_\varphi^{\mathcal{E}}$. Ekkor φ pontosan akkor ortogonális, ha $A^{-1} = A^T$.*

Bizonyítás. Legyen $A = (a_{i,j})_{n\times n}$. Mindenek előtt vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}
(AA^T)_{i,j} &= \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell} a_{j,\ell} \\
&= \sum_{1 \leqslant \ell,\ell' \leqslant n}^{n} a_{i,\ell} a_{j,\ell'} \delta_{\ell,\ell'} \\
&= \sum_{1 \leqslant \ell,\ell' \leqslant n}^{n} a_{i,\ell} a_{j,\ell'} \langle e_\ell, e_{\ell'}\rangle \\
&= \langle a_{i,1} \cdot e_1 + \cdots + a_{i,n} \cdot e_n, a_{j,1} \cdot e_1 + \cdots + a_{j,n} \cdot e_n\rangle \\
&= \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j)\rangle
\end{aligned}$$

teljesül tetszőleges i és j indexekre ($1 \leqslant i, j \leqslant n$), ahol $(AA^T)_{i,j}$ az AA^T mátrix i-edik sorának j-edik eleme. Tegyük fel, hogy φ ortogonális. Ekkor a 5.37 Állítás következtében az $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ vektorrendszert ortonormált, így $\langle \varphi(e_i), \varphi(e_j)\rangle = \delta_{i,j}$, aminek következtében

$$(AA^T)_{i,j} = \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j)\rangle = \delta_{i,j}$$

adódik, azaz $AA^T = E_n$. Így A invertálható és $A^{-1} = A^T$.

Tegyük fel, hogy $A^{-1} = A^T$ teljesül az A mátrixra, azaz $AA^T = E_n$. Legyenek $v = \alpha_1 \cdot e_1 + \cdots + \alpha_n \cdot e_n$ és $w = \beta_1 \cdot e_1 + \cdots + \beta_n \cdot e_n$ tetszőleges $\mathbf{V}$-beli vektorok. Ekkor egyrészt

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i,$$

másrészt

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(v), \varphi(w)\rangle &= \langle \alpha_1 \cdot \varphi(e_1) + \cdots + \alpha_n \cdot \varphi(e_n), \beta_1 \cdot \varphi(e_1) + \cdots + \beta_n \cdot \varphi(e_n)\rangle \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_i \beta_j \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j)\rangle \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_i \beta_j (AA^T)_{i,j} \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_i \beta_j \delta_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i,
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $(AA^T)_{i,j} = \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. Így $\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ teljesül tetszőleges $v, w \in \mathbf{V}$ vektorokra, azaz φ ortogonális. □

5.39. Állítás. *Legyen φ a $\mathbf{V}$ Euklideszi tér lineáris transzformációja. Ekkor pontosan egy olyan $\varphi^* \in \mathrm{Hom}(\mathbf{V})$ lineáris transzformáció van, amelyre*

$$\langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi^*(w) \rangle$$

teljesül tetszőleges $v, w \in \mathbf{V}$ vektorokra.

Bizonyítás. (Unicitás) Tegyük fel, hogy a ψ_1 és ψ_2 lineáris transzformációkra

$$\langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \psi_1(w) \rangle \quad \text{és} \quad \langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \psi_2(w) \rangle$$

teljesül tetszőleges $v, w \in \mathbf{V}$ vektorokra. Ekkor $\langle v, \psi_1(w) \rangle = \langle v, \psi_2(w) \rangle$, azaz $\langle v, (\psi_1 - \psi_2)(w) \rangle = 0$ teljesül tetszőleges $v, w \in \mathbf{V}$ vektorokra, így tetszőleges $w \in \mathbf{V}$-re $(\psi_1 - \psi_2)(w) = \mathbf{0}$, aminek következtében $\psi_1 = \psi_2$.

(Egzisztencia) Legyen $\mathcal{E}\colon e_1, \ldots, e_n$ ortonormális bázis $\mathbf{V}$-ben, melyben φ mátrixa A. Legyen $\varphi^*\colon V \to V$ az a lineáris transzformáció melynek mátrixa A^T az $e_1, \ldots, e_n$ bázisban. Ekkor

$$\langle \varphi(v), w \rangle = (A \cdot [v]_{\mathcal{E}})^T \cdot [w]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{E}}^T \cdot (A^T \cdot [w]_{\mathcal{E}}) = \langle v, \varphi^*(w) \rangle .$$

□

A fenti (egyértelműen meghatározott) φ^* lineáris transzformációt a φ lineáris transzformáció **adjungáltjának** nevezzük.

5.40. Állítás. *Legyen $\mathcal{E}\colon e_1, \ldots, e_n$ ortonormális bázis a véges dimenziós $\mathbf{V}$ Euklideszi térben, valamint legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekkor*

$$\mathcal{A}_{\varphi^*}^{\mathcal{E}} = \left(\mathcal{A}_{\varphi}^{\mathcal{E}}\right)^T .$$

A φ lineáris transzformáció **önadjungált**, ha $\varphi^* = \varphi$.

5.41. Tétel (Főtengely-tétel)**.** *Legyen $\mathbf{V}$ valós Euklideszi tér.*

(a) *A $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris transzformációnak pontosan akkor létezik ortonormált sajátbázisa (azaz $\mathbf{V}$-nek olyan ortonormált bázisa, amely φ sajátvektoraiból áll), ha φ önadjungált.*

(b) *Ha A egy $(n \times n)$-es valós szimmetrikus mátrix, és a Q mátrix ortogonálisan diagonalizálja, azaz $Q^T A Q = D$ diagonális, akkor az $\mathbf{y} = Q\mathbf{x}$ helyettesítés az $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ kvadratikus alakot az $\mathbf{y}^T D \mathbf{y}$ kvadratikus alakba transzformálja, amely kifejtve csak négyzetes tagokat tartalmaz, azaz*

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} = \lambda_1 \cdot y_1^2 + \cdots + \lambda_n \cdot y_n^2$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ az A mátrix sajátértékei.

5.42. Tétel (Spektráltétel szimmetrikus mátrixokra)**.** *Legyen A $(n \times n)$-es szimmetrikus mátrix $\mathbb{R}$ felett, ekkor a következők teljesülnek:*

(a) *A-nak (multiplicitással számolva) n darab sajátértéke van;*

(b) *a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója, azaz λ geometriai multiplicitása megegyezik λ algebrai multiplicitásával;*

(c) *a különböző sajátalterekhez tartozó sajátvektorok ortogonálisak;*

(d) *A ortogonálisan diagonalizálható.*

5.3.5. Alkalmazások (másodrendű görbék és felületek)

5.43. Példa. *Legyen $g = 4x^2 + 2xy + 14x + 4y^2 + 26y + 2 \in \mathbb{R}[x, y]$, és tekintsük a $g(x, y) = 0$ $(x, y \in \mathbb{R})$ egyenlettel definiált $\mathfrak{G}$ másodrendű görbét. A g polinom a*

$$g = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 = 0$$

alakban is felírható. Legyen $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ *és* $\mathbf{r} = (7, 13)^T$*. Először az elsőfokú tagoktól „szabadulunk meg" az* x *és* y *változók alkalmas helyettesítésével. Legyen* $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$*, ekkor*

$$\begin{aligned} g(x,y) &= (x'+x_0, y'+y_0) \cdot A \cdot (x'+x_0, y'+y_0)^T + 2\mathbf{r}^T \cdot (x'+x_0, y'+y_0)^T + 2 \\ &= (x', y') \cdot A \cdot (x', y')^T + \big((x_0, y_0) \cdot A \cdot (x_0, y_0)^T + 2\mathbf{r}^T \cdot (x_0, y_0)^T + 2\big) + 2\big((x_0, y_0) \cdot A + \mathbf{r}^T\big)(x', y')^T, \end{aligned}$$

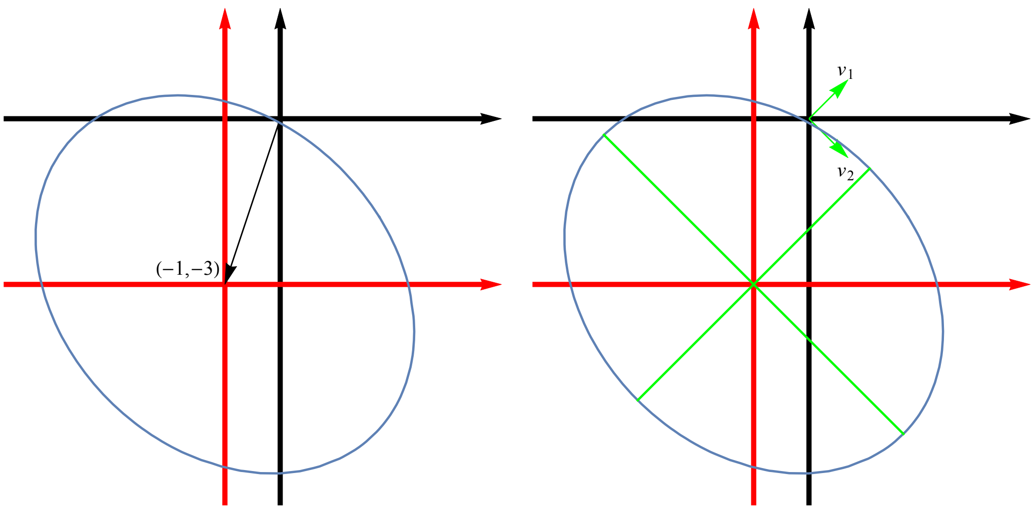
amely pontosan akkor nem tartalmaz elsőfokú tagot, ha $(x_0, y_0) \cdot A = -\mathbf{r}^T$*, azaz* $A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\mathbf{r}$*. Jelen esetben az* $x_0 = -1$*,* $y_0 = -3$ *választás lesz megfelelő:*

$$g(x,y) = (x', y')A(x', y')^T - 44 = 4(x')^2 + 2x'y' + 4(y')^2 - 44.$$

Tekintsük a $Q((x', y')^T) = (x', y')A(x', y')^T$ *kvadratikus alakot, melynek mátrixa a standard bázisban éppen* A*. Az* A *mátrix sajátértékei az* $|A - x \cdot E_2| = x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$ *polinom valós gyökei:* $\lambda_1 = 3$ *és* $\lambda_2 = 5$*. Válasszunk hozzájuk egy-egy sajátvektort, amelyeknek hossza egységnyi:* $v_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T$ *és* $v_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$*. Legyen* $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$*. Ekkor* $P^{-1} = P^T$ *és* Q *mátrixa az* $\mathcal{F} : v_1, v_2$ *ortonormált bázisban:*

$$\mathcal{A}_Q^{(\mathcal{F})} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

aminek következtében $Q(x'' \cdot v_1 + y'' \cdot v_2) = 3(x'')^2 + 5(y'')^2$*. Ezért a* $\mathfrak{G}$ *görbe ellipszis, melynek középpontja* (x_0, y_0)*, főtengelyeinek irányvektorai:* v_1 *és* v_2 *(Főtengely-tétel!), a nagy- és kistengelyek hosszai pedig:* $\sqrt{\frac{44}{3}}$ *és* $\sqrt{\frac{44}{5}}$ *(ld. 1. ábra).*



1. ábra. Eltolás és forgatás

5.44. Példa. *Lássunk egy bonyolultabb példát. Legyenek* a *és* b *valós paraméterek, valamint legyen* $g = 2x^2 + 4xy + (a+2)y^2 + 4x + 2(2-b)y - 12 \in \mathbb{R}[x,y]$*. Az* a *és* b *paraméterek függvényében határozzuk meg a*

$$\mathfrak{G}_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$$

görbéket. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a+2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r} = (2, 2-b)^T$ *és* $c = -12$*. Ekkor* $g(x,y) = (x,y) \cdot A \cdot (x,y)^T + 2 \cdot \mathbf{r}^T \cdot (x,y)^T + c$*. Tekintsük az* $A\mathbf{x} = -\mathbf{r}$ *egyenletet, melynek bővített mátrixa és lépcsős alakja:*

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -2 \\ 2 & a+2 & b-2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & a & b \end{array}\right).$$

1. eset: $a \neq 0$. *Ekkor az* $A\mathbf{x} = -\mathbf{r}$ *egyenletnek pontosan egy megoldása van:* $x_0 = -1 - b/a$, $y_0 = -b/a$. *Legyen* $x = x' + x_0$ *és* $y = y' + y_0$, *ekkor*

$$\begin{aligned} g(x,y) &= (x'+x_0, y'+y_0) \cdot A \cdot (x'+x_0, y'+y_0)^T + 2 \cdot \mathbf{r} \cdot (x'+x_0, y'+y_0)^T + c \\ &= 2(x')^2 + 4x'y' + (a+2)(y')^2 - 14 - \frac{b^2}{a}. \end{aligned}$$

Azaz ebben az „új” koordinátarendszerben (melynek kezdőpontja az (x_0, y_0) *pont) a* $\mathfrak{G}_{a,b}$ *görbe egyenlete:* $2(x')^2 + 4x'y' + (a+2)(y')^2 - 14 - \frac{b^2}{a} = 0$. *Tekintsük a*

$$Q((x',y')^T) = 2(x')^2 + 4x'y' + (a+2)(y')^2$$

kvadratikus alakot, melynek mátrixa a standard bázisban A. *Az* A *mátrix sajátértékei a* $\chi_A = x^2 - (a+4)x + 2a$ *polinom gyökei:*

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(a + 4 + \sqrt{a^2+16}\right), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(a + 4 - \sqrt{a^2+16}\right).$$

Sajátvektorokat az $(A - \lambda_i \cdot E_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ $(i = 1, 2)$ *homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásával nyerhetünk:*

$$A - \lambda_i \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda_i & 2 \\ 2 & a+2-\lambda_i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2+a-\lambda_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ezért a λ_i*-hez tartozó egyik sajátvektor* $v_i = (\lambda_i - a - 2, 2)^T$ $(i = 1, 2)$. *Ekkor a*

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{-a+\lambda_1-2}{\sqrt{(-a+\lambda_1-2)^2+4}}, \frac{2}{\sqrt{(-a+\lambda_1-2)^2+4}} \right), \\ w_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{-a+\lambda_2-2}{\sqrt{(-a+\lambda_2-2)^2+4}}, \frac{2}{\sqrt{(-a+\lambda_2-2)^2+4}} \right) \end{aligned}$$

ortonormált bázisban Q *mátrix diagonális mátrix, mégpedig a* $P^T \cdot A \cdot P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ *mátrix, ahol*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-a+\lambda_1-2}{\sqrt{(-a+\lambda_1-2)^2+4}} & \frac{2}{\sqrt{(-a+\lambda_1-2)^2+4}} \\ \frac{-a+\lambda_2-2}{\sqrt{(-a+\lambda_2-2)^2+4}} & \frac{2}{\sqrt{(-a+\lambda_2-2)^2+4}} \end{pmatrix}^T.$$

Így $Q(x'' \cdot w_1 + y'' \cdot w_2) = \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2$, *a görbe egyenlete ebben az eltolt-elforgatott koordinátarendszerben:*

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 = 14 + \frac{b^2}{a}.$$

- *Ha* $a > 0$, *akkor* $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, *így ellipszist fogunk kapni.*
- *Ha* $a < 0$, *akkor* $\lambda_1 > 0$ *és* $\lambda_2 < 0$, *így*
  - $b = \sqrt{-14a}$ *esetén egymást metsző egyenes párunk lesz,*
  - $b \neq \sqrt{-14a}$ *esetén pedig hiperbola.*

2. eset: $a = 0$ *és* $b = 0$. *Ekkor az* $A\mathbf{x} = -\mathbf{r}$ *egyenlet megoldható, egy megoldása:* $x_0 = 0$, $y_0 = -1$. *Legyen* $x = x' + x_0$ *és* $y = y' + y_0$, *ekkor*

$$\begin{aligned} g(x,y) &= (x'+x_0, y'+y_0) \cdot A \cdot (x'+x_0, y'+y_0)^T + 2 \cdot \mathbf{r} \cdot (x'+x_0, y'+y_0)^T + c \\ &= 2(x')^2 + 4x'y' + 2(y')^2 - 14. \end{aligned}$$

Azaz ebben az „új” koordinátarendszerben (melynek kezdőpontja az (x_0, y_0) *pont) a* $\mathfrak{G}_{0,b}$ *görbe egyenlete:* $2(x')^2 + 4x'y' + 2(y')^2 - 14 = 0$.

- *Ha* $a = b = 0$, *akkor* $\lambda_1 = 4$ *és* $\lambda_2 = 0$, *így a görbe egy párhuzamos egyenespár lesz.*

3. eset: $a = 0$ *és* $b \neq 0$. *Ekkor az* $A\mathbf{x} = -\mathbf{r}$ *egyenlet nem oldható meg. Tekintsük a*

$$Q((x,y)^T) = 2x^2 + 4xy + 2y^2$$

kvadratikus alakot, melynek mátrixa a standard bázisban $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Az* A *mátrix sajátértékei:*

$$\lambda_1 = 4, \qquad \lambda_2 = 0,$$

egy-egy sajátvektor pedig

$$v_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T \quad (\lambda_1 = 4) \qquad \text{és} \qquad v_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T \quad (\lambda_1 = 0).$$

A v_1, v_2 *ortonormált bázisban* Q *mátrix diagonális mátrix, mégpedig a* $P^T \cdot A \cdot P = \operatorname{diag}(4,0)$ *mátrix, ahol*

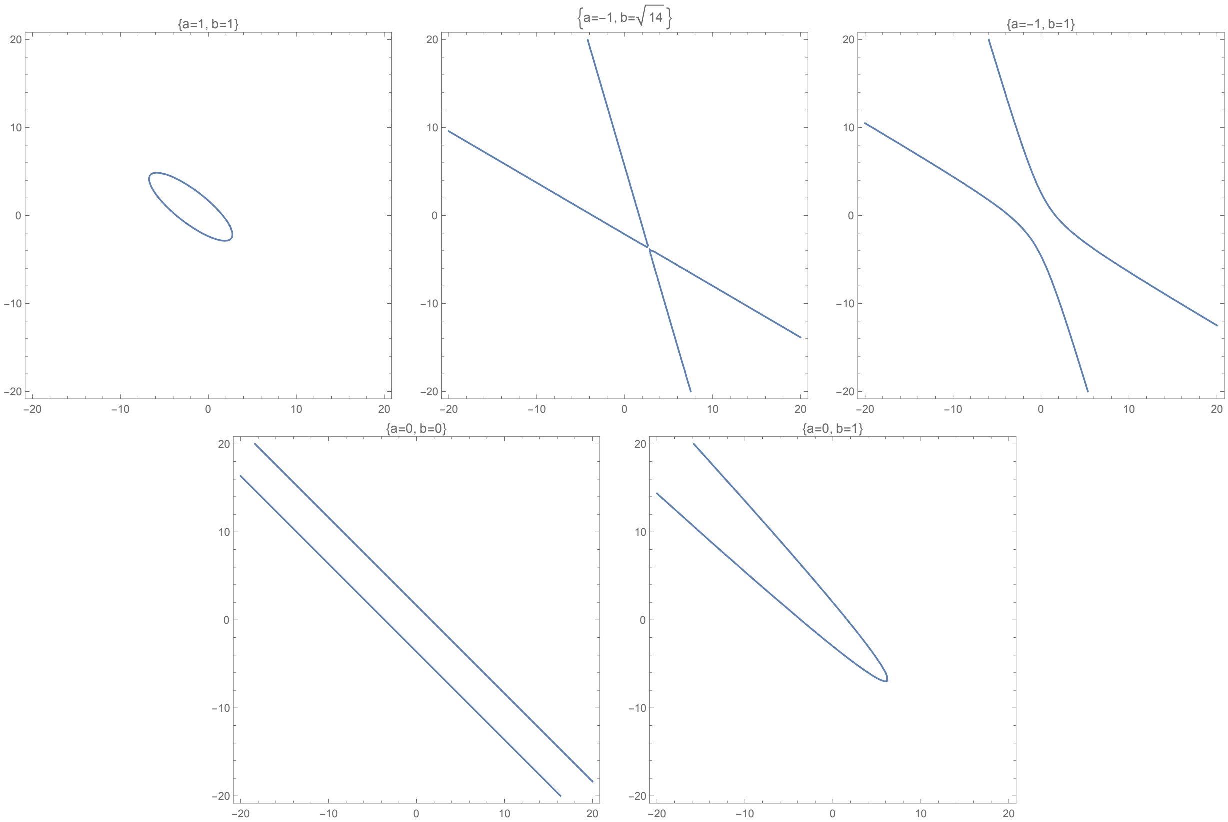
$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T.$$

Így $Q(x' \cdot v_1 + y' \cdot v_2) = 4(x')^2$, *a görbe egyenlete ebben az eltolt-elforgatott koordinátarendszerben:*

$$-\sqrt{2}bx - \sqrt{2}by + 4x^2 + 4\sqrt{2}x - 12 = 0 \iff y = \frac{2\sqrt{2}}{b}x^2 - \frac{(b-4)}{b}x - \frac{6\sqrt{2}}{b},$$

azaz görbénk egy parabola.

Ezzel görbénk elsődleges vizsgálatát befejeztük. Az egyes típusokhoz tartozó görbék a 2. ábrán láthatóak.



2. ábra. A $2x^2 + 4xy + (a+2)y^2 + 4x + 2(2-b)y - 12 = 0$ egyenlettel definiált másdorendű görbék

5.45. Példa. *Legyen* $f = x^2 + 4xy - 2xz + 4x - y^2 + 6yz + 2y + 2z^2 - 6z + 12 \in \mathbb{R}[x,y,z]$, *és tekintsük az* $f(x,y,z) = 0$ $(x,y,z \in \mathbb{R})$ *egyenlettel definiált* $\mathfrak{F}$ *másodrendű felületet. Az* f *polinom az*

$$f = (x,y,z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot (x,y,z)^T + 2 \cdot (2,1,-3) \cdot (x,y,z)^T + 12 = 0$$

alakban is felírható. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *és* $\mathbf{r} = (2, 1, -3)^T$*. Először az elsőfokú tagoktól „szabadulunk meg" az* x*,* y *és* z *változók alkalmas helyettesítésével. Legyen* $x = x' + x_0$*,* $y = y' + y_0$ *és* $z = z' + z_0$*, ahol* (x_0, y_0, z_0) *az* $A\mathbf{x} = -\mathbf{r}$ *egyenlet megoldása, azaz* $(x_0, y_0, z_0) = (-22/15, 1/15, 2/3)$*. Ekkor*

$$f(x, y, z) = (x', y', z')A(x', y', z')^T + \frac{107}{15} = (x')^2 + 4x'y' - 2x'z' - (y')^2 + 6y'z' + 2(z')^2 + \frac{107}{15}.$$

Tekintsük a $Q((x', y', z')^T) = (x', y', z')A(x', y', z')^T$ *kvadratikus alakot, melynek mátrixa a standard bázisban éppen* A*. Az* A *mátrix sajátértékei az* $|A - x \cdot E_3| = -x^3 + 2x^2 + 15x - 30 = -(x-2)\left(x^2 - 15\right)$ *polinom valós gyökei:* $\lambda_1 = -\sqrt{15}$*,* $\lambda_2 = \sqrt{15}$ *és* $\lambda_3 = 2$*. Válasszunk hozzájuk egy-egy sajátvektort, amelyeknek hossza egységnyi:*

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2\sqrt{75 + 10\sqrt{15}}} \cdot (5 + \sqrt{15}, -5 - 3\sqrt{15}, 10), \\ v_2 &= \frac{1}{2\sqrt{75 - 10\sqrt{15}}} \cdot (5 - \sqrt{15}, -5 + 3\sqrt{15}, 10) \ \textit{és} \\ v_3 &= \frac{1}{\sqrt{11}}(3, 1, -1). \end{aligned}$$

Legyen

$$P = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{15}}{2\sqrt{75+10\sqrt{15}}} & \frac{-5-3\sqrt{15}}{2\sqrt{75+10\sqrt{15}}} & \frac{5}{\sqrt{75+10\sqrt{15}}} \\ \frac{5-\sqrt{15}}{2\sqrt{75-10\sqrt{15}}} & \frac{3\sqrt{15}-5}{2\sqrt{75-10\sqrt{15}}} & \frac{5}{\sqrt{75-10\sqrt{15}}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}^T.$$

Ekkor $P^{-1} = P^T$ *és* Q *mátrixa az* $\mathcal{F}\colon v_1, v_2, v_3$ *ortonormált bázisban:*

$$\mathcal{A}_Q^{(\mathcal{F})} = \begin{pmatrix} -\sqrt{15} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

aminek következtében $Q(x'' \cdot v_1 + y'' \cdot v_2 + z'' \cdot v_3) = -\sqrt{15}(x'')^2 + \sqrt{15}(y'')^2 + 2(z'')^2$*. Ezért az* $\mathfrak{F}$ *felület egy kétköpenyű hiperboloid (ld. 3. ábra).*

A másodrendű görbék típusai:

- ellipszis, hiperbola, metsző egyenespár, $\{(0, 0)\}$ (centrális görbék);
- parabola, párhuzamos egyenespár, két egybeeső egyenes (parabolikus görbék).

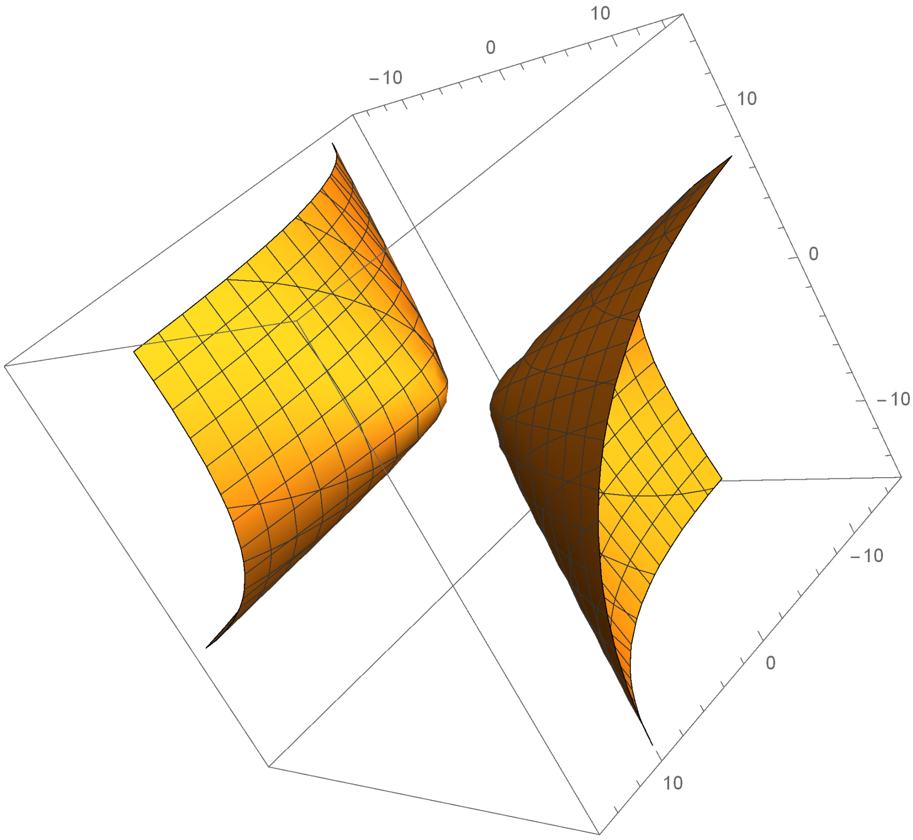
A másodrendű felületek típusai:

- ellipszoid, egy- és kétköpenyű hiperboloid, $\{(0, 0, 0)\}$ (centrális felületek, ld.: 9. ábra, 79. old.);
- elliptikus és hiperbolikus paraboloid, hengerfelület, amelynek vezérvonala másodrendű görbe, metsző síkpár, párhuzamos síkpár, két egybeeső sík (paraboloidok, hengerek és síkpárok, ld.: 10. és 11. ábrák, 80. és 81. oldalak).

5.3.6. Jordan-féle normálalak

Legyen $\mathbf{V}$ véges dimenziós vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris transzformáció. Ha φ minimálpolinomja $m_\varphi = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_r)^{n_r} \in \mathbb{K}[x]$, akkor a $\operatorname{Ker}\left((\varphi - \lambda_i E)^{n_i}\right)$ alteret (a λ_i sajátértékhez tartozó) **általánosított sajátaltérnek** nevezzük ($i \in \{1, \ldots, r\}$).

Fontos megjegyezni, hogy a φ *lineáris transzformáció* m_φ *minimálpolinomját általában nem tudjuk* $(x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_r)^{n_r}$ *alakban felírni, mivel a minimálpolinom nem minden gyöke van feltétlenül* $\mathbb{K}$*-ban. (Gondoljunk a síkbeli origó körüli* $(\pi/2)$*-szögű forgatásra, amelynek nincs is valós sajátértéke.) Ha* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, akkor a Klasszikus Algebra Alaptétele szerint általában is működnek majd az alábbiak, hiszen minden* $\mathbb{C}[x]$*-beli polinom elsőfokú* $\mathbb{C}[x]$*-beli polinomok szorzatára bomlik. Nem ez a helyzet* $\mathbb{R}$ *felett, hiszen ott már másodfokú irreducibilis polinomok is vannak,* $\mathbb{Q}$ *felett pedig még bonyolultabb a helyzet (pl. az* $x^n - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ *polinom minden* n *természetes számra irreducibilis).*



3. ábra. Az $\mathfrak{F}$ másodrendű felület egy kétköpenyű hiperboloid

5.46. Tétel. *Legyen* $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineáris transzformáció, melynek minimálpolinomja*

$$m_\varphi = (x-\lambda_1)^{n_1}\cdots(x-\lambda_r)^{n_r},$$

ahol $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in \mathbb{K}$ *páronként különböző sajátértékek,* $n_1,\dots,n_r \in \mathbb{N}$ *és* $\mathbf{V}_i = \operatorname{Ker}\left((\varphi-\lambda_i E)^{n_i}\right)$ $(i=1,\dots,r)$. *Ekkor* $\mathbf{V}$ *a* $\mathbf{V}_1,\dots,\mathbf{V}_r$ *általánosított sajátalterek direkt összege, azaz*

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_r.$$

5.47. Tétel. *Ha* $\mathcal{B}_i$ *bázis* $\mathbf{V}_i$*-ben* $(1 \leqslant i \leqslant r)$*, akkor a* $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_r$ *vektorrendszer* $\mathbf{V}$*-ben, melyben* φ *mátrixa:*

$$\begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_r \end{pmatrix},$$

ahol $A_1,\dots,A_r$ *négyzetes mátrixok, pontosabban* A_i *a* $\varphi|_{\mathbf{V}_i}\colon \mathbf{V}_i \to \mathbf{V}_i$ *lineáris transzformáció mátrixa a* $\mathcal{B}_i$ *bázisban* $(i=1,\dots,r)$.

5.48. Tétel. *Legyen* $\varphi\colon \mathbf{W} \to \mathbf{W}$ *lineáris transzformáció, melynek minimálpolinomja*

$$m_\varphi = (x-\lambda)^k.$$

Ekkor $\mathbf{W}$*-nek van olyan bázisa, amelyben* φ *mátrixa*

$$\begin{pmatrix} J_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & J_s \end{pmatrix},$$

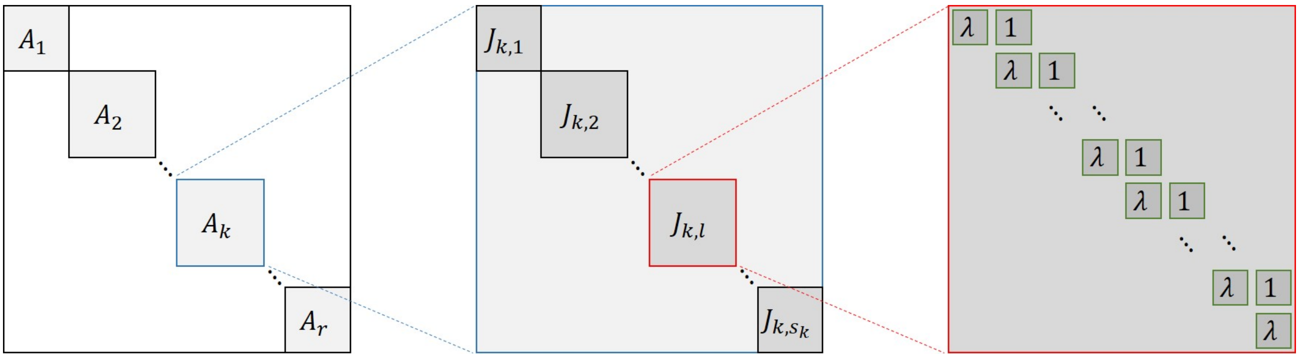
alakú, ahol J_i *négyzetes mátrix,*

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

5.49. Állítás. *Legyen* $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineáris transzformáció, melynek minimálpolinomja*

$$m_\varphi = (x-\lambda)^{n_1} \cdots (x-\lambda_r)^{n_r}.$$

Ekkor φ *Jordan-féle normálalakjában a* λ_i *sajátértékhez tartozó legnagyobb méretű elemi Jordan blokk* $(n_i \times n_i)$ *méretű.*



4. ábra. A Jordan-féle normálalak felépülése (Jordan-blokk, elemi Jordan-blokk)

5.50. Példa. *Legyen* φ *a* $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ *vektortér alábbi lineáris transzformációja:*

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3a-2b+3c \\ 2a+b-c \\ -5a-3b+5c \end{pmatrix}.$$

Ekkor φ *mátrixa az* $\mathcal{E}$ *standard bázisban:*

$$\mathcal{A}_\varphi^{(\mathcal{E})} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 5 \end{pmatrix},$$

karakterisztikus polinomja pedig $\chi_\varphi = |A - x \cdot E_3| = -(x-1)^3$*. Így* φ *egyetlen sajátértéke a* $\lambda = 1$ *valós szám. Minimálpolinomja pedig* $m_\varphi = (x-1)^3$*, mivel* $A - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ *és* $(A - 1 \cdot E_3)^2 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Legyen $\psi = \varphi - 1 \cdot \mathrm{id}_V$ *és határozzuk meg a*

$$\{\mathbf{0}\} = \mathrm{Ker}\left(\psi^0\right) \subseteq \mathrm{Ker}\,(\psi) \subseteq \mathrm{Ker}\left(\psi^2\right) \subseteq \mathrm{Ker}\left(\psi^3\right) = V$$

altereket. Legyen B *a* ψ *lineáris transzformáció mátrixa, ekkor*

$$B = \mathcal{A}_\psi^{(\mathcal{E})} = A - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

ezért

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,(\psi) &= \left\{v \in \mathbb{R}^3 \mid v^\mathsf{T} \cdot B = \mathbf{0}^\mathsf{T}\right\} = [(1,1,2)^\mathsf{T}], \\ \mathrm{Ker}\left(\psi^2\right) &= \left\{v \in \mathbb{R}^3 \mid v^\mathsf{T} \cdot B^2 = \mathbf{0}^\mathsf{T}\right\} = [(1,1,2)^\mathsf{T}, (-1,3,0)^\mathsf{T}], \\ V = \mathrm{Ker}\left(\psi^3\right) &= \left\{v \in \mathbb{R}^3 \mid v^\mathsf{T} \cdot B^3 = \mathbf{0}^\mathsf{T}\right\} = [(1,1,2)^\mathsf{T}, (-1,3,0)^\mathsf{T}, (0,0,1)^\mathsf{T}]. \end{aligned}$$

Az induló bázisunk legyen $v_1 = (1,1,2)^T$, $v_2 = (-1,3,0)^T$, $v_3 = (0,0,1)^T$. *(Vegyük észre, hogy* $\operatorname{Ker}(\psi)$ *bázisát terjesztettük ki* $\operatorname{Ker}(\psi^2)$ *bázisává, majd ez utóbbit* $V = \operatorname{Ker}(\psi^3)$ *bázisává.) Tekintsük a* $\operatorname{Ker}(\psi^3) \setminus \operatorname{Ker}(\psi^2)$*-beli bázis vektorokat (jelen esetben egy ilyen vektor van):* $v_3 = (0,0,1)^T$. *Legyen* $c_1 = v_3$ *és* $b_1 = \psi(c_1) = (3,-1,4)^T$ *és* $a_1 = \psi(b_1) = (2,2,4)^T$. *Ekkor* $b_1 \in \operatorname{Ker}(\psi^2)$ *és* $a_1 \in \operatorname{Ker}(\psi)$, *mivel* $\psi^2(b_1) = \psi^3(c_1) = \mathbf{0}$ *és* $\psi(a_1) = \psi^2(b_1)$, *továbbá*

$$\begin{aligned}
\varphi(a_1) &= (\psi + \mathrm{id}_V)(a_1) = \psi(a_1) + a_1 = a_1\\
\varphi(b_1) &= (\psi + \mathrm{id}_V)(b_1) = \psi(b_1) + b_1 = a_1 + b_1,\\
\varphi(c_1) &= (\psi + \mathrm{id}_V)(c_1) = \psi(c_1) + c_1 = b_1 + c_1.
\end{aligned}$$

Azaz az $\mathcal{F}\colon a_1, b_1, c_1$ *bázisban* φ *mátrixa*

$$\mathcal{A}_\varphi^{(\mathcal{F})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/8 & 3/8 & 0\\ 1/4 & -1/4 & 0\\ -3/2 & -1/2 & 1\end{pmatrix}}_{P} \cdot A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 4 & 1\end{pmatrix}}_{P^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

ahol $P = C_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$.

5.51. Példa. *Legyen a* $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban*

$$A = \begin{pmatrix} -60 & -36 & 68 & 2\\ -26 & -13 & 29 & -1\\ -69 & -40 & 78 & 1\\ -19 & -11 & 21 & 2\end{pmatrix},$$

azaz $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $(a,b,c,d)^T \mapsto A \cdot (a,b,c,d)^T$. *Ekkor*

$$\begin{aligned}
\chi_\varphi &= \det(A - \lambda \cdot E_4) = \lambda^4 - 7\lambda^3 + 18\lambda^2 - 20\lambda + 8 = (\lambda-2)^3(\lambda-1),\\
m_\varphi &= (\lambda-2)^2(\lambda-1).
\end{aligned}$$

(Az m_φ *minimálpolinom meghatározásánál felhasználtuk, hogy minden sajátérték gyöke* m_φ*-nek és* $m_\varphi \mid \chi_\varphi$, *valamint némi számolás is elkél. Megjegyezzük, hogy ebben az esetben ennyi információ elég is a Jordan-féle normálalak meghatározásához.)*

A(z általánosított) sajátalterek meghatározása:

$$A - \lambda \cdot E_4 = \begin{pmatrix} -\lambda-60 & -36 & 68 & 2\\ -26 & -\lambda-13 & 29 & -1\\ -69 & -40 & 78-\lambda & 1\\ -19 & -11 & 21 & 2-\lambda\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -61 & -36 & 68 & 2\\ -26 & -14 & 29 & -1\\ -69 & -40 & 77 & 1\\ -19 & -11 & 21 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -10/3\\ 0 & 1 & 0 & -4/3\\ 0 & 0 & 1 & -11/3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (\lambda = 1),$$

$$\begin{pmatrix} -62 & -36 & 68 & 2\\ -26 & -15 & 29 & -1\\ -69 & -40 & 76 & 1\\ -19 & -11 & 21 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 11\\ 0 & 1 & 5 & -19\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (\lambda = 2),$$

ezért az 1 *és* 2 *sajátértékekhez tartozó sajátalterek:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_1 &= \operatorname{Ker}(\varphi - 1 \cdot \mathrm{id}_V) = [(10,4,11,3)^T],\\
\mathbf{U}_2 &= \operatorname{Ker}(\varphi - 2 \cdot \mathrm{id}_V) = [(4,-5,1,0)^T, (-11,19,0,1)^T].
\end{aligned}$$

Az 1 *és* 2 *sajátértékekhez tartozó általánosított sajátalterek:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_1 &= \mathbf{U}_1,\\
\mathbf{V}_2 &= \operatorname{Ker}\left((\varphi - 2 \cdot \mathrm{id}_V)^2\right)\\
&= [(4,-5,1,0)^T, (-11,19,0,1)^T, (-3,5,0,0)^T].
\end{aligned}$$

*A „**szép**" bázis konstrukciója $\mathbf{V}_2$-ben. Az egyszerűség kedvéért jelöljük a $\varphi - 2\cdot \mathrm{id}_V$ lineáris transzformációt ψ-vel. Legyen $a_1^{(2)} = (-3,5,0,0)^T \in \mathrm{Ker}\left(\psi^2\right) \setminus \mathrm{Ker}\,(\psi)$ és $b_1^{(2)} = \psi(a_1^{(2)}) = (6,3,7,2)^T$. Ekkor*

$$a_1^{(2)}, b_1^{(2)}, b_2^{(2)} = (4,-5,1,0)^T$$

bázis $\mathbf{V}_2$-ben, és így

$$a_1^{(1)} = (10,4,11,3)^T, b_2^{(2)} = (4,-5,1,0)^T, b_1^{(2)} = (6,3,7,2)^T, a_1^{(2)} = (-3,5,0,0)^T$$

bázis $\mathbf{V}$-ben. Mivel

$$\begin{aligned}
\varphi(a_1^{(1)}) &= 1 \cdot a_1^{(1)},\\
\varphi(b_2^{(2)}) &= b_2^{(2)}(\psi + 2\cdot \mathrm{id}_V) = 2\cdot b_2^{(2)},\\
\varphi(b_1^{(2)}) &= b_1^{(2)}(\psi + 2\cdot \mathrm{id}_V) = 2\cdot b_1^{(2)},\\
\varphi(a_1^{(2)}) &= a_1^{(2)}(\psi + 2\cdot \mathrm{id}_V) = b_1^{(2)} + 2\cdot a_1^{(2)},
\end{aligned}$$

ezért φ mátrixa ebben a bázisban:

$$P\cdot A\cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ahol P az alábbi mátrix:

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 6 & -3\\ 4 & -5 & 3 & 5\\ 11 & 1 & 7 & 0\\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -5 & -2\\ -5/2 & -3/2 & 7/2 & -5/2\\ -15/2 & -9/2 & 15/2 & 7/2\\ -2 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

5.4. Feladatok

5.4.1. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *valós vektortér és* W *az* $u \boxplus i \cdot v$ $(u, v \in \mathbf{V})$ *alakú formális kifejezések halmaza, ahol* i *a komplex egység. Mutassa meg, hogy*

(a) W *vektortér lesz* $\mathbb{C}$ *felett az* $\oplus$ *és* $\lambda\odot$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ *műveletekkel, ahol*

$$\oplus\colon W \times W \to W,\ (u \boxplus i \cdot v) \oplus (u' \boxplus i \cdot v') = (u + u') \boxplus i \cdot (v + v'),$$
$$(a+bi)\odot\colon W \to W,\ (a+bi) \odot (u \boxplus i \cdot v) = (a \cdot u - b \cdot v) \boxplus i \cdot (b \cdot v + a \cdot v) \qquad (a, b \in \mathbb{R});$$

(b) *az* $\{u \boxplus i \cdot \mathbf{0} \mid u \in \mathbf{W}\}$ *részhalmaza* W*-nek* $\mathbf{V}$*-vel izomorf altér* $\mathbf{W}$*-ben.*

(c) *Ha* φ *lineáris transzformációja* $\mathbf{V}$*-nek, akkor a* $\mathbf{W} \to \mathbf{W}$, $u \boxplus i \cdot v \mapsto \varphi(u) \boxplus i \cdot \varphi(v)$ *leképezés lineáris transzformációja* $\mathbf{W}$*-nek.*

Határozza meg $\mathbf{W}$ *dimenzióját, ha* $\dim(\mathbf{V}) = n$.

5.4.2. Feladat. *Igaz-e, hogy az*

$$F\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \left((a, b)^T, (c, d)^T\right) \mapsto ac + bc + ad + 3bd$$

leképezés belső szorzatot definiál az $\mathbb{R}^2$ *valós vektortéren?*

5.4.3. Feladat. *Igaz-e, hogy az*

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \left((a, b, c)^T, (d, e, f)^T\right) \mapsto ad + bd + cd + ae + be + ce + af + bf + cf$$

leképezés belső szorzatot definiál az $\mathbb{R}^3$ *valós vektortéren?*

5.4.4. Feladat. *Mutassa meg, hogy a 5.1 Példa* (b) *és* (c) *részében szereplő vektortereken valóban belső szorzatot definiálnak a megadott leképezések.*

5.4.5. Feladat (Ortonormált bázisok tulajdonságai)**.** *Legyen* $e_1, \ldots, e_n$ *ortonormált bázis a* $\mathbf{V}$ *Euklideszi térben és* $v \in \mathbf{V}$. *Bizonyítsa be, hogy ekkor igazak az alábbiak:*

(a) $v = \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle \cdot e_k$ *(Fourier-kifejtés);*

(b) $\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_k \rangle|^2$ *(Pitagorasz-tétel);*

(c) $\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle \langle w, e_k \rangle$ *(Parseval-azonosság).*

5.4.6. Feladat (Bessel-egyenlőtlenség)**.** *Legyen* $v_1, \ldots, v_n$ *ortonormált vektorrendszer a* $\mathbf{V}$ *Euklideszi térben és* v *tetszőleges vektora* $\mathbf{V}$*-nek. Ekkor*

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle v, v_k \rangle|^2 \leqslant \|v\|^2,$$

és a $w = v - \sum_{k=1}^{n} \langle v, v_k \rangle \cdot v_k$ *vektor merőleges mindegyik* v_k *vektorra* $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

5.4.7. Feladat. *Határozza meg a kocka testátlójának a lapátlókkal és az élekkel bezárt szögét.*

5.4.8. Feladat. *Határozza meg az* $e_1 = \{(t, t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ *és* $e_2 = \{(0, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ *egyenesek hajlásszögét.*

5.4.9. Feladat. *Határozza meg az* $e_1 = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ *és* $e_2 = \{(t, t+1, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ *egyenesek hajlásszögét.*

5.4.10. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *valós Euklideszi tér,* $\mathbf{U} \leqslant \mathbf{V}$ *és* $v \in \mathbf{V}$. *Mutassa meg, hogy az alábbiak tetszőleges* $w \in \mathbf{U}$ *esetén ekvivalensek:*

(i) *bármely* $u \in \mathbf{U}$ *esetén* $v - w \perp u$*;*

(ii) $\|v - w\| = \min_{u \in \mathbf{U}} \|v - u\|$.

5.4.11. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *valós Euklideszi tér és* S *véges részhalmaza* $\mathbf{V}$*-nek. Ekkor* $(S^\perp)^\perp$ *megegyezik az* S*-beli vektorok által generált altérrel.*

5.4.12. Feladat. *Tekintsük a* $\mathbf{V} = \mathbb{R}_5[x]$ *Euklideszi teret az* $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ *belsőszorzattal. Adjunk meg olyan ortogonális* $p_0, p_1, \ldots, p_5$ *bázist* $\mathbf{V}$*-ben, amelyre* $p_\ell^* = \ell$ *és* $p_\ell(1) = 1$ *teljesül* $(\ell \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\})$.

5.4.13. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *valós Euklideszi tér és* $v \in \mathbf{V}$ *egységvektor. Mutassa meg, hogy* v *pontosan akkor sajátvektora a* $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$ *lineáris transzformációnak, ha* $\langle v, \varphi(v) \rangle^2 = \langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle$.

□■□■□■□■□■□■□

5.4.14. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. *Kvadratikus alak-e a* $Q\colon \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ *leképezés? Legyen* $v = (x, y, z)^T$.

(a) $Q(v) = 2x^2 + 3y^2 + x + y + 1$; (b) $Q(v) = x^2 + xy$;
(c) $Q(v) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$; (d) $Q(v) = (x-y)^2 + (x+y)^2$.

5.4.15. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ *és* $F\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ *az alábbi szimmetrikus bilineáris alak* $\mathbf{V}$*-n:*

$$F(v, w) = -2v_1w_1 + 2v_2w_1 + v_3w_1 - v_4w_1 + v_2w_2 - v_1w_3 - v_4w_3 + 5v_1w_4 - 4v_2w_4 - 3v_3w_4 + 2v_4w_4,$$

ahol $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ *és* $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$ $(v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R})$. *Adjon meg olyan bázist* $\mathbf{V}$*-ben, amelyben* F *mátrixa diagonális.*

5.4.16. Feladat. *Határozza meg az alábbi kvadratikus alakok rangját és szignatúráját*

- *teljes négyzetté kiegészítéssel,*
- *(szimmetrikus) sor- és oszlopműveletekkel,*

ahol $u = (a, b, c, d)^T$ *és* $v = (x, y, z)^T$.

(a) $Q(v) = (x, y, z)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; (b) $Q(v) = 14x^2 + y^2 + 5z^2 - 10xy + 6yz - 54xz$;
(c) $Q(v) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz$; (d) $Q(v) = -10xy + 6yz - 54xz$;
(e) $Q(u) = 2a^2 - 6ab + 2ac - 8bc - c^2 + 4bd - 2d^2$.

5.4.17. Feladat. *Hozzuk diagonális alakra és adjuk meg a bázistranszformáció mátrixát:*

(a) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$; (b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;
(c) $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i^2 + \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$ ($\mathbb{R}$ *fölött*); (d) $2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2$ ($\mathbb{Z}_5$ *fölött*).

5.4.18. Feladat. *Mely* n*-ekre és* $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ *szögekre pozitív definit a következő kvadratikus alak:*

$$2\cos\alpha \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j?$$

5.4.19. Feladat. *Főminorok segítségével adjunk jellemzést a negatív definit valós kvadratikus alakokra.*

Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, $f\colon A \to \mathbb{R}$ valós függvény, amely A minden pontjában folytonosan differenciálható, és legyen $(x_0, y_0) \in A$. Az (x_0, y_0) pont **stacionárius pontja** f-nek, ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Legyen (x_0, y_0) tetszőleges pontja A-nak. Ekkor az

$$f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)^2$$

függvény az (x_0, y_0) pont egy „kis” környezetében „jól” fogja közelíteni az f függvényt és az alakjuk is „megegyezik”. Ha (x_0, y_0) stacionárius pontja f-nek, akkor

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)^2,$$

így f alakját a $Q((x', y')^T) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\cdot(x')^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\cdot x'y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\cdot(y')^2$ kvadratikus alak határozza meg.

5.4.20. Feladat. *Határozza meg az alábbi felületek stacionárius pontjait és azok típusát:*

(a) $f(x,y) = x^2y^2 - 4x^2y + 3x^2 - y^2 + 4y$;
(b) $f(x,y) = x^3 - 4x^2y - x^2 + y^2$;
(c) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$;
(d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 2(x^2 + y^2) + 3xy$;
(e) $f(x,y) = y^2 \cos x - \cos x + y$;
(f) $f(x,y) = x^3 - 15x^2 - 20y^2 + 5$.

5.4.21. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *valós vektortér és* F *szimmetrikus bilineáris alak* $\mathbf{V}$*-n. Ha* $F(v,v) = 0$ *teljesül tetszőleges* $v \in \mathbf{V}$ *vektorra, akkor* $F(v,w) = 0$ $(v,w \in \mathbf{V})$.

5.4.22. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *valós vektortér és* F *szimmetrikus bilineáris alak* V*-n. Legyenek* $w_1, \ldots, w_n$ *olyan* $\mathbf{V}$*-beli vektorok, amelyek páronként ortogonálisak* F*-re vonatkozóan, azaz* $F(w_i, w_j) = 0$*, ha* $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$*. Ekkor tetszőleges* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *skalárokra, ha*

$$\lambda_1 \cdot w_1 + \cdots + \lambda_n \cdot w_n = \mathbf{0},$$

akkor $\lambda_i = 0$ *teljesül minden olyan esetben, amikor* $F(w_i, w_i) \neq 0$*. Aminek következtében, ha* $F(w_i, w_i) \neq 0$ *teljesül minden* i*-re* $(1 \leqslant i \leqslant n)$*, akkor a* $w_1, \ldots, w_n$ *vektorrendszer lineárisan független.*

5.4.23. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *valós vektortér és* F *szimmetrikus bilineáris alak* $\mathbf{V}$*-n. Legyenek* $w_1, \ldots, w_k$ *olyan* $\mathbf{V}$*-beli vektorok, amelyek páronként ortogonálisak* F*-re vonatkozóan és* $F(w_i, w_i) \neq 0$ *teljesül minden* i*-re* $(1 \leqslant i \leqslant k)$*. Ekkor tetszőleges* $v \in \mathbf{V}$ *vektorohoz van olyan* $u \in \mathbf{V}$ *vektor, hogy* $F(w_i, u) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ *és* v *a* $w_1, \ldots, w_k, u$ *vektorok lineáris kombinációja, azaz*

$$\mathbf{V} = [\mathbf{U} \cup \{w_1, \ldots, w_k\}],$$

ahol $\mathbf{U} = \{u \in \mathbf{V} \mid F(w_i, u) = 0$ *teljesül minden* i*-re* $(1 \leqslant i \leqslant k)\}$.

5.4.24. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$, $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *szimmetrikus mátrix és* $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$*, valamint legyen*

$$v_i = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,i} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,i} \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_i \end{vmatrix} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

ahol $e_1, \ldots, e_n$ *a standard bázis. Igazoljuk az alábbiakat:*

(a) $F(v_i, v_j) = 0$*, ha* $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$;

(b) $F(v_1, v_1) = a_{1,1}$ *és tetszőleges* $2 \leqslant i \leqslant n$ *esetén*

$$F(v_i, v_i) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,i-1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,i-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,i-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,i} & a_{2,i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,i-1} & a_{i,i} \end{vmatrix}.$$

5.4.25. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *végesen generált valós euklideszi tér az* F *belső szorzattal, valamint legyen* $v_1, \ldots, v_n$ *bázis* V*-ben,* $a_{i,j} = F(v_i, v_j)$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$*. Ekkor a*

$$w_i' = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,i} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,i} \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_i \end{vmatrix} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

vektorok ortogonális bázisát alkotják $\mathbf{V}$*-nek. Így a* $w_i = \frac{1}{F(w_i', w_i')} \cdot w_i'$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *vektorrendszer ortonormált bázis.*

□■□■□■□■□■□■□

5.4.26. Feladat. *Legyen* A *a* $\mathbb{K}$ *test feletti* $(n \times n)$*-es mátrix, melynek karakterisztikus polinomja* $\chi_A \in \mathbb{K}[x]$*. Mutassa meg, hogy*

$$\chi_A = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Trace}\,(A)\, x^{n-1} + \cdots + \det(A).$$

5.4.27. Feladat. *Határozza meg az alábbi valós mátrixok sajátértékeit:*

(a) $\begin{pmatrix} -3 & 14 & -4 \\ -2 & 9 & -2 \\ -4 & 14 & -3 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

5.4.28. Feladat. *Határozza meg az alábbi mátrixok karakterisztikus és minimálpolinomját:*

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -9 & -4 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; (b) $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; (c) $C = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

5.4.29. Feladat. *Legyen* $\mathbb{K}$ *test,* $\lambda \in \mathbb{K}$ *és* $n \in \mathbb{N}$*, valamint tetszőleges* i, j *indexekre* $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ *legyen*

$$a_{i,j} = \begin{cases} \lambda, & \textit{ha } i = j, \\ 1, & \textit{ha } j = i + 1, \\ 0, & \textit{különben.} \end{cases}$$

Határozza meg az $A_n = (a_{i,j})_{n \times n}$ *mátrix minimálpolinomját.*

5.4.30. Feladat. *Legyenek* A *és* B *a* K *test feletti azonos méretű négyzetes mátrixok. Mutassa meg, hogy az* A *és* B *mátrixok nyoma megegyezik, azaz* $\mathrm{Trace}\,(AB) = \mathrm{Trace}\,(BA)$*. Majd gondolja meg, hogy hasonló mátrixok nyoma megegyezik. Megfordítható-e ez utóbbi állítás?*

5.4.31. Feladat (Gershgorin-tétel)**.** *Legyen* $A = (a_{i,j})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *szimmetrikus mátrix és*

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \ (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Ekkor az A *mátrix minden sajátértéke az* $\bigcup_{i=1}^{n} [a_{i,i} - r_i, a_{i,i} + r_i]$ *halmazban van.*

5.4.32. Feladat. *A* **Perrin-sorozatot** *az alábbi rekurzió definiálja:*

$$P_1 = 0, \ P_2 = 2, \ P_3 = 3 \quad \textit{és} \quad P_n = P_{n-2} + P_{n-3} \ (n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 4).$$

Legyen $\alpha = \lim_{n \to \infty} P_{n+1}/P_n$*. Mutassa meg, hogy* α *jól definiált (azaz valóban létezik a határérték), valamint* α *gyöke az* $x^3 - x - 1$ *polinomnak.*

Eredmény/Megoldás. Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$. Ekkor $\begin{pmatrix} P_n \\ P_{n-1} \\ P_{n-2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ P_{n-2} \\ P_{n-3} \end{pmatrix}$, aminek következtében $\begin{pmatrix} P_n \\ P_{n-1} \\ P_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} P_2 \\ P_1 \\ P_0 \end{pmatrix}$ $(n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 3)$. Az A mátrix sajátértékei a $-x^3 + x + 1$ polinom gyökei:

$$\alpha \approx 1.32472, \quad \beta \approx -0.662359 + 0.56228i \quad \text{és} \quad \overline{\beta} \approx -0.662359 - 0.56228i.$$

Válasszunk egy-egy sajátvektort:

$$v_\alpha = (\alpha^2, \alpha, 1)^T,$$
$$v_\beta = (\beta^2, \beta, 1)^T,$$
$$v_{\overline{\beta}} = (\overline{\beta}^2, \overline{\beta}, 1)^T,$$

és legyen $M = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \overline{\beta}^2 \\ \alpha & \beta & \overline{\beta} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ekkor $M^{-1}AM = \mathrm{diag}(\alpha, \beta, \overline{\beta})$, így $A^{n-2} = M \cdot \mathrm{diag}(\alpha^{n-2}, \beta^{n-2}, \overline{\beta}^{n-2}) \cdot M^{-1}$ és

$$\begin{pmatrix} P_n \\ P_{n-1} \\ P_{n-2} \end{pmatrix} = \left(M \cdot \mathrm{diag}(\alpha^{n-2}, \beta^{n-2}, \overline{\beta}^{n-2}) \cdot M^{-1}\right) \cdot \begin{pmatrix} P_2 \\ P_1 \\ P_0 \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 3).$$

Amelyből az adódik, hogy $P_n = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} + \overline{\beta}^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. ♦

5.4.33. Feladat. *A „Tribonacci-sorozatot" az alábbi rekurzió definiálja:*

$$T_1 = 1,\ T_2 = 1,\ T_3 = 2 \quad \textit{és} \quad T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}\ (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 4).$$

Legyen $\beta = \lim_{n\to\infty} T_{n+1}/T_n$. *Mutassa meg, hogy* β *jól definiált (azaz valóban létezik a határérték), valamint* β *gyöke az* $x^3 - x^2 - x - 1$ *polinomnak.*

5.4.34. Feladat. *Legyen* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *és* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Határozza meg az* AB *és* BA *mátrixok sajátértékeit és hasonlítsa össze őket.*

5.4.35. Feladat. *Határozza meg az* A^n *mátrixot* $(n \in \mathbb{N})$:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.4.36. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V} = \mathbb{R}_4[x]$, *a legfeljebb negyedfokú polinomok vektortere, és tekintsük a*

$$\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V},\ p \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x p(t)\,dt$$

leképezést. Mutassa meg, hogy φ *lineáris leképezés, írja fel* φ *mátrixát a* $1, x, x^2, x^3, x^4$ *(kanonikus) bázisban. Határozza meg* φ *sajátértékeit és sajátvektorait.*

5.4.37. Feladat. *Legyen* Vonat_n $(n \in \mathbb{N})$ *azon* n*-hosszú vonatszerelvények száma, amelyek* 1 *vagy* 2 *egység hosszúságú vasúti kocsikból épülnek fel. Határozza meg a sorozat általános tagját.*

5.4.38. Feladat. *Melyek diagonalizálhatók az alábbi* $\mathbb{R}$ *feletti mátrixok közül?*

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

5.4.39. Feladat. *Melyek diagonalizálhatók az alábbi* $\mathbb{K}$ *test feletti mátrixok közül* $(\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\})$?

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

5.4.40. Feladat. *Legyenek* a, b *és* d *tetszőleges valós számok, és legyen* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

(a) *Mutassa meg, hogy* A *van két lineárisan független sajátvektora.*

(b) *Határozza meg az* $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ *mátrix* n*-edik hatványát* $(n \in \mathbb{Z})$.

(c) *Diagonalizálja az* $A_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$ *mátrixot* $(t \in \mathbb{R})$.

5.4.41. Feladat. (a) *Vannak-e olyan* $\mathbb{R}$ *feletti* (2×2)*-es mátrixok, amelyek karakterisztikus polinomjai megegyeznek, de nem hasonlóak?*

(b) *Vannak-e olyan* $\mathbb{R}$ *feletti* (2×2)*-es mátrixok, amelyek karakterisztikus polinomjai és minimálpolinomjai is megegyeznek, de nem hasonlóak?*

(c) *Vannak-e olyan* $\mathbb{R}$ *feletti* (3×3)*-as mátrixok, amelyek minimálpolinomjai megegyeznek, de nem hasonlóak?*

(d) *Vannak-e olyan* $\mathbb{R}$ *feletti* (3×3)*-as mátrixok, amelyek karakterisztikus polinomjai és minimálpolinomjai megegyeznek, de nem hasonlóak?*

(e) *Vannak-e olyan* $\mathbb{R}$ *feletti* (4×4)*-es mátrixok, amelyek karakterisztikus polinomjai és minimálpolinomjai is megegyeznek, de nem hasonlóak?*

5.4.42. Feladat. *A Fibonacci-sorozatot az* $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3)$ *rekurzió definiálja. Adjon meg olyan* $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *mátrixot, amelyre*

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

teljesül minden n*-re* $(n \in \mathbb{N})$*. Diagonalizálja az* A *mátrixot és határozza meg a Fibonacci-sorozat általános elemének zárt alakját.*

5.4.43. Feladat. *Legyen* φ *az* $x^2 - x - 1$ *polinom pozitív gyöke (*φ *az* **aranymetszés aránya***). Igazolja az alábbiakat.*

(a) $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$;

(b) $f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$;

(c) $f_1 - f_2 + \cdots + (-1)^{n+1} f_n = (-1)^{n+1} f_{n-1} + 1$;

(d) $f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_{2n}$;

(e) $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n}$;

(f) $\text{ln.k.o.}(f_m, f_n) = f_{\text{ln.k.o.}(m,n)}$;

(g) $\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$;

(h) $\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\cdots}}}}}$.

5.4.44. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy tetszőleges* n *természetes számra*

$$f_{2n-1} f_{2n+1} \mid f_{2n-1}^2 + f_{2n+1}^2 + 1$$

teljesül. Határozza meg az összes olyan (a, b) *számpárt* $(a, b \in \mathbb{N},\ a < b)$, *amelyre* $ab \mid a^2 + b^2 + 1$ *teljesül.*

5.4.45. Feladat. *Határozza meg az* $x_0 = y_0 = 1$, $z_0 = 2$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -y_n + z_n, \\ y_{n+1} &= -y_n, \\ z_{n+1} &= 2x_n - 2y_n + z_n \end{aligned}$$

$(n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$ *rekurzióval definiált sorozatok zárt alakját.*

5.4.46. Feladat. *Határozza meg az* x_n *és* y_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ *sorozatok zárt alakját.*

(a) $x_0 = y_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 2y_n$, $y_{n+1} = 2x_n + y_n + 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$;

(b) $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $x_{n+1} = 2x_n + 3y_n$, $y_{n+1} = 3x_n + 2y_n + 2^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$;

(c) $x_0 = y_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 4y_n + 1$, $y_{n+1} = x_n + y_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$;

(d) $x_0 = y_0 = 1$, $x_{n+1} = 2x_n + y_n + 1$, $y_{n+1} = x_n + 2y_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

5.4.47. Feladat. *Oldja meg az alábbi kezdeti értékes differenciálegyenlet-rendszereket, ahol* $x, y, z \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *valós függvények.*

(a) $x'(t) = -y(t) + z(t)$, $y'(t) = -y(t)$, $z'(t) = 2x(t) - 2y(t) + z(t)$ *és* $x(0) = y(0) = 1$, $z(0) = 2$;

(b) $x'(t) = x(t) + 2y(t)$, $y'(t) = 2x(t) + y(t) + 1$ *és* $x(0) = y(0) = 1$;

(c) $x'(t) = 2x(t) + 3y(t)$, $y'(t) = 3x(t) + 2y(t) + e^{2t}$ *és* $x(0) = 1$, $y(0) = 2$;

(d) $x'(t) = x(t) + 4y(t) + 1$, $y'(t) = x(t) + y(t)$ *és* $x(0) = y(0) = 1$;

(e) $x'(t) = 2x(t) + y(t) + 1$, $y'(t) = x(t) + 2y(t)$ *és* $x(0) = y(0) = 1$.

Az **5.4.47 Feladat** (b) részének megoldása. Ha $x'(t) = x(t) + 2y(t)$, $y'(t) = 2x(t) + y(t) + 1$, akkor

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékei: -1 és 3, egy-egy hozzájuk tartozó sajátvektor pedig: $(-1,1)^T$, $(1,1)^T$. Legyen $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$. Definiáljuk az $u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket az $(u,v)^T = C \cdot (x,y)^T$ összefüggéssel. Ekkor $(u,v)^T = C \cdot (x,y)^T = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot (x,y)^T$, és így

$$\begin{aligned}(u',v')^T &= C \cdot (x',y')^T = C \cdot (A \cdot (x,y)^T + (0,1)^T) = C \cdot A \cdot (x,y)^T + C \cdot (0,1)^T \\ &= CAC^{-1} \cdot (u,v)^T + C \cdot (0,1)^T \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot (u,v)^T + (1/2, 1/2).\end{aligned}$$

Azaz $u' = -u + 1/2$ és $v' = 3v + 1/2$, két darab lineáris differenciálegyenletet kaptunk. Ekkor $u(t) = c_1 e^{-t} + \frac{1}{2}$, $v(x) = c_2 e^{3t} - \frac{1}{6}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$, és így

$$\begin{aligned} x(t) &= -c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} - \frac{2}{3}, \\ y(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ az $x'(t) = x(t) + 2y(t)$, $y'(t) = 2x(t) + y(t) + 1$ differenciál-egyenletrendszer általános megoldása. A kezdetiértékes feladat megoldása $c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{6}$ esetén adódik.

5.4.48. Feladat. *Legyenek* m *és* n *természetes számok,* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *és* $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. *Mutassa meg, hogy az* AB *és* BA *mátrixok* 0*-tól különböző sajátértékei megegyeznek.*

5.4.49. Feladat. *Legyenek* $\mathbf{V} = \mathbb{R}_5[x]$ *és legyen* φ *a* $\mathbf{V}$ *vektortér alábbi lineáris transzformációja:*

$$\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V},\ p \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x p(t)\,dt.$$

Határozza meg φ *sajátértékeit és sajátvektorait. Diagonalizálható-e* φ*?*

5.4.50. Feladat. *Vázolja fel az alábbi,* $g(x,y) = 0$ *egyenlettel megadott másodrendű görbéket:*

(a) $g = 5x^2 - 8xy + 5y^2 - 9$;
(b) $g = 11x^2 - 24xy + 4y^2 + 6x + 8y + 15$;
(c) $g = 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 30x + 40y - 5$;
(d) $g = 12xy + 3x + 4y + 15$.

5.4.51. Feladat. *Legyen* Q *az a kvadratikus alak a* $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ *vektortéren, amelynek mátrixa a standard bázisban:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. *Határozza meg az alábbi felületek típusát:*

(a) $Q((x,y,z)^T) - 1 = 0$;
(b) $Q((x,y,z)^T) = 0$;
(c) $Q((x,y,z)^T) + x + y - 2z - 1 = 0$;
(d) $Q((x,y,z)^T) + x + 2y + z - 1 = 0$;
(e) $Q((x,y,z)^T) + x + y + z - 1 = 0$;
(f) $Q((x,y,z)^T) + x + y + z = 0$;
(g) $Q((x,y,z)^T) + x - 1 = 0$;
(h) $Q((x,y,z)^T) + x + y - 1 = 0$.

5.4.52. Feladat. *Legyenek* α *és* β *a* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós valós Euklideszi tér lineáris transzformációi. Mutassa meg, hogy*

$$\frac{1}{4} |\langle v, (\alpha\beta - \beta\alpha)(v)\rangle|^2 \leqslant |\langle v, (\alpha\beta)(v)\rangle|^2.$$

5.4.53. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ 3*-dimenziós euklideszi tér,* e_1, e_2, e_3 *pedig* $\mathbf{V}$ *egy ortonormált bázisa (azaz* e_1, e_2, e_3 *páronként ortogonálisak és* 1 *hosszúságúak). Tegyük fel, hogy a*

$$\sqcup \times \sqcup\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$$

leképezés

(1) *bilineáris, továbbá*

(2) $v \times v = 0$ *minden* $v \in \mathbf{V}$*-re,*

(3) $v \times w \perp v, w$ *minden* $v, w \in \mathbf{V}$*-re, és*

(4) $e_1 \times e_2 = e_3$.

Bizonyítandó, hogy ekkor

(a) $v \times w = -(w \times v)$, $v \times 0 = 0 = 0 \times v$ *minden* $v, w \in \mathbf{V}$*-re;*

(b) $\Delta(u, v, w) = \langle u, v \times w\rangle$ *determinánsfüggvény* $\mathbf{V}$*-n;*

(c) *az* (1)-(4) *tulajdonságok egyértelműen meghatározzák* $\llcorner\lrcorner \times \llcorner\lrcorner$*-et;*

(d) $v \times w = 0 \iff$ *a* v, w *vektorrendszer lineárisan függő;*

(e) $\langle u, v \times w\rangle = \langle u \times v, w\rangle$ *minden* $u, v, w \in \mathbf{V}$*-re;*

(f) $\langle u \times v, u' \times v'\rangle = \langle u, u'\rangle\langle v, v'\rangle - \langle u, v'\rangle\langle v, u'\rangle$ *tetszőleges* $u, u', v, v' \in \mathbf{V}$ *vektorokra;*

(g) $u \times (v \times w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w$ *minden* $u, v, w \in \mathbf{V}$*-re.*

5.4.54. Feladat. *Legyenek* $\mathbf{V}$ *és* $\mathbf{W}$ *valós euklideszi terek úgy, hogy* $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2$, $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$, *ahol* $\mathbf{V}_1 \perp \mathbf{V}_2$ *és* $\mathbf{W}_1 \perp \mathbf{W}_2$. *Tetszőleges* $\varphi_1 \colon \mathbf{V}_1 \to \mathbf{W}_1$, $\varphi_2 \colon \mathbf{V}_2 \to \mathbf{W}_2$ *lineáris leképezésekre legyen*

$$\varphi_1 \oplus \varphi_2 \colon \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \to \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2, \; v_1 + v_2 \mapsto v_1\varphi_1 + v_2\varphi_2 \quad (v_i \in V_i).$$

Mutassuk meg, hogy

$$(\varphi_1 \oplus \varphi_2)^* = \varphi^* \oplus \varphi_2^*.$$

5.4.55. Feladat. *Nevezzük a* $\mathbf{V}$ *euklideszi tér egy* φ *lineáris transzformációját* **hasonlósági transzformációnak**, *ha van olyan* $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *skalár, hogy minden* $v \in \mathbf{V}$*-re* $\|\varphi(v)\| = c\|v\|$. *Igazoljuk, hogy*

(a) *bármely* $\varphi \colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *hasonlósági transzformációhoz létezik olyan* $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *skalár, hogy minden* $u, v \in \mathbf{V}$*-re*

$$\langle\varphi(u), \varphi(v)\rangle = s \cdot \langle u, v\rangle;$$

(b) *egy* $\varphi \colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineáris transzformáció akkor és csak akkor hasonlósági transzformáció, ha megőrzi az ortogonalitást (azaz bármely* $u, v \in \mathbf{V}$*-re* $u \perp v \Longrightarrow \varphi(u) \perp \varphi(v)$*).*

5.4.56. Feladat. *Mutassuk meg (közvetlenül a Főtengely-tétel felhasználása nélkül), hogy egy önadjungált transzformáció különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai ortogonálisak egymásra.*

5.4.57. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy ortogonális transzformáció minden sajátértéke* 1 *vagy* -1.

5.4.58. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy minden* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *ortogonális mátrixhoz van olyan* $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *és* $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *ortogonális mátrix, hogy*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

A lehetséges B *mátrixok meghatározása után fogalmazzuk meg a fenti állítás geometriai jelentését.*

5.4.59. Feladat. *Transzformáljuk főtengelyre az alábbi kvadratikus alakokat (adjuk meg a transzformáció mátrixát is):*

(a) $5x^2 - 6xy + 5y^2$,

(b) $2x^2 - 4\sqrt{3}xy - 2y^2$,

(c) $5x^2 + 6y^2 + 4z^2 - 4xy - 4xz$.

Legyen $\mathbf{V}$ vektortér $K = \mathbb{C}$ felett. Ekkor a $\mathbf{V}$ vektorteret **unitér térnek** nevezzük, ha $\mathbf{V}$-n adott egy komplex belső szorzat (ld.: lábjegyzet a 33. oldalon). A $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$ lineáris transzformáció **unitér**, ha $\varphi^* = \varphi^{-1}$. Az $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix **unitér**, ha $\overline{A^T} = A^{-1}$.

5.4.60. Feladat. *Legyen* φ *az* $\mathbf{U}$ *unitér tér lineáris transzformációja. Igazoljuk, hogy*

(a) *ha φ önadjungált, akkor φ sajátértékei valósak;*

(b) *ha φ unitér, akkor sajátértékei 1 abszolútértékűek.*

Az $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix **Hermite-féle mátrix**, ha konjugált szimmetrikus, azaz tetszőleges $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ indexekre $a_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$ teljesül.

5.4.61. Feladat. *Legyenek A és B $(n \times n)$-es Hermite-féle mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy ekvivalens az alábbi két feltétel:*

(a) $AB = BA$,

(b) *létezik olyan C $(n \times n)$-es unitér mátrix, hogy CAC^{-1} és CBC^{-1} is diagonális.*

5.4.62. Feladat. (a) *Legyen $\mathbf{V}$ n-dimenziós vektortér $\mathbb{C}$ felett. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{V}$ az $+$-ra és a valós számokkal való szorzásra $2n$-dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött, s a*

$$\varphi \colon \mathbf{V} \to \mathbf{V},\ v \longmapsto iv$$

leképezés ennek az $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek olyan lineáris transzformációja, melyre $\varphi^2 + \mathrm{id}_{\mathbf{V}} = \mathrm{O}_{\mathbf{V}}$ teljesül.

(b) *Fordítva: ha a $\mathbf{W}$ $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek van olyan ψ lineáris transzformációja, melyre $\psi^2 + \mathrm{id}_{\mathbf{W}} = \mathrm{O}_{\mathbf{W}}$, akkor $\mathbf{W}$ páros dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett, és W $\mathbb{C}$ feletti vektortérré válik, ha az i-vel való szorzást így definiáljuk:*

$$i \cdot w = \psi(w)\ (w \in \mathbf{W}).$$

5.4.63. Feladat. *Határozzuk meg az összes $\mathbb{Q}$ feletti Jordan-mátrixot, amely*

(a) (4×4)*-es és minimálpolinomja* $(x+1)^2$*;*

(b) (6×6)*-os és minimálpolinomja* $(x+2)^2(x-1)$*;*

(c) (7×7)*-es és minimálpolinomja* $(x^2+1)(x-3)$*;*

(d) (6×6)*-os és karakterisztikus polinomja* $(x^4-1)(x^3-1)$.

5.4.64. Feladat. *Legyen $\mathbb{K}$ tetszőleges test, $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ pedig olyan mátrix, amelynek valamely hatványa $0_{n\times n}$.*

(a) *Igazoljuk, hogy $A^n = 0$.*

(b) *Írjuk le, hogy milyen lehet A Jordan-normálalakja.*

5.4.65. Feladat. *Bizonyítandó, hogy ha az $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix valamely hatványa az egységmátrix, akkor A hasonló egy diagonális mátrixhoz, melynek főátlójában egységgyökök állnak.*

5.4.66. Feladat. *Legyen $\mathbb{K}$ tetszőleges test. Bizonyítsuk be, hogy bármely $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrixra ekvivalens az alábbi két feltétel:*

(1) *A hasonló egy*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n} \qquad (a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K})$$

alakú mátrixhoz;

(2) *A karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja (asszociáltságtól eltekintve) megegyezik.*

5.4.67. Feladat. *Legyen $\mathbf{V}$ véges dimenziós vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{V})$ és $p \in \mathbb{K}[x]$. Mutassa meg, hogy a $p(\varphi)$ pontosan akkor invertálható, ha $\mathrm{ln.k.o.}(p, m_\varphi) \sim 1$.*

5.4.68. Feladat. *Legyen $\mathbf{V}$ véges dimenziós vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{V})$. Határozza meg a $\mathrm{Hom}(\mathbf{V})$ vektortér*

$$[\mathrm{id}_{\mathbf{V}}, \varphi, \varphi^2, \ldots]$$

alterének dimenzióját.

Legyen $\mathbf{V}$ véges dimenziós vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{V})$. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{V}$ vektortér $\mathbf{U}$ altere **φ-invariáns**, ha $\varphi(u) \in \mathbf{U}$ teljesül tetszőleges $u \in \mathbf{U}$-ra.

5.4.69. Feladat. *Legyen* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett,* $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{V})$ *és* $v \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$*. Legyen* $[v, \varphi] = [\{\varphi^\ell(v) \mid \ell \in \mathbb{N}_0\}]$*. Mutassa meg, hogy* $[v, \varphi]$ φ*-invariáns altér és határozza meg a* $[v, \varphi]$ *altér dimenzióját. A* $[v, \varphi]$ *alteret* **a v vektor és φ lineáris transzformáció által generált altérnek** *nevezzük.*

Megoldások

1.4.1. Feladat. (a)

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1-a_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2-a_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3-a_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} \qquad ([1]-[2])$$

$$= \begin{vmatrix} 2b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ 2b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ 2b_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} \qquad ([1]+[3])$$

$$= 2\begin{vmatrix} b_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2 \\ b_3 & c_3+a_3 & a_3 \end{vmatrix} \qquad ([3-[1])$$

$$= 2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} \qquad ([2]-[3])$$

$$= 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(b) A determináns értékét jelölje $V(x_1,\ldots,x_n)$. Ekkor

$$V(x_1,\ldots,x_n) \overset{[n]-x_1\cdot[n-1],\ldots,[2]-x_1\cdot[1]}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & \ldots & x_2^{n-1}-x_1x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n-x_1 & \ldots & x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)\ldots(x_n-x_1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)\ldots(x_n-x_1)\cdot V(x_2,\ldots,x_n).$$

♦

1.4.1. Feladat. (a) $A_{f,m} = 1$ $(m\in\mathbb{N})$, (b) ♦

1.4.7. Feladat. Nincs megoldás. ♦

1.4.20 Feladat. $\det(A_n) = i^{(n-1)n}$ $(n\in\mathbb{N})$ ♦

1.4.21 Feladat. $\det(A_n) = (i\sqrt{2})^{(n-1)n}$ $(n\in\mathbb{N})$ ♦

1.4.22 Feladat. $\det(A_1)=1$, $\det(A_2)=2$, $\det(A_n)=0$ $(n\geqslant 3)$ ♦

1.4.23 Feladat. $\det(A_1)=1$, $\det(A_2)=1$, $\det(A_3)=2$, $\det(A_n)=0$ $(n\geqslant 4)$ ♦

1.4.24 Feladat. $\det(A_1)=1$, $\det(A_2)=-1$, $\det(A_3)=1$, $\det(A_n)=0$ $(n\geqslant 4)$ ♦

1.4.25 Feladat. $\det(A_n) = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$ $(n\in\mathbb{N})$ ♦

1.4.26 Feladat. $\det(A_1)=0$, $\det(A_2)=-1$, $\det(A_3)=8$, $\det(A_n)=0$ $(n\geqslant 5)$ ♦

□■□■□■□

2.3.2. Feladat. $v = (-2)\cdot u_1 + \frac{29}{2}\cdot u_2 + \frac{13}{2}\cdot u_3$ ♦

2.3.2. Feladat. A v vektor nem fejezhető ki az u_1, u_2, u_3 vektorok lineáris kombinációjaként. ♦

2.3.3. Feladat. $p = \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot p_1 + \frac{35}{12} \cdot p_2 + \frac{49}{12} \cdot p_3$ ♦

2.3.4. Feladat. $M = 2 \cdot A + 3 \cdot B + (-1) \cdot C$ ♦

2.3.6. Feladat. $(a, b, c)^T = \frac{4a-3b+c}{2} \cdot u_1 + (b - a) \cdot u_2 + \frac{b-c}{6} \cdot u_3$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ ♦

2.3.7. Feladat. A $v = (a, b, c)^T$ vektor pontosan akkor eleme az $[u_1, u_2, u_3]$ altérnek, ha $-a + 2b + c = 0$. ♦

2.3.18. Feladat. Legyen $v \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{U}$ és $u_1, \dots, u_{n-1}$ bázis $\mathbf{U}$-ban. Ekkor az $u_1 + v, \dots, u_{n-1} + v, v$ vektorrendszer $\mathbf{U}$-n kívüli vektorokból álló bázisa $\mathbf{V}$-nek. ♦

2.3.20. Feladat. Legyen $u_1, \dots, u_k \in \mathbf{V}$ bázis $\mathbf{U}$-ban és $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ bázis $\mathbf{V}$-ben. Ekkor az

$$\mathbf{U}' = [u_{k+1}, \dots, u_n$$

altérre $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}'$ teljesül. ♦

□■□■□■□

3.4.1. Feladat. A mátrixok rangja:

(a) $r(A) = 3$;

(b) ha $a + 3b = 2$, akkor $r(B) = 2$, különben $r(B) = 3$;

(c) ha $t \in \{-1, 1\}$, akkor $r(C) = 1$, különben $r(C) = 4$.

♦

3.4.2. Feladat. A LER-ek egy-egy általános megoldása az alábbi.

(a) $e = 30 + 3y$, $f = 12 + y$, $v = 20 + 2y$, $x = 12$ $(y \in \mathbb{R})$,

(b) $x_1 = \frac{18}{11} - 14x_4$, $x_2 = -\frac{1}{11} + x_4$, $x_3 = \frac{5}{11} + x_4$ $(x_4 \in \mathbb{R})$,

(c) $x_1 = \frac{34}{55}$, $x_2 = -\frac{1}{55}$, $x_3 = \frac{29}{55}$, $x_4 = \frac{4}{55}$,

(d) Ha $1 - 55a/221 \neq 0$, azaz $a \neq 221/55$, akkor az egyenletrendszer a Kronecker–Capelli-tétel szerint nem oldható meg. Ha $a = 221/55$, akkor az egyenletrendszer megoldható, egyetlen megoldása van: $(34/55, -1/55, 29/55, 4/55)^T$.

♦

3.4.3. Feladat. A LER egyetlen megoldása: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = i$, $x_4 = -1$, $x_5 = -i$. ♦

3.4.4. Feladat. A LER megoldása:

$(K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\})$ $x_1 = x_5 - 2$, $x_2 = x_4 - 1$, $x_3 = -x_4 - x_5 + 4$ $(x_4, x_5 \in K)$,

$(K = \mathbb{Z}_2)$ $x_1 = x_5$, $x_2 = x_4 + 1$, $x_3 = x_4 + x_5$ $(x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_2)$,

$(K = \mathbb{Z}_3)$ $x_1 = x_5 + 1$, $x_2 = x_4 + 2$, $x_3 = 2x_4 + 2x_5 + 1$ $(x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_3)$,

$(K = \mathbb{Z}_5)$ $x_1 = x_5 + 3$, $x_2 = x_4 + 4$, $x_3 = 4x_4 + 4x_5 + 4$ $(x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_5)$,

♦

3.4.5. Feladat. A LER megoldása:

- $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{2}$, ha n páratlan és
- $x_1 = x_3 = \dots = x_{n-1}$, $x_2 = x_4 = \dots = x_n = 1 - x_1$ $(x_1 \in \mathbb{R})$, ha n páros.

♦

□■□■□■□

4.5.2. Feladat. Az eredményeket az alábbi táblázatban foglaljuk össze.

	Lin. lek.-e?	$\mathrm{Im}(\varphi)$	$\mathrm{Ker}(\varphi)$
(a)	nem		
(b)	igen	$\mathbb{K}[x]$	$\{0\}$
(c)	nem		
(d)	igen	$\{f(x^2) : f \in \mathbb{K}[x]\}$	$\{0\}$
(e)	nem		
(f)	igen	$\{f \in \mathbb{K}[x] : f = 0,$ vagy $f^* \geqslant 1$ és $f(0) = 0\}$	$\{0\}$

♦

4.5.3. Feladat. Az eredményeket az alábbi táblázatban foglaljuk össze.

	Lin. lek.-e?	$\operatorname{Im}(\varphi)$	$\operatorname{Ker}(\varphi)$
(a)	nem		
(b)	igen	$\mathbb{R}^2$	$\{(a,-a,c,-c)^\top : a,c\in\mathbb{R}\}$
(c)	igen	$\mathbb{R}^3$	$\{(0,0,0)^\top\}$
(d)	nem		

♦

4.5.6. Feladat. A $\mathbb{K}^{m\times n}$ vektortér dimenziója $m\cdot n$. ♦

4.5.7. Feladat. A $\operatorname{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ vektortér dimenziója $\dim(\mathbf{V})\cdot\dim(\mathbf{W})$. ♦

4.5.8. Feladat. Legyen $\varphi\colon\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ injektív lineáris leképezés. Ekkor a

$$\psi\colon\mathbf{W}\to\mathbf{V},\ w\mapsto\begin{cases}v, & \text{ha } \varphi(v)=w,\\ \mathbf{0}_\mathbf{V}, & \text{különben,}\end{cases}$$

leképezés jóldefiniált és balinverze φ-nek. ♦

4.5.16. Feladat. Igen, ha $P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix}$, akkor $P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}$ és

$$P\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}e^{i\alpha} & 0\\ 0 & e^{-i\alpha}\end{pmatrix}.$$

♦

4.5.19. Feladat. (a) Legyen $\mathcal{B}_3$ a standard bázis $\mathbb{R}^3$-ban és $\mathcal{B}_4$ a standard bázis $\mathbb{R}^4$-ben. Ekkor φ mátrixa a $\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4$ bázispárban:

$$\mathcal{A}_\varphi^{(\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4)}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(b) A φ lineáris leképezés mátrixa a $\mathcal{B}_4,\mathcal{B}_3$ bázispárban:

$$\mathcal{A}_\varphi^{(\mathcal{B}_4,\mathcal{B}_3)}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(c) Legyen $\mathcal{B}$: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ a „standard bázis” $\mathbb{K}^{2\times 2}$-ben és $\mathcal{B}'$ a standard bázis $\mathbb{K}$-ban. Ekkor φ mátrixa a $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ bázispárban:

$$\mathcal{A}_\varphi^{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(d) A φ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban:

$$\mathcal{A}_\varphi^{(\mathcal{B})}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(e) Legyen $\mathcal{P}_4\colon 1,x,x^2,x^3,x^4$ a „standard bázis” $\mathbb{K}_4[x]$-ben és $\mathcal{P}_3\colon 1,x,x^2,x^3$ a „standard bázis” $\mathbb{K}_3[x]$-ben. Ekkor φ mátrixa a $\mathcal{P}_4,\mathcal{P}_3$ bázispárban:

$$\mathcal{A}_\varphi^{(\mathcal{P}_4,\mathcal{P}_3)}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

(f) A φ lineáris leképezés mátrixa a $\mathcal{P}_3,\mathcal{P}_4$ bázispárban:

$$\mathcal{A}_\varphi^{(\mathcal{P}_3,\mathcal{P}_4)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/4\end{pmatrix}.$$

♦

□■□■□■□

5.4.2 Feladat. Mivel tetszőleges a, b, c, d valós számokra

$$F((a,b)^T,(c,d)^T) = (a,b)A(c,d)^T,$$

ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ szimmetrikus mátrix, ezért F szimmetrikus bilineáris alak. Valamint

$$F((a,b)^T,(a,b)^T) = a^2 + 2ab + 3b^2 = (a+b)^2 + 2b^2$$

következtében

$$(\forall v \in \mathbb{R}^2)(F(v,v) \geqslant 0 \wedge (F(v,v) = 0 \leftrightarrow v = \mathbf{0})).$$

Így F belső szorzatot definiál az $\mathbb{R}^2$ vektortéren. ♦

5.4.3 Feladat. Mivel tetszőleges a, b, c, d valós számokra

$$F((a,b,c)^T,(d,e,f)^T) = (a,b)A(c,d)^T,$$

ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ szimmetrikus mátrix, ezért F szimmetrikus bilineáris alak. Valamint

$$F((a,b,c)^T,(a,b,c)^T) = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 = (a+b+c)^2$$

következtében F nem definiál belső szorzatot az $\mathbb{R}^3$ vektortéren. ♦

5.4.27. Feladat. A mátrixok sajátértékei:

(a) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 - 2\sqrt{2}$, $\lambda_3 = 1 + 2\sqrt{2}$;

(b) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$;

(c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

♦

5.4.28. Feladat. A mátrixok karakterisztikus és minimálpolinomjai:

(a) $\chi_A = -x^3 - x^2 + 4x + 4$, $m_A = (x-2)(x+1)(x+2)$;

(b) $\chi_B = -x^3 - 3x^2 - 2$, $m_B = x^3 + 3x^2 + 2$;

(c) $\chi_C = -x^3 - 3x^2 - 3x - 1$, $m_C = (x+1)^3$.

♦

5.4.29. Feladat. Az A_n mátrix karakterisztikus polinomja $\chi_{A_n} = (\lambda - x)^n$, minimálpolinomja $m_{A_n} = (x-\lambda)^n$. ♦

5.4.40. Feladat. (a) 1. eset: $b = 0$. Ekkor $v_1 = (1,0)^T$ és $v_2 = (0,1)^T$ sajátvektorai A-nak.

2. eset: $b \neq 0$. Legyen $\delta = \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2} > |a-d|$. Ekkor $v_1 = ((a-d)-\delta, 2b)$ és $v_2 = ((a-d)+\delta, 2b)$ sajátvektorai A-nak.

(b) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a-b)^n + \frac{1}{2}(a+b)^n & \frac{1}{2}(a+b)^n - \frac{1}{2}(a-b)^n \\ \frac{1}{2}(a+b)^n - \frac{1}{2}(a-b)^n & \frac{1}{2}(a-b)^n + \frac{1}{2}(a+b)^n \end{pmatrix}$

(c) $A_t \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ♦

Irodalomjegyzék és Tárgymutató

[1] **Freud Róbert**, *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó (1998).

[2] **Klukovits Lajos**, *Klasszikus és lineáris algebra*, POLYGON Jegyzettár (Szeged, 1999).

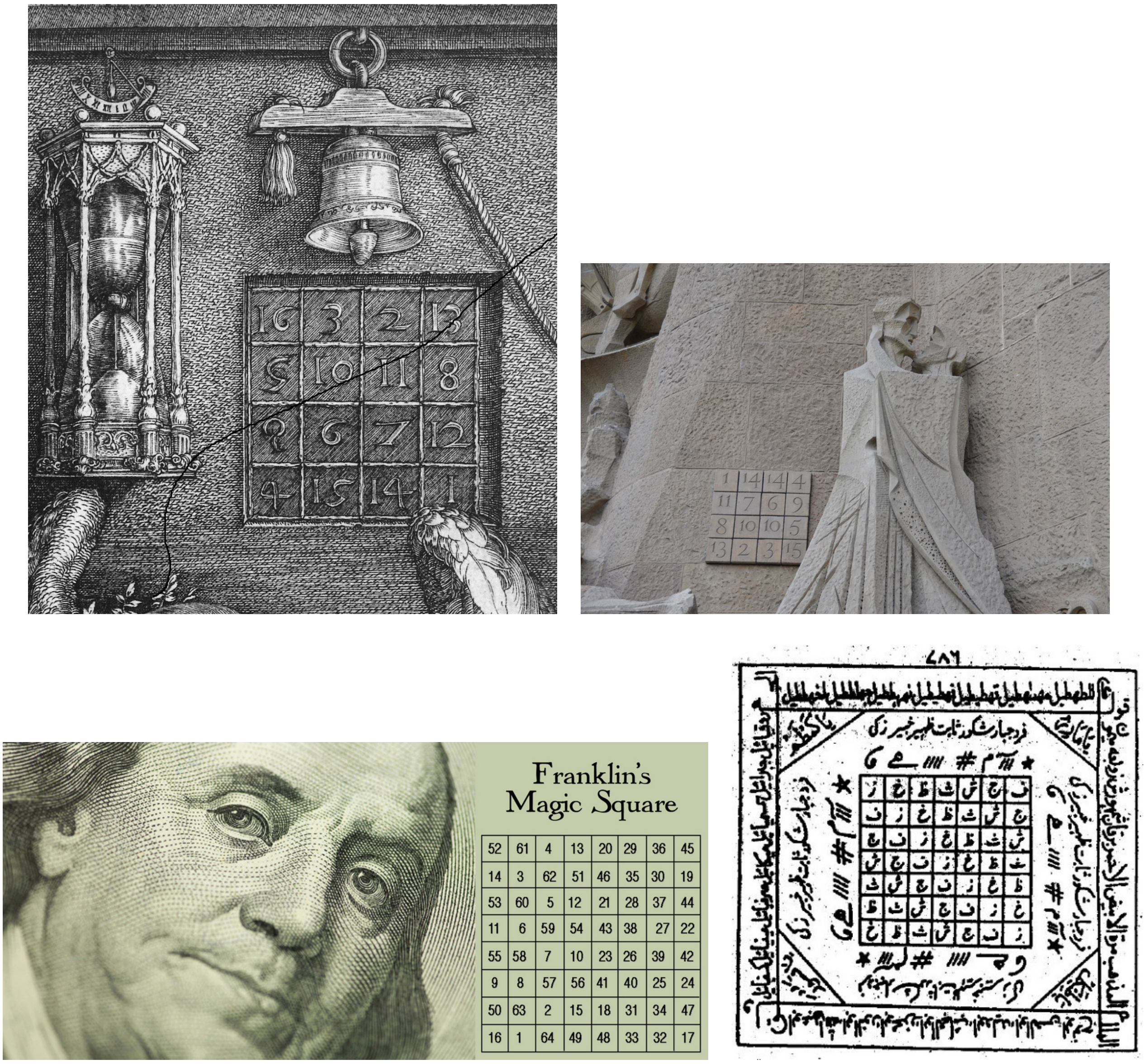
[3] **Kuros, A. G.**, *Felsőbb algebra*, Tankönyvkiadó (1967).

[4] **Szabó László**, *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Jegyzettár (2003).

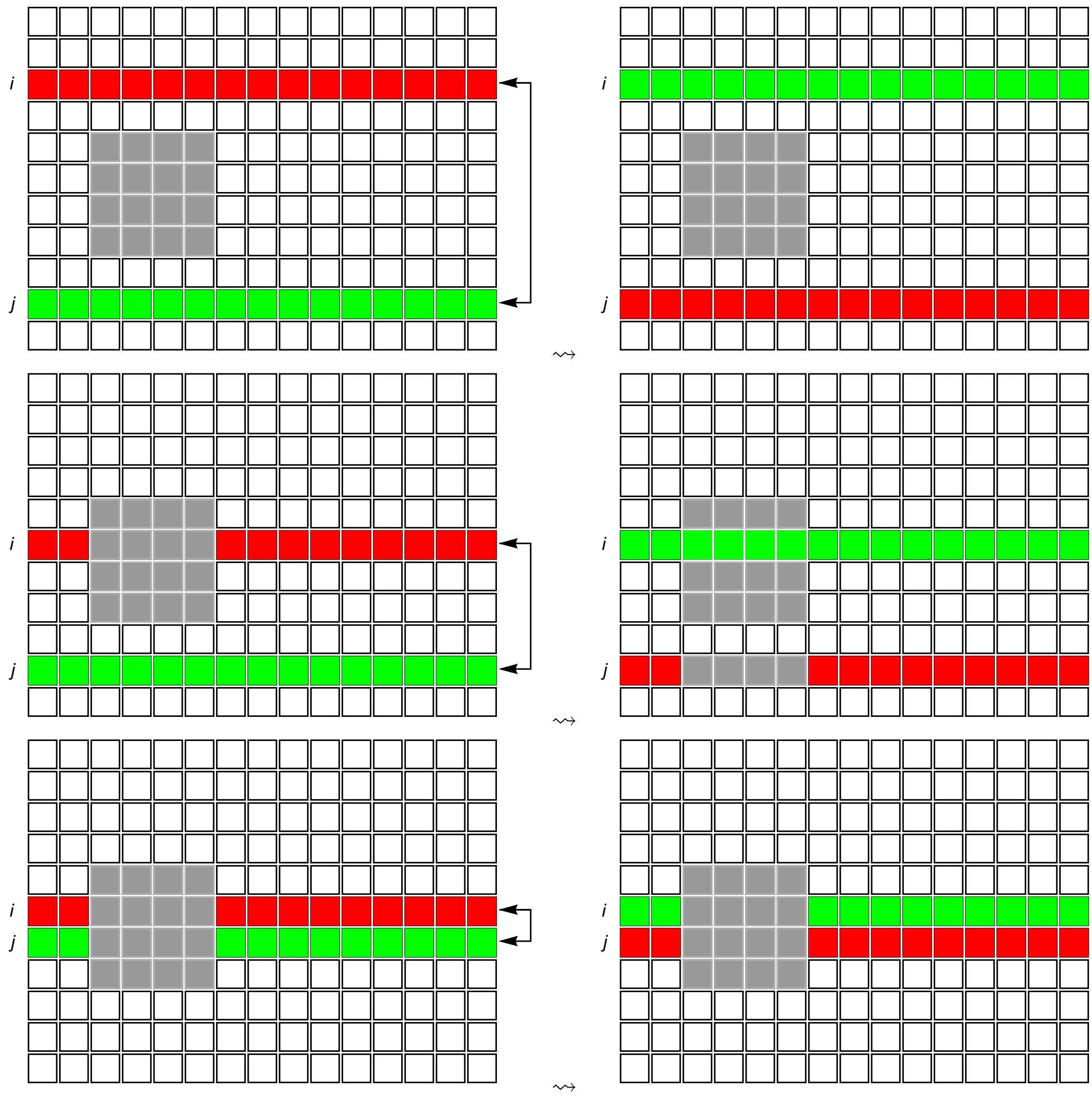
[5] **Fagyejev, D. K. és Szominszkij, I. S.**, *Felsőbb algebrai feladatok*, Műszaki Könyvkiadó (1973), Typotex (2000).

Tárgymutató

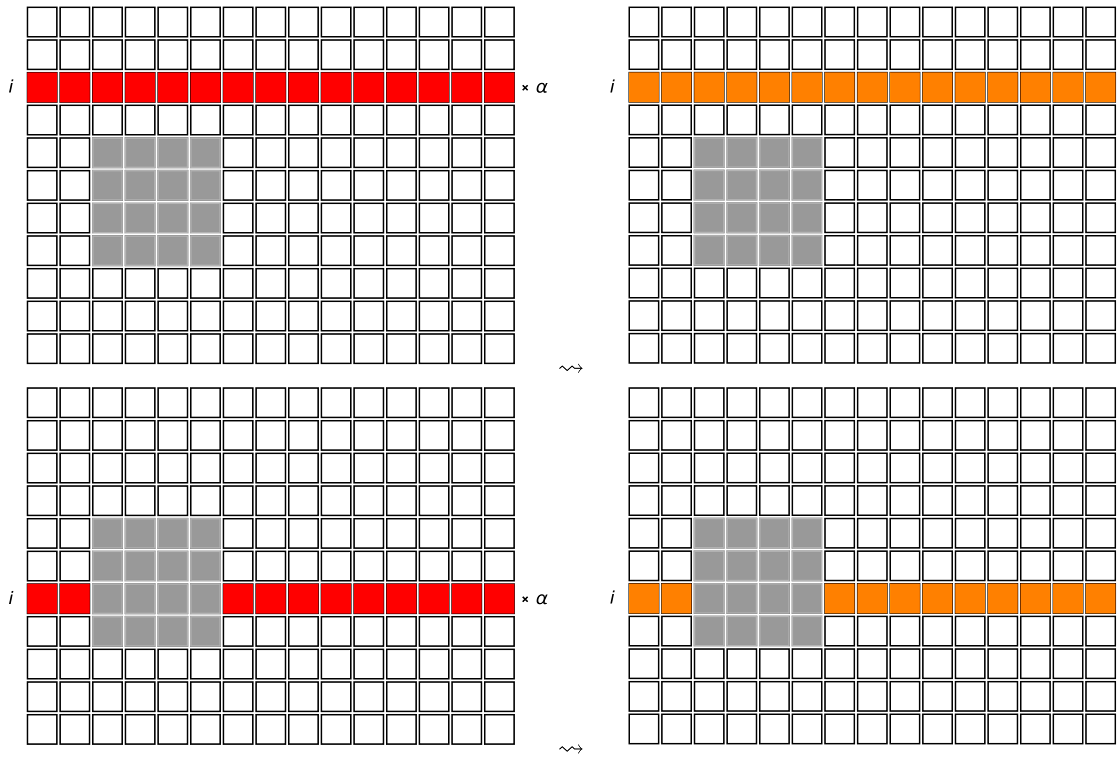
Ábrák



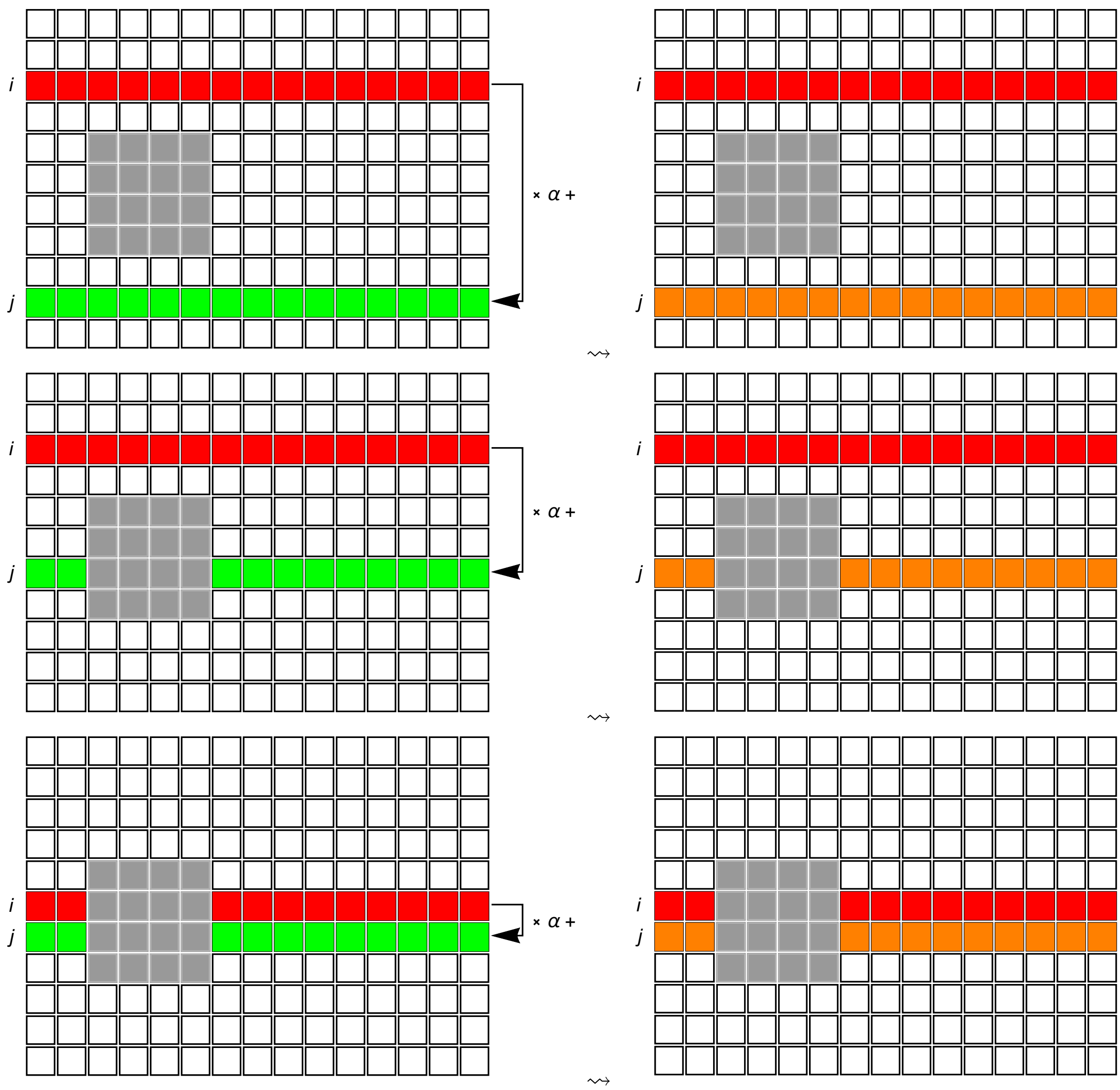
5. ábra. Bűvösnégyzetek



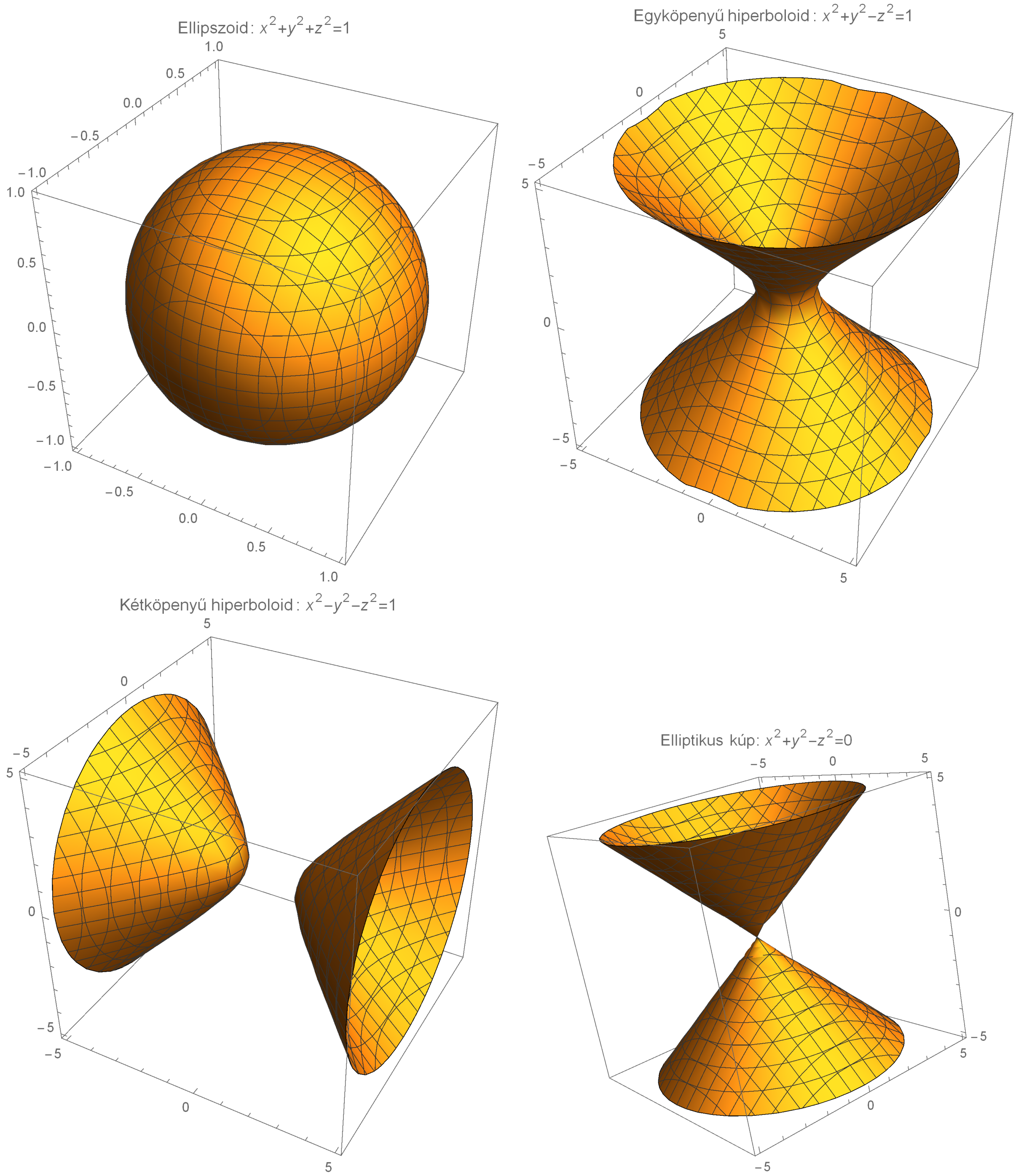
6. ábra. Sorcsere



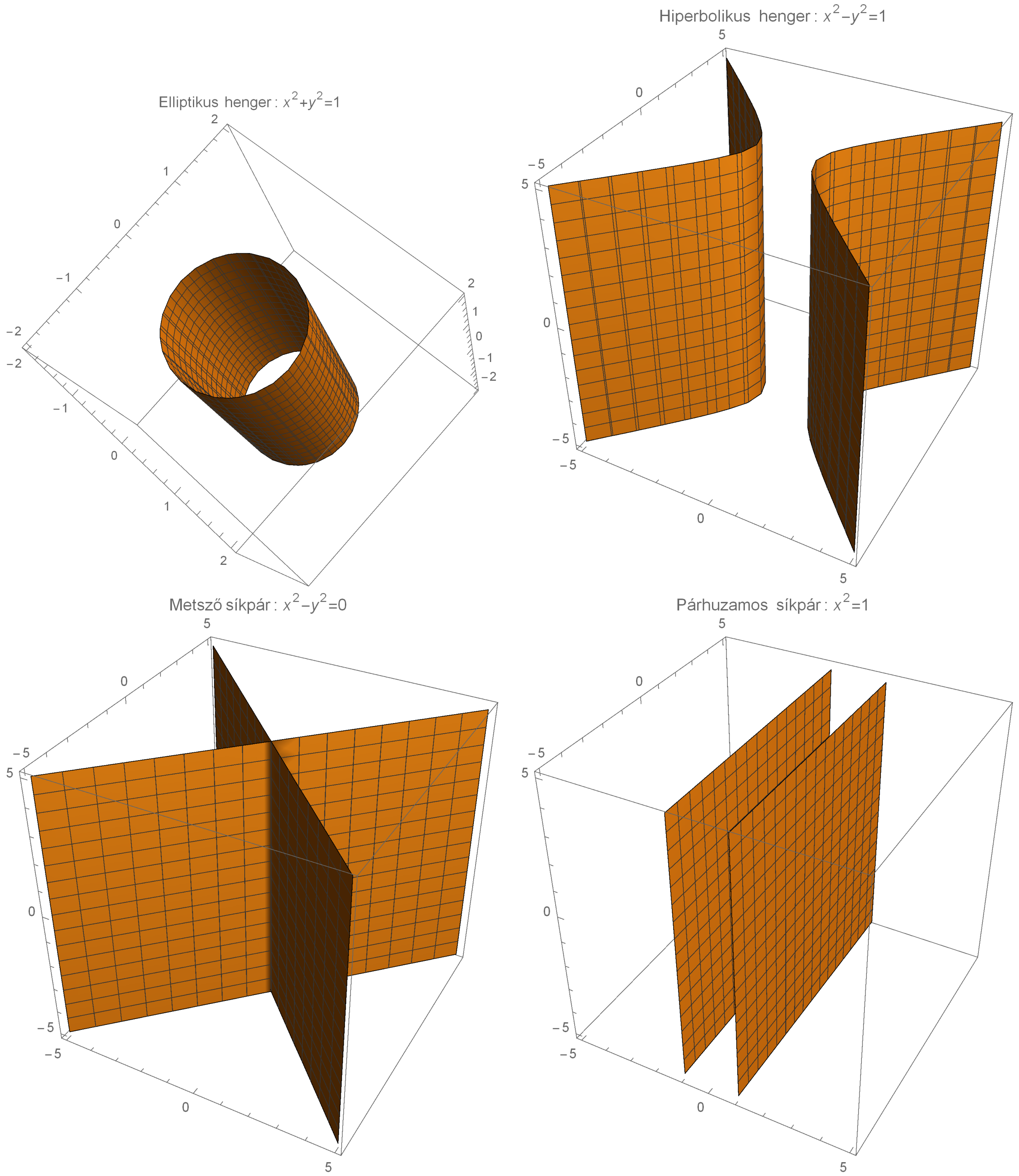
7. ábra. Sor szorzása skalárral



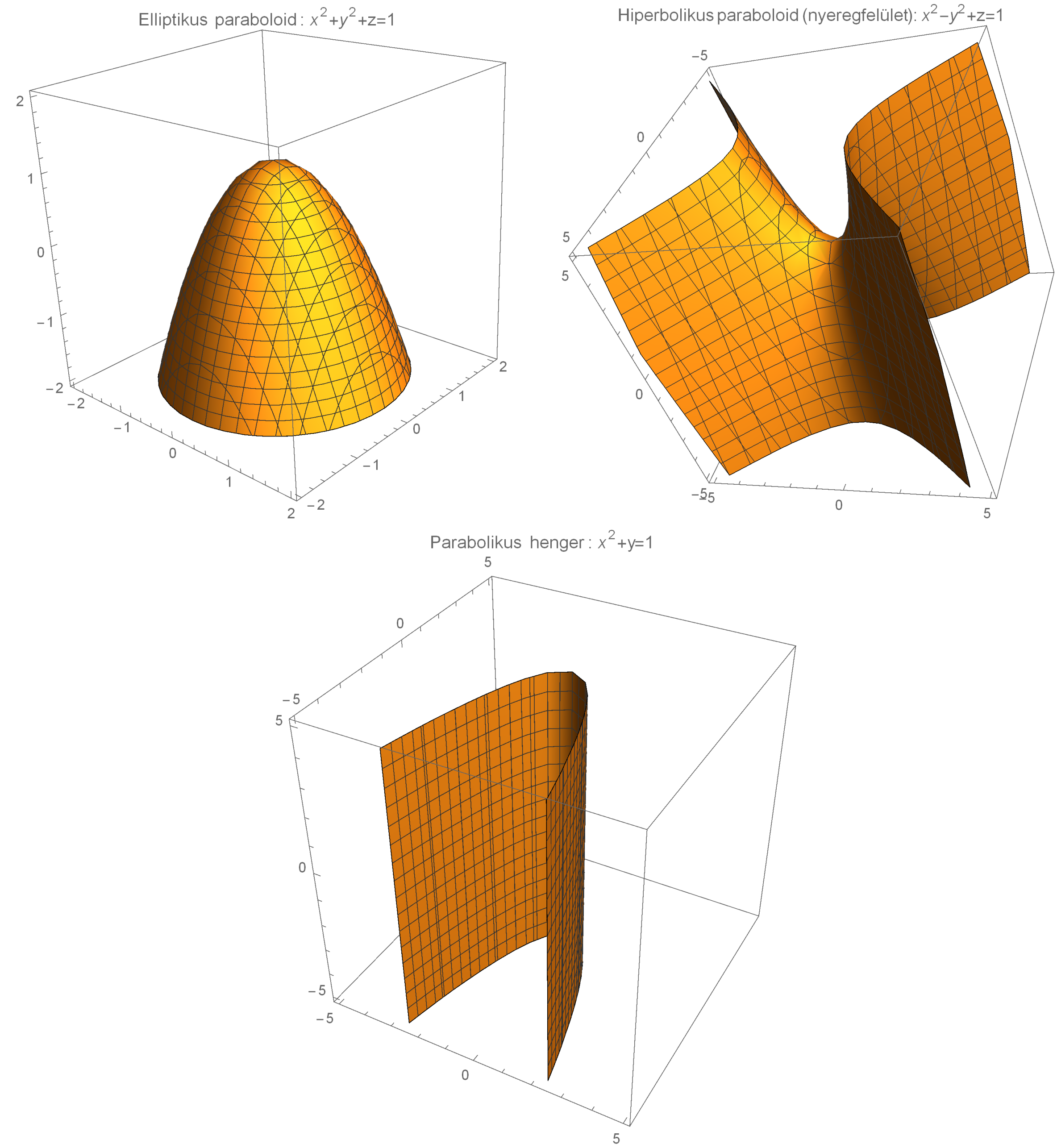
8. ábra. Sor szorzása skalárral és hozzáadása egy másik sorhoz



9. ábra. Centrális másodrendű felületek



10. ábra. Másodrendű felületek 1. (paraboloidok, hengerek, síkok)



11. ábra. Másodrendű felületek 2. (paraboloidok, hengerek, síkok)