Def: Algebra típus: $\mathcal{F}$ műveleti jelek halmaza úgy, hogy minden $f \in \mathcal{F}$ jelhez egy $n \in \mathbb{N}$ van hozzárendelve (aritás vagy változó szám).

Def: A nemüres halmaz, $n \in \mathbb{N}$
$f: A^n \to A$ leképezést n-változós műveletnek nevezzük.
Speciálisan $A^\emptyset = \{\emptyset\}$, azaz $f: A^\emptyset \to A$ A egy elemét jelöli ki (konstans).

Def: $\mathbb{A} = (A; \mathcal{F})$ $\mathcal{F}$-típusú algebra, ha A nemüres alaphalmaz, és minden n-változós $f \in \mathcal{F}$ műveleti jelhez egy $f^{\mathbb{A}}: A^n \to A$ művelet van hozzárendelve.

Példa: Csoportok $\mathcal{F} = \{\cdot, {}^{-1}, 1\}$

$\mathbb{A} = (\mathbb{Z}; \{\cdot, {}^{-1}, 1\})$ ahol

$\cdot^{\mathbb{A}}: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(a, b) \mapsto a + b$

${}^{-1\,\mathbb{A}}: \mathbb{Z}^1 \to \mathbb{Z}$, $a \mapsto -a$

$1^{\mathbb{A}}: \mathbb{Z}^0 \to \mathbb{Z}$, $\emptyset \mapsto 1$

A műveletek megléte nem elég, hogy egy megfelelő típusú algebra csoport legyen, kellenek azonosságok.

<u>Példa</u>: grupoid, félcsoport, monoid, Abel-csoport, gyűrű, háló, korlátos háló, modulus, vektortér (de test nem!)

<u>T test feletti vektortér</u>:

$$\mathcal{F} = \{+, -, 0\} \,\dot\cup\, \{ t\cdot \mid t \in T\}$$

unér műveletek

<u>Def</u>: <u>részalgebra</u>, <u>homomorfizmus</u>, <u>beágyazás</u> (injektív homomorfizmus), <u>izomorfizmus</u>

<u>Áll</u>: Egy algebra részalgebráinak hálója algebrai.

<u>Feladat</u>: A $(\mathbb{Q}; \wedge, \vee)$ háló részalgebra hálójában melyek a kompakt elemek?

kongruenciák, homomorfizmus tételek

Def: Legyen $\mathbb{A}_i = (A_i; \mathcal{F})$ $\mathcal{F}$-típusú algebrák egy rendszere. Legyen

$$B = \prod_{i \in I} A_i$$ és minden $f \in \mathcal{F}$ n-váltf műveleti jelre, $b_1, \dots, b_n \in B$

$$f^{\mathbb{B}}(b_1, \dots, b_n)(i) = f^{\mathbb{A}_i}(b_1(i), \dots, b_n(i))$$

Ekkor a $\mathbb{B} = (B; \mathcal{F})$ algebrát az $\mathbb{A}_i$ algebrák direkt szorzatának nevezzük.

Ha az $\mathbb{A}_i$ algebrák megegyeznek, akkor direkt hatványról beszélünk $\mathbb{B} = \mathbb{A}^I$

Megj: Ha $I = \{1, \dots, n\}$ akkor sokszor $b \in \prod_{i \in I} A_i$ elemeket $b = (b_1, \dots, b_n)$-el jelölni ahol $b_i = b(i)$.

Jelölés: $\mathbb{A}_1 \times \dots \times \mathbb{A}_n = \prod_{1 \le i \le n} \mathbb{A}_i$

Tétel: $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 \cong \mathbb{A}_2 \times \mathbb{A}_1$

$$\mathbb{A}_1 \times (\mathbb{A}_2 \times \mathbb{A}_3) \cong (\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2) \times \mathbb{A}_3$$

Def: $\mathbb{A}$ direkt felbontható, ha léteznek nemtriviális $\mathbb{A}_i$ $(i \in I)$, $|I| \geq 2$ algebrák, hogy $\mathbb{A} \cong \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$.

Különben direkt felbonthatatlan.

Def: Természetes homomorfizmus, $\mathbb{B} = \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$

$\pi_i : \mathbb{B} \to \mathbb{A}_i$, $\pi_i(b) = b(i)$

neve i-edik projekció.

Áll: π_i homomorfizmus, $\ker \pi_i$ kongruencia

Def: α, β faktorkongruencia párja $\mathbb{A}$-nak ha $\alpha \vee \beta = \nabla$ és $\alpha \wedge \beta = \Delta$.

Tétel: $\mathbb{A}$ akkor és csak akkor direkt felbonthatatlan, ha csak az ∇, Δ az egyetlen faktor-kongruencia párja.

Tétel: Minden véges algebra előállítható direkt felbonthatatlan algebrák direkt szorzataként.

<u>Feladat</u>: Melyek a direkt felbonthatatlan vektorterek? Van-e olyan vektortér amely nem izomorf direkt felbonthatatlan vektorterek direkt szorzatával?

<u>Tétel</u>: Legyenek $\alpha_i : \mathbb{A} \to \mathbb{A}_i \quad (i \in I)$ homomorfizmusok és $\alpha : \mathbb{A} \to \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$

$$\alpha(x)(i) = \alpha_i(x) \text{ kanonikus leképezés.}$$

Ekkor α homomorfizmus, és akkor és csak akkor beágyazás, ha $\bigcap_{i \in I} \ker \alpha_i = \Delta$

<u>Def</u>: Az $\alpha : \mathbb{A} \to \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$ beágyazás <u>szubdirekt</u>, ha $\pi_i \alpha(A) = A_i$ minden i-re.

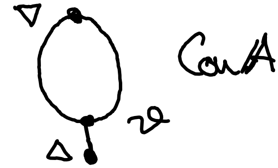
<u>Def</u>: $\mathbb{A}$ <u>szubdirekt irreducibilis</u>, ha nem triviális és minden szubdirekt beágyazáshoz van olyan $i \in I$, hogy $\pi_i \alpha$ izomorfizmus.

<u>Tétel</u>: Legyen $\vartheta_i \in \mathrm{Con}\, \mathbb{A} \ (i \in I)$ úgy, hogy $\bigcap \vartheta_i = \Delta$. Ekkor az

$$\mathbb{A} \to \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i/\vartheta_i \text{ szubdirekt beágyazás.}$$

Tétel: $\mathbb{A}$ akkor és csak akkor szubdirekt irred, ha van $\vartheta \in \mathrm{Con}\,\mathbb{A}$

$\Delta < \varrho \Rightarrow \vartheta \le \varrho$ **monolit**



Tétel: Minden algebra előáll szubdirekt irreducibilis algebrák szubdirekt szorzataként.

Köv: Minden véges algebra előáll véges sok véges szubdirekt irred algebra szubdirekt szorzataként.

Áll: Minden szubdirekt irreducibilis algebra direkt felbonthatatlan.

Feladat: Keressünk direkt felbonthatatlan de szubdirekt felbontható hálót.

Def: Egy teljes háló $x \in L$ eleme **teljesen metszet-irreducibilis**, ha $x = \bigwedge Y$, $Y \subseteq L$ esetén $x \in Y$.

Tétel: $\mathbb{A}/\vartheta$ pontosan akkor szubdirekt irreducibilis, ha ϑ teljesen metszet irreducibilis $\mathrm{Con}\,\mathbb{A}$-ban.

Def: egyszerű algebra: pontosan két kongruenciája van: Δ és ∇.

Feladat: Mutassuk meg hogy tetszőleges A halmazon az ekvivalencia relációk hálója egyszerű.

Feladat: Jellemezzük a véges szubdirekt irreducibilis Abel-csoportokat.

Feladat Adjunk példát végtelen szubdirekt irreducibilis Abel-csoportra.

Def: Legyen L háló. $I \subseteq L$ ideál, ha $L \neq \emptyset$, lefele zárt $(\downarrow L = L)$ és zárt az egyesítésre. $F \subseteq L$ filter, ha $F \neq \emptyset$, felfelé zárt $(\uparrow F = F)$ és zárt a metszetre.

Def: Az $I \subseteq L$ ideál prímideál, ha $L - I$ filter.

<u>Áll</u>: L ideáljai / filterei hálót alkotnak. Ha L teljes akkor az ideál / filter háló is az.

$$I \vee J = \{ a \in L : \exists i \in I, j \in J : a \le i \vee j \}$$

<u>Tétel</u>: L disztributív háló és $a \not\le b$, akkor létezik olyan $P \subseteq L$ primideál, hogy $b \in P$, $a \notin P$.

<u>Biz</u>: a-t nem tartalmazó ideálok láncainak uniója ideál. A kiválasztási axiómából legyen P max ilyen. Állítjuk hogy P prím.

$c \wedge d \in P$, $P \vee \downarrow c$ ideál megegyezik P-vel vagy tartalmazza a-t. Hasonlóan $P \vee \downarrow d$-re. Tehát $a \in (P \vee \downarrow c) \cap (P \vee \downarrow d)$ azaz létezik $p, q \in P$: $a \le (p \vee c) \wedge (q \vee d)$

$$= \underset{\in P}{(p \wedge q)} \vee \underset{\in P}{(p \wedge c)} \vee \underset{\in P}{(q \wedge d)} \vee \underset{\in P}{(c \wedge d)} \in P$$

∎

<u>Tétel</u>: Csak a 2-elemű disztributív háló szubdirekt irred. Ugyanígy Boole-algebrákra és félhálókra.

<u>Megj</u>: ideál $\Longleftrightarrow$ félháló hom. $(\{0,1\}; \vee)$-be

filter $\Longleftrightarrow$ $(\{0,1\}; \wedge)$-be

prímideál $\Longleftrightarrow$ $(\{0,1\}; \wedge, \vee)$-be.

<u>Köv</u>: Minden disztributív háló a 2-elemű háló szubdirekt szorzatával izomorf..