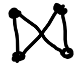
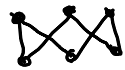
Univerzális Algebra
2023 tavasz

Irodalom: Kiss Emil: Bevezetés az algebrába
Burris–Sankappanavar: Bevezetés az univerzális algebrába
McKenzie–McNulty–Taylor: Algebras, lattices varieties, volume 1.

Def: $(A;\leq)$ részbenrendezett halmaz, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.
teljes (lineáris) rendezés, ha minden $a,b\in A$-ra $a\leq b$ vagy $b\leq a$.
$a<b \iff a\leq b$ és $a\neq b$.
$a\prec b$ fedési reláció $\iff a<b$ és nincs $c\in A$ hogy $a<c<b$.

Def: $X\subseteq A$ felső (alsó) korlátja $p\in A$ ha $x\leq p$ minden $x\in X$-re.
legkisebb felső korlát: a felső korlátok közt van legkisebb: $\sup(X)$, $\inf(X)$ hasonlóan
legnagyobb elem: $1=\sup(A)$ ha létezik
legkisebb elem: $0=\inf(A)$ ha létezik.

Példák:    koronák

 antilánc, lánc 

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ normál rendezéssel

oszthatóság $\mathbb{N}$-ben, $\mathbb{Z}$, $T[x]$-ben

részcsoportok, alterek, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Def. előrendezés: reflexív és tranzitív

Def: ekvivalencia reláció: szimmetrikus előrendezés

Áll: $(A;\varrho)$ előrendezés akkor $\vartheta = \varrho \cap \varrho^{-1}$ ekvivalencia és az ekvivalencia osztályok A/ϑ halmazán ϱ/ϑ részbenrendezés, ahol

$A/\vartheta = \{a/\vartheta \mid a \in A\}$, $a/\vartheta = \{b \mid (a,b) \in \vartheta\}$

$\varrho/\vartheta = \{(a/\vartheta, b/\vartheta) \mid (a,b) \in \varrho\}$

Példa: oszthatóság $\mathbb{Z}$ és $T[x]$-ben

Példa: További részbenrendezés példák

$(\{$részbenrendezések A-n$\}; \subseteq)$

$(\{$ekvivalencia relációk A-n$\}; \subseteq)$

$(\{$véges gráfok$\};$ feszített részgráf
normál részgráf $)$

Def: $(A;\leq)$ hálósan rendezett, bármely két elemnek van legkisebb és legnagyobb felső korlátja.

Def: $(A;\wedge,\vee)$ háló, ha

① $x\wedge y=y\wedge x$, $x\vee y=y\vee x$ kommutatív

② $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$ asszociatív
hasonlóan $\vee$-re

③ $x\wedge x=x$, $x\vee x=x$ idempotens

④ $x\wedge(y\vee x)=x$ elnyelési tulajdonság
$x\vee(y\wedge x)=x$

Feladat: ③ következik a többiből

Tétel: Ha $(A;\leq)$ hálósan rendezett, akkor $(A;\wedge,\vee)$ háló ahol
$$x\wedge y=\inf(\{x,y\}) \text{ és } x\vee y=\sup(\{x,y\})$$
Ha $(A;\wedge,\vee)$ háló, akkor $(A;\leq)$ hálósan rendezett halmaz ahol
$$x\leq y \Leftrightarrow x\wedge y=x.$$
Ezen konstrukciók egymásnak inverzei.

Tétel (dualitás elve) $(A;\leq)$ vagy $(A;\wedge,\vee)$ háló $\Leftrightarrow$ $(A;\geq)$ vagy $(A;\vee,\wedge)$ háló.

__Def__: __teljes háló__ : bármely részhalmazának létezik infimuma és supremuma.

__Példa__: $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}; \leq)$ de $(\mathbb{Q}; \leq)$ nem.

részcsoport háló, altér háló

topologikus tér nyílt részhalmazai a tartalmazásra véve.

ekvivalencia relációk halmaza

__Tétel__: Ha egy részbenrendezett halmaz minden részhalmazának van infimuma, akkor az teljes háló

__Megj__: Itt $\bigwedge \emptyset$ lesz a legnagyobb elem és $\bigvee \emptyset$ a legkisebb, azaz minden teljes háló korlátos (van 0 és 1 eleme).

__Def__: Adott A halmaz és $C: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ ez __lezárási operátor__, ha

1. $X \subseteq C(X)$ __extenzivitás__
2. $C^2(X) = C(X)$ __idempodencia__
3. $X \subseteq Y \Rightarrow C(X) \subseteq C(Y)$ __monotonitás__

Def: zárt részhalmaz, ha $C(X)=X$.

Tétel: tetszőleges lezárási operátorra a zárt halmazok teljes hálót alkotnak a tartalmazásra nézve, ahol

$$\bigwedge_{i\in I} Z_i = \bigcap Z_i \quad \text{és} \quad \bigvee_{i\in I} Z_i = C\left(\bigcup_{i\in I} Z_i\right).$$

Def: A C lezárási operátorhoz tartozó teljes háló jelölése $L(C)$.

Tétel: Minden teljes háló izomorf $L(C)$-vel egy megfelelően megválasztott lezárási operátorra.

Def: Az L háló a eleme kompakt ha minden $X \subseteq L$, $a \leq \bigvee X$ halmazhoz létezik $Y \subseteq X$ véges hogy $a \leq \bigvee Y$.

Def: L kompaktul generált, ha minden $a \in L$ eleméhez van kompakt elemek C hogy $a = \bigvee C$.

Def: L háló algebrai, ha teljes és kompaktul generált.

<u>Példa</u>: Tetszőleges G csoport részcsoport hálója algebrai

① tetszőleges sok részcsoport metszete is részcsoport, G a legnagyobb részcsop, tehát a részcsop. háló teljes

② minden $H \leq G$ részcsoportra

$$H = \bigvee_{h \in H} [h]$$

③ egy részcsoport akkor és csak akkor kompakt, ha végesen generált.

$H \leq G$, $H = \bigvee_{h \in H} [h]$, ha H kompakt, akkor ebből a fedésből véges is lefedi.

Fordítva, ha $H = [H_0]$ végesen generált és $H \leq \bigvee_{i \in I} G_i = \left[\bigcup_{i \in I} G_i\right]$, akkor H_0 minden eleme kigenerálásához elég csak véges sok elemet használni $\bigcup G_i$-ből, így összességében van véges $I_0 \subseteq I$ hogy $H \leq \bigvee_{i \in I_0} G_i$.

Def Algebrai lezárási operátor

$$C(X) = \bigcup_{\substack{X_0 \subseteq X \\ \text{véges}}} C(X_0)$$

(kompaktság)
ebből következik a monotonitás

Tétel: Ha C algebrai lezárási operátor akkor L(C) algebrai háló.

Tétel: Ha L algebrai háló, akkor izomorf egy algebrai lezárási operátor zárt halmazainak hálójával.

Biz: $A = \{ L \text{ kompakt elemei} \}$

$$C(X) = \{ a \mid a \leq \bigvee X \}$$

Def: Egy $Z \subseteq P(A)$ halmazrendszer zárt, ha létezik olyan lezárási operátor amelynek zárt halmazai pontosan Z.

Feladat: Adjunk meg szükséges és elégséges feltételt Z-re, hogy zárt halmazrendszer legyen.

Feladat: Adjunk meg szükséges és elégséges feltételt $Z \subseteq P(A)$-ra, hogy algebrai zárt halmazrendszer legyen.

Feladat Legyen L háló és $X \subseteq L$-re

$$X^+ = \{ y \in L \mid \forall x \in X \quad x \leq y \}$$
$$X^- = \{ y \in L \mid \forall x \in X \quad y \leq x \}$$

és $C(X) = (X^+)^-$

Mutassuk meg, hogy C lezárási operátor, és L beágyazható L_C-be

Def: Ez a Dedekind-MacNeill-féle kiterjesztése a hálónak.

Feladat: Adjunk példát olyan teljes hálóra amely nem ágyazható be algebrai hálóba úgy, hogy tetszőleges (végtelen) metszet és egyesítés is megőrződjön.

Feladat: Adjunk példát algebrai hálóra, melynek duálisa nem algebrai.

Feladat: Mutassuk meg, hogy ha L teljes háló és $f: L \to L$ monoton leképezés, akkor annak van fixpontja.

Feladat: Mi a $(\mathbb{Q}; \leq)$ háló Dedekind-MacNielle kiterjentése?

Feladat: Teljesítsük a $(\mathbb{Q}; \leq)$ háló lefelé zárt részhalmazait ($y \leq x \in X \Rightarrow y \in X$) a tartalmazásra nézve. Algebrai-e ez a háló?

Tétel: Legyen $\rho \subseteq A \times B$ és

$X \subseteq A$ esetén $X^+ = \{ y \in B \mid \forall x \in X \ (x,y) \in \rho \}$

$Y \subseteq B$ esetén $Y^- = \{ x \in A \mid \forall y \in Y \ (x,y) \in \rho \}$

Ekkor $(X^+)^-$ lezárási operátor A-n, $(Y^-)^+$ lezárási operátor B-n és

a $+$ és $-$ leképezések duális háló-izomorfizmusok a két teljes háló között.

Def: Az előbbi ϱ relációt és a hozzá tartozó két lezárási operátort Galois-kapcsolatnak nevezzük, és a $+$ és $-$ leképezéseket polaritásoknak.

Példa: Dedekind-MacNielle kiterjesztés

Példa: Legyen $L|K$ testbővítés,

$$A = L,\ B = \{\varphi \in \mathrm{Aut}\, L \mid \varphi|_K = id\}$$

$$(a,\varphi) \in \varrho \iff \varphi(a) = a.$$

Ekkor $X \subseteq A$ zárt $\iff K \leq X \leq L$ résztest

$Y \subseteq B$ zárt $\iff Y \leq B$ részcsoport

Példa: Euklideszi tér $A = B$

$(a,b) \in \varrho$ ha $\langle a,b \rangle = 0$.

Példa: K test, $A = K^n$, $B = K[x_1,\dots,x_n]$

$$(a,f) \in \varrho \iff f(a) = 0$$

Példa: Műveletek és relációk

Példa: Algebrák és azonosságok.