MTNM113E: Komplex számok

(előadásvázlat, 2022. november 17.)

Kátai-Urbán Kamilla

1. Definíció. A valós számokból álló számpárokat komplex számoknak nevezzük. A komplex számok halmazát $\mathbb{C}$ jelöli, azaz $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. A $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ helyett azt írjuk, hogy $z = a + bi$, amelyet a z kanonikus alakjának nevezünk. Az $a \in \mathbb{R}$ számot z valós részének, míg a $b \in \mathbb{R}$ számot z képzetes részének hívjuk, és $a = \operatorname{Re} z$, illetve $b = \operatorname{Im} z$-vel jelöljük. Az i a képzetes egység, $i^2 = -1$.

2. Definíció. A $z = a + bi$ komplex szám konjugáltján a $\overline{z} = a - bi$ komplex számot, és abszolút értékén a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ valós számot értjük.

Ha a kifejezésekkel való szokásos számolási szabályokhoz (asszociativitás, kommutativitás és disztributivitás) még hozzávesszük azt, hogy $i^2 = -1$, akkor a következőképpen számolhatunk kanonikus alakban.

- Összeadás: $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- Szorzás: $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.
- Reciprok: mivel az i a -1 négyzetgyöke, a reciprok képzésnél a gyöktelenítésnél használt lépést hajtjuk végre, beszorzzuk a számlálót és a nevezőt is a nevező konjugáltjával.
  Legyen $z = a + bi \neq 0$ komplex szám, ekkor

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 - b^2 i^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} \cdot i$$

3. Tétel. A komplex számok összeadása és szorzása asszociatív és kommutatív, továbbá a szorzás disztributív az összeadásra.

4. Definíció. Legyen adott a síkban egy Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer, és feleltessük meg az $a + bi$ komplex számnak az (a, b) koordinátájú pontot. Így kapjuk a komplex számsíkot, más néven a Gauss-féle számsíkot. Az első tengelyt (abszcissza) valós tengelynek, a második tengelyt (ordináta) pedig képzetes tengelynek hívjuk. A valós tengelyen találhatók a valós számok, a képzetes tengelyen pedig a tiszta képzetes számok.

5. Megjegyzés. A komplex számsíkon a konjugálás nem más, mint a valós tengelyre való tükrözés, az abszolút érték az origótól (nullától) mért távolság, a komplex számok összeadása pedig (hely)vektorok összeadása.

6. Tétel. Tetszőleges $u, v \in \mathbb{C}$ számra

(1) $\overline{\overline{u}} = u$,
(2) $\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v}$,
(3) $\overline{u - v} = \overline{u} - \overline{v}$,
(4) $\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$
(5) $\overline{u/v} = \overline{u}/\overline{v}$, ha $v \neq 0$,
(6) $\overline{u} = u \iff u \in \mathbb{R}$,
(7) $u + \overline{u} = 2 \operatorname{Re} u$,
(8) $u \cdot \overline{u} = |u|^2$.

7. Tétel. Tetszőleges $u, v \in \mathbb{C}$ számra

(1) $|u| = 0 \iff u = 0$,
(2) $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$,
(3) $|u/v| = |u|/|v|$, ha $v \neq 0$,
(4) $|u + v| \leq |u| + |v|$,
(5) $|\overline{u}| = |u|$,
(6) $1/u = \overline{u}/|u|^2$, ha $u \neq 0$.

8. Definíció. Egy nemnulla z komplex szám argumentuma az a szög, amivel a valós tengely pozitív felét el kell forgatni az origó körül, hogy átmenjen a z-nek megfelelő ponton, amit $\arg z$-vel jelöljük. (Ez 2π egész számú többszöröseinek erejéig egyértelműen meghatározott.) A nulla számnak nincsen argumentuma.

9. Definíció. A nemnulla $z = a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakján a

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

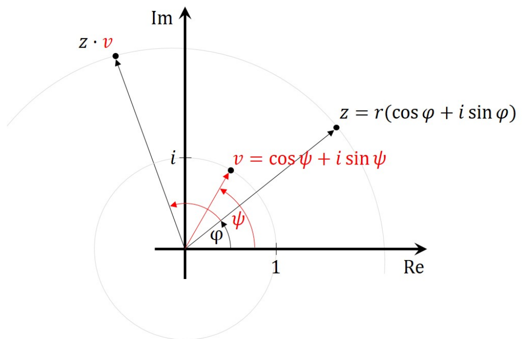
felírást értjük, ahol $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ és $\varphi = \arg z$. A nulla komplex számnak nincsen trigonometrikus alakja.

10. Megjegyzés. A nullától különböző komplex számok argumentuma csak 2π egész számú többszöröseitől eltekintve meghatározott. Ezért a komplex számok trigonometrikus alakja sem egyértelmű: például mind $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, mind a $\cos\frac{-3\pi}{2} + i\sin\frac{-3\pi}{2}$ az i komplex szám trigonometrikus alakja. Viszont ha egy konkrét komplex szám trigonometrikus alakját kell meghatároznunk, akkor az argumentumot mindig a $[0, 2\pi[$ intervallumban adjuk meg.

11. Tétel. Tetszőleges nullától különböző $u = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ és $v = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ komplex számokra

(1) $\bar{u} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$,
(2) $u \cdot v = rs(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$,
(3) $u^{-1} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$,
(4) $u/v = r/s \cdot (\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi))$.

12. Megjegyzés. A komplex számok kanonikus alakját felhasználva láthattunk, hogy rögzített $v \in \mathbb{C}$ komplex szám esetén a $z \mapsto z + v$ leképezés nem más, mint a v-hez tartozó vektorral való eltolás a komplex számsíkon. A komplex számok trigonometrikus alakját felhasználva pedig látható, hogy rögzített $v = \cos\psi + i\sin\psi$ egységnyi abszolút értékű komplex szám esetén a $z \mapsto z \cdot v$ leképezés nem más, mint az origó körüli ψ szögű forgatás a komplex számsíkon.



13. Példa. Az ismert szinusz és koszinusz összegzési képleteket könnyen megkaphatjuk komplex számok segítségével. Tekintsük a

$$u = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad v = \cos\psi + i\sin\psi$$

komplex számokat. A trigonometrikus alakokkal számolva a szorzatuk

$$u \cdot v = \cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi).$$

De ha a kanonikus alakot használjuk a szorzat kiszámolására, akkor

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot (\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= \cos\varphi \cdot \cos\psi + \cos\varphi \cdot i\sin\psi + i\sin\varphi \cdot \cos\psi + i\sin\varphi \cdot i\sin\psi \\ &= (\cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cdot \sin\psi) + i(\cos\varphi \cdot \sin\psi + \sin\varphi \cdot \cos\psi). \end{aligned}$$

Mivel az $u \cdot v$ komplex szám egyértelműen írható fel kanonikus alakban, ezért

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) &= \cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cdot \sin\psi, \text{ és} \\ \sin(\varphi + \psi) &= \cos\varphi \cdot \sin\psi + \sin\varphi \cdot \cos\psi. \end{aligned}$$

Hasonlóan számítható ki a $\cos(\varphi - \psi)$ és $\sin(\varphi - \psi)$ képlete is, de ekkor az u és v komplex számok hányadosát kell vennünk.

14. Tétel (Moivre-képlet). Bármely nem zéró $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex szám és $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

15. Példa. Tudjuk, hogy $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ és $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Megmutatjuk, hogy $\cos 3\alpha$ és $\sin 3\alpha$ hogyan számítható ki egyszerűen. Vegyük a $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ komplex számot és számoljuk ki a harmadik hatványát a trigonometrikus alakja

$$z^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha,$$

és a kanonikus alakjai segítségével (felhasználva azt, hogy $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$)

$$\begin{aligned} z^3 &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 \\ &= \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha - 3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha - i\sin^3\alpha \\ &= (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha) + i(3\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha - \sin^3\alpha). \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha, \text{ és} \\ \sin 3\alpha &= 3\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha - \sin^3\alpha. \end{aligned}$$

16. Definíció. Tetszőleges n pozitív egész szám és $z \in \mathbb{C}$ esetén azt mondjuk, hogy az u komplex szám n-edik gyöke z-nek, ha $u^n = z$.

17. Tétel. Minden nemnulla $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex számnak pontosan n különböző n-edik gyöke van, mégpedig

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, \ldots, n-1).$$

18. Definíció. Az ε komplex számot n-edik egységgyöknek nevezzük ($n \in \mathbb{N}^+$), ha $\varepsilon^n = 1$. Az ε komplex szám egységgyök, ha n-edik egységgyök valamely $n \in \mathbb{N}^+$-re.

19. Tétel. Az n-edik egységgyökök a következők:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, \ldots, n-1).$$

Ezzel a jelöléssel $\varepsilon_0 = 1$ és $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ minden $k = 0, \ldots, n-1$ esetén.

20. Megjegyzés. Az n-edik egységgyökök egy szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, amelynek a körülírt köre az origó középpontú egységkör, és egyik csúcsa 1. (Ez a két információ egyértelműen meg is határozza az n-szöget.)

21. Példa. Az első egységgyökök halmaza a

$$\{\, z \in \mathbb{C} : z^1 = 1 \,\} = \{1\}.$$

A második egységgyökök halmaza a

$$\{\, z \in \mathbb{C} : z^2 = 1 \,\} = \{1, -1\}.$$

A harmadik egységgyökök halmaza a

$$\{\, z \in \mathbb{C} : z^3 = 1 \,\} = \left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$

A negyedik egységgyökök halmaza a

$$\{\, z \in \mathbb{C} : z^4 = 1 \,\} = \{1, i, -1, -i\}.$$

A hatodik egységgyökök halmaza a

$$\{\, z \in \mathbb{C} : z^6 = 1 \,\} = \left\{1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$

22. Tétel. Egy nemnulla komplex szám összes n-edik gyökét megkaphatjuk, ha egy rögzített n-edik gyökét megszorozzuk sorra az n-edik egységgyökökkel. Tehát ha $u^n = z \neq 0$, akkor a z komplex szám n-edik gyökei: $u \cdot \varepsilon_k$ ahol $k = 0, \ldots, n-1$.

23. Példa. Számoljuk ki a $\sqrt[3]{8i}$ értékeit.

Könnyen leellenőrizhető, hogy $-2i$ gyök, mivel $(-2i)^3 = -8i^3 = 8i$. Tehát ha alkalmazzuk az előző tételt, és tudjuk a harmadik egységgyököket, akkor megkapjuk a három gyököt:

$$-2i \cdot 1 = -2i,$$
$$-2i \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt{3} + i,$$
$$-2i \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i.$$

24. Definíció. Azt mondjuk, hogy a ε komplex szám primitív n-edik egységgyök, ha n-edik egységgyök, de nem m-edik egységgyök semmilyen $0 < m < n$ egészre.

25. Példa. Az 1 primitív első egységgyök. A -1 primitív második egységgyök. A $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ és $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ primitív harmadik egységgyökök. Az i és $-i$ primitív negyedik egységgyökök. Az $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ és $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ primitív hatodik egységgyökök.

26.* Tétel. Az $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ egységgyök akkor és csak akkor primitív n-edik egységgyök, ha k relatív prím n-hez.