MBNK11: Vektorok

(előadásvázlat, 2018. szeptember 24.)

Maróti Miklós

Az előadáshoz ajánlott jegyzet:

- Wettl Ferenc: Lineáris algebra, TypoTex, 2011.
- Szabó László: Bevezetés a lineáris algebrába, Polygon, 2006.
- Essence of linear algebra: chapter 1 and chapter 2.

1. Megjegyzés. A valós számok halmazát $\mathbb{R}$-el jelöljük. Részhalmazt úgy adunk meg, hogy megadjuk egy nagyobb halmaz általános elemét, és utánaírjuk azt a feltételt, amelynek teljesülnie kell ahhoz, hogy az elem a részhalmazba tartozzon. Például a pozitív valós számok halmaza az $\{\, x \in \mathbb{R} : x > 0 \,\}$ jelöléssel írható le, amelyet úgy olvasunk ki, hogy „azon $\mathbb{R}$-beli x elemek halmaza, ahol x nagyobb mint 0."

Geometriai ismétlés

2. Definíció. A sík pontjait a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben azonosítjuk a valós számpárok halmazával, melyet $\mathbb{R}^2$-el jelölünk. Ekkor az origónak a $(0,0)$ számpár, az x-tengely pontjainak pedig az $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \,\}$ halmaz elemei felelnek meg.

3. Megjegyzés. A számegyenes intervallumait szokás számpárral megadni, például $(1,2)$ vagy $[-3,\infty)$, de ezek valós számok halmazait jelölik (a ∞ nem valós szám), és nem keverendők össze a számpárokkal. A két számot tartalmazó halmazok szintén nem számpárok, például $\{1,2\} = \{2,1\}$ de $(1,2) \neq (2,1)$ és $\{1,2\} \neq (1,2)$.

4. Definíció. A síkon egyenesnek nevezzük az $ax + by = c$ egyenlet megoldásainak hamazát, azaz a sík $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c \,\}$ alakban felírható részhalmazait, ahol a, b és c valós paraméterek és $a^2 + b^2 > 0$. Ez a felírás nem egyértelmű (mert mindenhárom paramétert megszorozva egy nemnulla konstanssal a megoldások halmaza nem változik).

5. Definíció. A $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ és $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ pontok távolságán a $\sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$ számot értjük. Például az $(1,0)$ és $(0,1)$ pontok távolsága $\sqrt{2}$. A síkon körnek nevezzük az $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2 \,\}$ alakban felírható halmazokat, ahol $c > 0$.

6. Definíció. Legyen a sík $P \subseteq \mathbb{R}^2$ tetszőleges részhalmaza és $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ tetszőleges síkbeli pont. Ekkor a P halmaz (q_1, q_2) vektorral való eltolása alatt a $\{\, (p_1 + q_1, p_2 + q_2) : (p_1, p_2) \in P \,\}$ halmazt értjük. Például az $y = 2$ egyenlet által meghatározott egyenes az x-tengelynek a $(2018, 2)$ vektorral való eltolása.

7. Lemma. Egyenes eltoltja egyenes, kör eltoltja kör.

8. Lemma. A síkon az origón és az origótól különböző $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ ponton átmenő egyenes megegyezik a $\{\, (cp_1, cp_2) \in \mathbb{R}^2 : c \in \mathbb{R} \,\}$ ponthalmazzal. A síkon a $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ és $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ különböző pontokon átmenő egyenes megegyezik a $\{\, (cp_1 + dq_1, cp_2 + dq_2) \in \mathbb{R}^2 : c + d = 1 \,\}$ ponthalmazzal.

9. Definíció. A $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ pont α szöggel való origó körüli elforgatottján a

$$(p_1 \cdot \cos\alpha - p_2 \cdot \sin\alpha, p_1 \cdot \sin\alpha + p_2 \cdot \cos\alpha)$$

pontot értjük. Például az $(1,1)$ pont 0 szöggel való origó körüli elforgatottja $(1,1)$, mivel $\cos 0 = 1$ és $\sin 0 = 0$, illetve $\frac{\pi}{2}$ szöggel való elforgatottja $(-1,1)$, mivel $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ és $\cos\frac{\pi}{2} = 1$.

10. Definíció. A $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ pont origóra való tükrözése alatt a $(-p_1, -p_2)$ pontot, az x-tengelyre való tükrözésén a $(p_1, -p_2)$ pontot, az y-tengelyre való tükrözésén a $(-p_1, p_2)$ pontot , az x-tengelyre való vetítésén a $(p_1, 0)$ pontot, illetve az y-tengelyre való vetítésén a $(0, p_2)$ pontot értjük.

11. Feladat. A sík fenti transzformációi közül melyek tartják meg a pontok közötti távolságot, továbbá az alakzatok körüljárási irányát?

12. Feladat. Ha a sík fenti transzformációk közül egymás után kettőt vagy hármat elvégzünk, akkor milyen esetben kapunk ismert transzformációt?

13. Feladat. A síkon milyen ponthalmaz lehet

(1) egy egyenes és egy pont,
(2) két egyenes,
(3) egy egyenes és egy kör metszete?

14. Definíció. A tér pontjait a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben azonosítjuk a valós számhármasok halmazával, melyet $\mathbb{R}^3$-el jelölünk. Ekkor az origónak a $(0,0,0)$ számhármas, illetve a z-tengely pontjainak a $\{\,(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\,\}$ halmaz felel meg.

15. Feladat. Adjunk olyan definícióját az egyenesnek, amely hasonlóan megfogalmazható síkban és térben.

16. Feladat. Hogyan tudnánk definiálni a tér síkjait? Hogyan tudnánk definiálni a gömbfelületeket?

17. Feladat. Mikor mondhatjuk a térben, hogy két egyenes (vagy két sík) egymáshoz képest párhuzamos?

18. Feladat. A térben milyen ponthalmaz lehet

(1) két egyenes,
(2) egy egyenes és egy sík,
(3) két sík,
(4) egy sík és egy gömbfelület metszéspontja?

19. Feladat. Definiáljuk a tér következő transzformációit: eltolás, az x-tengely körüli forgatás, az origóra való tükrözés, az y-tengelyre való tükrözés, az xz-síkra való tükrözés, a z-tengelyre való vetítés, és az xy-síkra való vetítés.

Vektorok

20. Megjegyzés. Kötött vektornak nevezzük a $\mathbf{p}$ kezdőponttal és $\mathbf{q}$ végponttal rendelkező $\overrightarrow{\mathbf{pq}}$ irányított szakaszt. Helyvektornak nevezzük azt a kötött vektort, melynek kezdőpontja az origó. Minden $\overrightarrow{\mathbf{pq}}$ kötött vektor eltolható egy helyvektorba. Az egymásba tolható kötött vektorokat szokás szabad vektornak nevezni, ahol nem a két végpont, hanem csak a két végpont egymáshoz való helyzete a fontos. A lineáris algebrában vektor alatt mindig helyvektort (vagy a vele ekvivalens végpontot) értjük.

21. Definíció. A rendezett valós szám-n-esek $\{\,(v_1,v_2,\dots,v_n) : v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}\,\}$ halmazát $\mathbb{R}^n$-el jelöljük és elemeit vektoroknak hívjuk. A vektorokat félkövér kisbetűvel $\mathbf{v} = (v_1,\dots,v_n)$ jelöljük, de táblán sima vagy aláhúzott kisbetűt használunk. A $(0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$ vektort nullvektornak vagy zérusvektornak nevezzük és $\mathbf{0}$-val jelöljük.

22. Definíció. Az $\mathbf{u} = (u_1,\dots,u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1,\dots,v_n)$ vektorok összegén az $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1+v_1,\dots,u_n+v_n)$ vektort értjük. A $\mathbf{v}$ vektor ellentettjén a $-\mathbf{v} = (-v_1,\dots,-v_n)$ vektort értjük.

23. Megjegyzés. A vektorok összegét a síkban szokás a parallelogramma-módszer vagy háromszög-módszer segítségével megszerkeszteni.

24. Tétel. Tetszőleges $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra érvényesek a megszokott algebrai szabályok:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}, && \text{(asszociatív)}\\
\mathbf{u}+\mathbf{v} &= \mathbf{v}+\mathbf{u}, && \text{(kommutatív)}\\
\mathbf{u}+\mathbf{0} &= \mathbf{u},\\
\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) &= \mathbf{0},\\
-(-\mathbf{u}) &= \mathbf{u},
\end{aligned}$$

25. Példa. Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ a sík pontjainak tetszőleges részhalmaza és $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tetszőleges vektora. Ekkor $\{\, \mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbf{u} \in U \,\}$ a U ponthalmaz $\mathbf{v}$ vektorral való eltolása, továbbá $\{\, -\mathbf{u} : \mathbf{u} \in U \,\}$ a U ponthalmaz az origóra való tükrözése.

26. Definíció. Lineáris algebrában a valós számokat skalárnak nevezzük (mert mint később látni fogjuk, nem csak valós számokkal lehet lineáris algebrát csinálni, és ott a skalár nem feltétlen valós szám). A $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ vektornak a $c \in \mathbb{R}$ skalárral való szorzata a $c\mathbf{v} = (cv_1, \dots, cv_n)$ vektor.

27. Tétel. Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorok és $c, d \in \mathbb{R}$ skalárokra érvényesek a megszokott algebrai szabályok:

$$\begin{aligned} c(d\mathbf{u}) &= (cd)\mathbf{u} && \text{(asszociatív)} \\ (c+d)\mathbf{u} &= c\mathbf{u} + d\mathbf{u}, && \text{(disztributív)} \\ c(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= c\mathbf{u} + c\mathbf{v}, \\ 1\mathbf{u} &= \mathbf{u}, \\ (-1)\mathbf{u} &= -\mathbf{u}, \\ 0\mathbf{u} &= \mathbf{0}, \\ c\mathbf{0} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

28. Példa. Legyen $\mathbf{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ a sík tetszőleges nemnulla vektora. Ekkor $\{\, c\mathbf{v} : c \in \mathbb{R} \,\}$ annak a $bx - ay = 0$ egyenlettel megadott egyesnek a pontjait tartalmazza, amely átmegy az origón és a $\mathbf{v}$ ponton. Minden origón átmenő egyenes megkapható ilyen alakban, de nem egyértelműen.

29. Példa. Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ két különböző vektora a síknak. Ekkor $\{\, c\mathbf{u} + d\mathbf{v} : c + d = 1 \,\}$ annak az egyenesnek a pontjait tartalmazza, amely átmegy az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ pontokon. Minden egyenes megkapható ilyen alakban, de nem egyértelműen.

30. Definíció. Vektorrendszernek nevezzük a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok (rendezett) felsorolástát. Megengedjük a nulla hosszú vektorrendszert is, azaz a $k = 0$ esetet.

31. Definíció. Legyen $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer és $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ skalárok. A $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$ vektort a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok $c_1, \dots, c_k$ együtthatókkal vett lineáris kombinációjának nevezzük. A $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok összes lineáris kombinációinak

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k] = \{\, c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k : c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R} \,\}$$

halmazát a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok által kifeszített vektorhalmaznak nevezzük. Megállapodunk abban, hogy a nulla tagú lineáris kombináció a nullvektor, így $[] = \{\mathbf{0}\}$ a nullvektort tartalmazó egyelemű halmaz.

32. Példa. Az origó által kifeszített vektorhalmaz csak az origót tartalmazza, azaz $[\mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$. Ha $\mathbf{v}$ az origótól különböző vektor a térben (vagy síkon), akkor az általa kifeszített $[\mathbf{v}]$ vektorhalmaz éppen az origót és a $\mathbf{v}$ vektort összekötő egyenes pontjainak halmaza.

33. Példa. Legyenek $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ origótól különböző vektorok a térben úgy, hogy $[\mathbf{u}] \neq [\mathbf{v}]$. Ekkor $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ annak a síknak a pontjainak a halmaza amely tartalmazza az origót, és az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorokat.

34. Definíció. Az $\mathbb{R}^n$ halmaz

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

vektorait standard bázisvektoroknak nevezzük.

35. Tétel. Az $\mathbb{R}^n$ halmaz minden vektora egyételműen áll elő az $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázisvektorok lineáris kombinációjaként. Ez azt jelenti hogy $[\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n] = \mathbb{R}^n$, azaz minden vektor előáll lineáris kombinációként, illetve ha $c_1\mathbf{e}_1 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n = d_1\mathbf{e}_1 + \cdots + d_n\mathbf{e}_n$, akkor $c_1 = d_1, \dots, c_n = d_n$, azaz semelyik vektornak sincs két különböző előállítása.

36. Feladat. Keressünk a térben olyan vektorokat, amelyek lineáris kombinációjaként minden vektor előáll, de ez az előállítás nem egyértelmű.

37. Feladat. Keressünk a térben olyan vektorokat, amelyek lineáris kombinációjaként nem minden vektor áll elő, de azok amelyek előállnak, azok egyértelműen állnak elő.

38. Feladat. Keressünk a térben a standard bázisvektoroktól különböző vektorokat, amelyek lineáris kombinációjaként minden vektor egyéretlműen áll elő.

39. Tétel. Lineáris kombinációk lineáris kombinációja az eredeti vektoroknak is lineáris kombinációja, azaz ha $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \in [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k]$ és $\mathbf{w} \in [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r]$, akkor $\mathbf{w} \in [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k]$.

40. Definíció. A $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ vektorok standard belső szorzatán az $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$ valós számot értjük. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ merőlegesek, ha belső szorzatuk nulla.

41. Példa. A sík $ax + by = 0$ egyenese pontosan azokat az (x, y) vektorokat tartalmazza, amelyek merőlegesek az (a, b) vektorra. Speciálisan a nullvektor minden vektorra merőleges (önmagára is).

42. Példa. Ha a sík (a, b) vektorát $\frac{\pi}{2}$-vel elforgatjuk, akkor a $(-b, a)$ vektort kapjuk, amely merőleges (a, b)-re, mert $\langle (a, b), (-b, a) \rangle = -ab + ba = 0$.

43. Példa. A tér $ax+by+cz = 0$ egyenlettel megadott síkja pontosan azokat a pontokat tartalmazza, amely merőleges az (a, b, c) vektorra.

44. Tétel. Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $c \in \mathbb{R}$ skalárra teljesülnek az alábbi azonosságok:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle, && \text{(kommutatív)} \\
\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, && \text{(lineáris)} \\
\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, && \\
\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &\geq 0. &&
\end{aligned}$$

45. Megjegyzés. Figyelem, $c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq \langle c\mathbf{u}, c\mathbf{v} \rangle$, és $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ lehet negatív is.

46. Definíció. A $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor hossza alatt a $\sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$ nemnegatív valós számot értjük és $||\mathbf{v}||$-vel jelöljük.

47. Tétel. Tetszőleges $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $||v|| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$.