3. Feladatsor – Lineáris függetlenség, rang, alterek

3.1. Feladat. Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tetszőleges vektorrendszer az $\mathbb{R}^n$ vektortérben. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

$^\circ$(a) Ha $[v_1, v_2, \ldots, v_k] = \mathbb{R}^n$, akkor $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer.

$^\circ$(b) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer, akkor $[v_1, v_2, \ldots, v_k] = \mathbb{R}^n$.

$^\circ$(c) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor van olyan i, melyre v_i előáll a $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$ vektorrendszer lineáris kombinációjaként.

(d) A $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha minden i-re

$$[v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k] \neq [v_1, v_2, \ldots, v_k].$$

$^\circ$(e) Minden $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszerben van olyan lineárisan független részrendszer, amely által kifeszített vektorhalmaz éppen

$$[v_1, v_2, \ldots, v_k].$$

(f) Ha egy vektorrendszer rangja r, akkor nincs benne r elemű lineárisan függő részrendszer.

$^\circ$(g) Egy vektorrendszer bármely két olyan lineárisan független részrendszere, amely ugyanazt a vektorhalmazt feszíti ki, mint az eredeti, ugyanannyi elemből áll.

(h) Ha egy vektorrendszer minden tagja előáll 2 másik tag lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszer rangja legfeljebb 2.

$^\circ$(i) Ha egy négyzetes mátrix sorai lineárisan függő vektorrendszert alkotnak, akkor a mátrix determinánsa 0.

$^\circ$(j) Egy mátrix rangja r, ha van a mátrixnak r lineárisan független oszlopvektora.

$^\circ$(k) Az $\mathbb{R}^n$ vektortér U részhalmaza pontosan akkor altér $\mathbb{R}^n$-ben, ha zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra.

$^\circ$(l) Minden n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak az $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

$^\circ$(m) Ha egy n-ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldásában a kötött ismeretlenek száma r, akkor a megoldások altere megadható r elemű generátorrendszerrel.

$^\circ$(n) Ha egy V vektortérben a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszer bázis, akkor van olyan v eleme V-nek, amelyre $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ lineárisan függő vektorrendszert alkot.

$^\circ$(o) Ha egy V vektortérben a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszer bázis, akkor van olyan v eleme V-nek, amelyre $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ nem generálja V-t.

$^\circ$(p) Ha egy V vektortérben nincs olyan ötelemű vektorrendszer, amely generálja V-t, akkor a V vektortér dimenziója kisebb, mint 5.

- °(q) Ha egy V vektortérben a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer lineárisan független, a v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 vektorrendszer pedig lineárisan függő, akkor a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorok bázist alkotnak V-ben.
- °(r) Ha egy vektortérben van négyelemű lineárisan független vektorrendszer és hatelemű generátorrendszer, akkor a vektortér dimenziója 5.
- (s) Ha egy n-dimenziós vektortérben valamely k-elemű lineárisan független vektorrendszernek van olyan l-elemű részrendszere, mely generálja a vektorteret, akkor $n = k = l$.

3.2. Feladat.

°(1) Határozza meg az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli megadott vektorrendszer rangját, és állapítsa meg, hogy a vektorrendszer lineárisan függő vagy független.

(2) Adjon meg a vektorrendszerben olyan lineárisan független részrendszert, amely ugyanazt a vektorhalmazt feszíti ki, mint az eredeti.

- (a) $n = 3$; $(2, 0, 0), (3, -5, 0), (7, -9, -11)$;
- (b) $n = 3$; $(1, 2, 1), (1, -1, 1), (1, 1, 0)$;
- (c) $n = 3$; $(1, -1, 0), (1, 1, 1), (1, -3, -1)$;
- (d) $n = 3$; $(3, -2, 1), (-12, 8, -4), (6, -5, 2), (12, -9, -4)$;
- (e) $n = 4$; $(0, 1, 2, 4), (2, -1, 2, 2), (1, -1, 1, 2)$;
- (f) $n = 4$; $(1, -2, 3, 4), (0, -3, 1, 2), (2, -4, 5, 9)$;
- (g) $n = 4$; $(1, -1, 1, 1), (0, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 0), (-1, 2, 1, 1)$;
- (h) $n = 4$; $(1, 2, 4, 1), (-2, -4, -5, -3), (-1, -2, -7, 0), (1, 2, -2, 3)$;
- (i) $n = 4$; $(1, -1, 2, 0), (-1, 2, -5, -1), (0, 1, -3, -1), (2, -1, 2, 0), (1, 2, -6, -2), (-3, 3, -4, 3)$.
- (j) $n = 5$; $(0, 0, 2, 4, -2), (3, 0, 0, -3, -3), (-1, -1, 2, 4, 1)$.

3.3. Feladat. Az a paraméter mely értékeire alkotnak az $\mathbb{R}^n$ vektortérben az alábbi vektorok lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszert?

- (a) $n = 3$; $(1, -1, 2), (1, 1, 1), (a^2, 1, 2), (1, -2, 1)$;
- (b) $n = 4$; $(3, 2, 1, -4), (-2, -4, -1, 4), (a, 10, 3, -12)$;
- (c) $n = 5$; $(-1, 1, 2, -3, -1), (-1, 3, 7, -8, -2), (a, -4, -11, 9, 1)$;
- (d) $n = 4$; $(1, 2, 0, -1), (2, 3, 1, 3), (-2, -5, 7, a)$.

3.4. Feladat.

°(1) Határozza meg a következő mátrixok rangját.

(2) Adjon meg a mátrixokban a ranggal megegyező számú lineárisan független sorvektort, valamint oszlopvektort.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.5. Feladat. A Kronecker–Capelli-tétel alkalmazásával döntse el, hogy az alábbi lineáris egyenletrendszerek megoldhatók-e (ahol szerepel a paratméter, ott természetesen ennek a függvényében).

(a) $\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & & = & 1 \\ x_1 & & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \end{array}$;

(b) $\begin{array}{llllll} 2x_1 & -9x_2 & -8x_3 & -1x_4 & = & 1 \\ x_1 & 3x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 1 \\ & +9x_2 & +6x_3 & +3x_4 & = & 1 \end{array}$;

(c) $\begin{array}{lllllll} x_1 & +2x_2 & & -4x_4 & +x_5 & = & -1 \\ & 3x_2 & -9x_3 & -9x_4 & +x_5 & = & -5 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 1 \\ x_1 & & +6x_3 & +2x_4 & +x_5 & = & 3 \end{array}$;

(d) $\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ -x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = & 0 \\ x_1 & +5x_2 & & = & a-4 \end{array}$;

(e) $\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -4 \\ 3x_1 & & +4x_3 & = & a \end{array}$;

(f) $\begin{array}{lllll} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 1 \\ x_1 & -4x_2 & +7x_3 & = & 2 \\ -x_1 & +6x_2 & -11x_3 & = & -3 \\ 3x_1 & +(a^2-20)x_2 & +5x_3 & = & a+6 \end{array}$;

(g) $\begin{array}{lllll} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & -2x_2 & +(a^2-8)x_3 & = & a+4 \end{array}$.

3.6. Feladat°. Állapítsa meg, hogy az alábbi U részhalmazok közül melyek alterek a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben:

(a) $n=3$, $U=\{(x_1,x_2,x_3) : x_1=0 \text{ vagy } x_2=0\}$;
(b) $n=4$, $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1=0,\ x_2=0\}$;
(c) $n=3$, $U=\{(x_1,x_2,x_3) : x_1+2x_2-x_3=0\}$;
(d) $n=5$, $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) : x_1-x_2+x_3=1,\ x_1+x_2+x_3=0\}$;
(e) $n=3$, $U=\{(x_1,x_2,x_3) : 3x_1x_2+x_3=0\}$;
(f) $n=3$, $U=\{(x_1,x_2,x_3) : x_1^2+x_3^2=0\}$;
(g) $n=5$, $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) : x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^6+x_5^2 \leq 0\}$.

3.7. Feladat.

°(1) Határozza meg az $\mathbb{R}^n$ vektortér U alterének dimenzióját.
(2) Adjon meg bázist U-ban.

(a) $n=3$, $U=\{(x_1,x_2,x_3) : 2x_1-x_3=0\}$;
(b) $n=3$, $U=\{(x_1,x_2,x_3) : 2x_1-x_3=0,\ x_1+x_2=0\}$;
(c) $n=4$, $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1-x_2+x_3=0,\ x_2+x_3+x_4=0\}$;
(d) $n=4$, $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1-x_2+3x_3-2x_4=0,\ 2x_1+x_2-x_3-x_4=0,\ x_2+x_3+x_4=0\}$.
(e) $n=4$, $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1-2x_2=0,\ x_1+x_2-x_3=0\}$;
(f) $n=4$, $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1-3x_2-x_3=0,\ x_4=0\}$;
(g) $n=4$, $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : 3x_1-x_2+x_3-2x_4=0,\ -x_1+x_2+2x_3-x_4=0,\ x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$;
(h) $n=5$, $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) : x_1+2x_3+x_5=0,\ x_1-2x_2-x_5=0\}$.

3.8. Feladat.

°(1) Állapítsa meg az $\mathbb{R}^n$ vektortér U alterének dimenzióját.

(2) Keressen a megadott generátorrendszernek olyan részrendszerét, amely bázist alkot.

(a) $n = 3$, $U = [(3, -2, 1), (-12, 8, -4,), (6, -5, 1), (12, -9, 4)]$;
(b) $n = 3$, $U = [(1, 2, 5), (3, 4, 10), (0, 0, 0), (7, -2, -5)]$;
(c) $n = 4$, $U = [(0, 1, 2, 4), (2, -1, 2, 2), (1, -1, 1, 2)]$;
(d) $n = 4$, $U = [(1, 2, 4, 1),\ (-2, -4, -5, -3), (-1, -2, -7, 0),\ (1, 2, -2, 3)]$;
(e) $n = 4$, $U = [(1, -2, -4, 3), (-2, 4, -8, -6), (3, -6, -12, 9)]$;
(f) $n = 6$, $U = [(1, 1, -2, 0, 1, 2), (2, 3, -2, 1, 0, -1), (4, 5, -6, 1, 2, 3), (-1, -2, 0, -1, 1, 3), (-1, 1, 7, 3, -2, -5), (-3, 2, 4, -1, -2, 1)]$.

3.9. Feladat. Adja meg az $\mathbb{R}^n$ vektortérben a megadott vektorok által kifeszített alteret homogén lineáris egyenletrendszer segítségével:

(a) $n = 3,\ (1, 1, 1),\ (-2, 2, -2),\ (3, -1, 3)$;
(b) $n = 3,\ (-1, -1, -1),\ (-2, 2, -2),\ (0, -1, 3)$;
(c) $n = 4,\ (2, 2, -2, 4),\ (-4, -5, 6, -5)$;
(d) $n = 4,\ (1, 2, -3, 4),\ (0, 1, -1, 2),\ (-3, 0, -3, 0)$;
(e) $n = 5,\ (1, 0, 2, -1, -2),\ (-2, 1, -4, 3, 2),\ (3, -1, 5, -2, -3)$.

3.10. Feladat°. Ellenőrizze, hogy a megadott vektorrendszer bázist alkot-e az általa kifeszített $\mathbb{R}^n$-beli altérben, és ha igen, akkor határozza meg a v vektor koordinátasorát ebben a bázisban.

(a) $n = 3$, $(1, 1, 1), (1, 1, 0)$, $v = (1, -1, 1)$;
(b) $n = 3$, $(1, -1, 2), (1, 2, 3)$, $v = (1, -1, 1)$;
(c) $n = 3$, $(-1, 2, 1), (1, 2, 3), (1, 1, 2)$, $v = (1, -1, 0)$;
(d) $n = 4$, $(-1, 1, 1, 0), (1, 2, 1, -1), (1, 1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 1, 2)$;
(e) $n = 4$, $(1, -2, 0, -1), (0, -1, -2, 4), (2, -4, 0, -1), (-4, 8, 2, 4)$, $v = (1, 0, -1, 2)$.

3.11. Feladat. A 3.8. Feladatban megadott $\mathbb{R}^n$-beli U alterekben keressen olyan bázist,

(i) amely lépcsős alakú (pontosabban az a mátrix lépcsős alakú, amelynek sorvektorai a bázis elemei);
(ii) amelynek egyik eleme sem skalárszorosa a lépcsős alakú bázis elemeinek;
(iii) amely $\mathbb{R}^n$ standard bázisából a lehető legtöbb elemet tartalmazza.

3.12. Feladat.

°(1) Határozza meg az $\mathbb{R}^n$ vektortér U_1, U_2 alterei esetén az $U_1 \cap U_2$ és $U_1 + U_2$ alterek dimenzióját.

(2) Adjon meg olyan bázist az $U_1 + U_2$ altérben, amely kiterjesztése
  (i) U_1 bázisának;
  (ii) $U_1 \cap U_2$ és U_1 bázisának is:

(a) $n = 4$, $U_1 = [(1, 2, 1, 0), (-1, 1, 1, 1)]$, $U_2 = [(2, 1, 0, -1), (1, -1, 3, 7)]$;
(b) $n = 4$, $U_1 = [(1, 2, 1, 3), (0, -2, 3, -1)]$, $U_2 = [(0, 2, -3, 1), (0, -2, 4, -4), (0, -6, 11, -9)]$;
(c) $n = 4$, $U_1 = [(1, 2, -3, 0), (0, 1, -2, 1), (1, 0, 1, -2)]$, $U_2 = [(0, -1, 5, -7), (-2, -4, 7, -2)]$;
(d) $n = 5$, $U_1 = [(1, 2, 4, -5, 1), (0, 1, -1, 0, 2), (1, 2, 5, -7, 2)]$,
$U_2 = [(-2, -3, -6, 4, 3), (0, -2, 2, 1, -7), (-1, -2, -5, 9, -8)]$;

(e) $n = 4$, $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - 2x_4 = 0\}$;

(f) $n = 4$, $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_2 - 2x_3 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_2 - 4x_3 = 0,\ 3x_3 + x_4 = 0\}$;

(g) $n = 5$, $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_2 + 2x_4 + x_5 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1+x_2+x_3+x_4 = 0,\ x_1+x_3-x_4-x_5 = 0\}$;

(h) $n = 6$, $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) : x_1+x_4 = 0,\ x_2+x_3+x_5+x_6 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) : x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0,\ x_3 + x_6 = 0\}$.

3.13. Feladat. Válaszoljon az alábbi kérdésekre, és indokolja a válaszát.

°(a) Hány tagú egy olyan $\mathbb{R}^{10}$-beli vektorrendszer, amelynek rangja 0, 5, 10, illetve 15?

(b) Mekkora a dimenziója egy olyan $\mathbb{R}^5$-beli altérnek, amelyet öt vektor generál? Mi a válasz, ha a generátorrendszer három-, illetve nyolcelemű?

(c) Mely n természetes számokra lehet egy tíztagú $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszer rangja 6?

(d) Adott két vektorrendszer az $\mathbb{R}^{20}$ vektortérben, az elsőnek 7, a másodiknak 9 a rangja. Hány dimenziós alteret feszíthet ki a két vektorrendszer együttesen? Mi a válasz, ha a vektorrendszerek $\mathbb{R}^{15}$-ből valók?

°(e) Egy homogén lineáris egyenletrendszer négyismeretlenes és két egyenletből áll. Mekkora az egyenletrendszer mátrixának rangja? Mekkora a megoldástér dimenziója?

°(f) Egy lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixának rangja 6, és tudjuk, hogy nincs megoldása. Mekkora a bővített mátrix rangja?

°(g) Hány egyenletből állhat egy olyan homogén lineáris egyenletrendszer, melynek megoldásai kétdimenziós alteret adnak meg $\mathbb{R}^5$-ben?

(h) Egy lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa olyan, hogy a soraiból képzett és az oszlopaiból képzett vektorrendszer is lineárisan független. Igaz-e, hogy az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van?

°(i) Az $\mathbb{R}^6$ vektortér négydimenziós U és V altereire fennáll, hogy $U+V = \mathbb{R}^6$. Mekkora az $U \cap V$ altér dimenziója?

(j) Az $\mathbb{R}^{10}$ vektortér U altere négydimenziós, V altere pedig nyolc. Lehet-e $\dim(U \cap V) = 0$, 3, 6, 9? És $\dim(U + V) = 3$, 6, 9, 12?

(k) Az $\mathbb{R}^5$ vektortér U altere kétdimenziós, V altere pedig olyan, amelyre $U \cap V$ triviális. Milyen elemszámú generátorrendszerei vannak U-nak, V-nek és $(U + V)$-nek?

(l) Legyen U és V két altér az $\mathbb{R}^{10}$ vektortérben. Ha U dimenziója 8, V-é pedig 9, akkor hány dimenziós az $U \cap V$ altér?

(m) Az $\mathbb{R}^9$ vektortér U alterét négytagú, V alterét pedig öttagú vektorrendszer generálja. Mekkora lehet az U, V, $U \cap V$ és $U + V$ alterek dimenziója?

(n) Az $\mathbb{R}^{10}$ vektortér U és V altere egy-egy homogén lineáris egyenletrendszerrel van megadva, mely három, illetve négy egyenletből áll. Mekkora az $U \cap V$ és $U + V$ alterek dimenziója?

(o) Az $\mathbb{R}^8$ vektortér U és V alterére teljesül, hogy $\dim(U \cap V) = 3$ és $\dim(U + V) = 6$. Hány egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszerrel adható meg U és V?

Szorgalmi feladatok

3.14. Feladat. Legyen $u_1, u_2, \ldots, u_k$ és $v_1, v_2, \ldots, v_k$ két tetszőleges vektorrendszer az $\mathbb{R}^n$ vektortérben. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha $u_1, u_2, \ldots, u_k$ és $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan független, akkor az $u_1 + v_1$, $u_2 + v_2, \ldots, u_k + v_k$ vektorrendszer is az.
(b) Ha $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_k, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor u_1, $u_2, \ldots, u_k$ és $v_1, v_2, \ldots, v_k$ is az.
(c) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan független, akkor a $v_1+v_2, v_1+v_2+v_3, \ldots$, $v_1 + v_2 + \ldots + v_k$ vektorrendszer is az.

3.15. Feladat. Legyen u, v, w lineárisan független vektorrendszer valamely $\mathbb{R}^n$-ben. Mit mondhatunk az alábbi vektorok lineáris függetlenségéről?

(a) $u + v,\ u - v,\ u - 2v + w$;
(b) $u + 2v,\ u + 2w,\ -2v + w$;
(c) $u + 3v + 2w,\ 2u + w,\ u + v + w$.

3.16. Feladat. Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_k$ olyan vektorrendszer, amelyben pontosan egy olyan vektor van, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként. Igazolja, hogy ez a vektor a nullvektor.

3.17. Feladat. A v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszerről a következőket tudjuk: a v_1, v_2, v_3 részrendszer lineárisan független, de az összes többi háromtagú részrendszer lineárisan függő. Meghatározza-e ez egyértelműen a v_4 vektort?

3.18. Feladat. Adja meg az a paraméter összes olyan értékét, amelyre az alábbi $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszer lineárisan függő:

(a) $n = 4$; $(1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (-1, a, 2, 1)$;
(b) $n = 4$; $(1, 0, 1, 2), (-1, 2, 1, 2), (1, 0, 1, 0), (1, 2, 4, a)$;
(c) $n = 4$; $(1, -2, 3, 1), (0, 1, -1, 1), (2, -3, 6, 5), (-1, 1, 0, a)$;
(d) $n = 3$; $(a, 1, 0), (0, a, 1), (1, 0, a^2)$.

3.19. Feladat. Határozza meg az a valós paraméter értékétől függően az $\mathbb{R}^{2n}$ vektortérbeli

$$(1, 0, 0, \ldots, 0, 0, a), (0, 1, 0, \ldots, 0, a, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1, a, 0, \ldots, 0),$$
$$(0, \ldots, 0, a, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, a, 0, \ldots, 0, 1, 0), (a, 0, 0, \ldots, 0, 0, 1)$$

vektorrendszer rangját.

3.20. Feladat. Mutassa meg, hogy tetszőleges $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszer esetén $r(v_1, v_2, \ldots, v_k) = r(v_1, v_1 + v_2, \ldots, v_1 + v_2 + \cdots + v_k)$.

3.21. Feladat. Igazolja, hogy tetszőleges $u_1, u_2, \ldots, u_k$ és $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszerek esetén $r(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_k + v_k) \leq r(u_1, u_2, \ldots, u_k) + r(v_1, v_2, \ldots, v_k)$.

3.22. Feladat. Az a paraméter értékétől függően határozza meg a következő mátrix rangját:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

3.23. Feladat. Egy n ismeretlenes valós lineáris egyenletrendszer bővített mártrixának van determinánsa, és ez a determináns nem 0. Mit mondhatunk az egyenletrendszer megoldhatóságáról?

3.24. Feladat. Igazolja, hogy az $\mathbb{R}^n$ vektortér nem állhat elő két valódi alterének uniójaként.

3.25. Feladat. Bizonyítsa be, az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden U, V, W alterére teljesül, hogy ha $U \subseteq W$, akkor $(U+V) \cap W = (U \cap W) + (V \cap W)$.

3.26. Feladat. Igazolja, hogy a $\mathbb{R}^n$ vektortér összes alterének van olyan bázisa, amelyben a vektorok koordinátáinak összege azonos.

3.27. Feladat. Mutassa meg, hogy az $\mathbb{R}^n$ vektortér $X = [(1,1,\dots,1)]$ és $Y = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = 0\}$ altereire teljesül, hogy $X \cap Y = \{\underline{0}\}$ és $X + Y = \mathbb{R}^n$.

3.28. Feladat. Legyen a v vektor koordinátasora a $v_1, v_2, \dots, v_n$ bázisban $(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Igazolja, hogy ekkor a $v, v_2, \dots, v_n$ vektorrendszer is bázis, és adja meg benne a v_1 vektor koordinátáit. A koordinátasorban 1 helyett milyen koordináta esetén nem igaz ez az állítás?

3.29. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^{100}$ vektortér alábbi altereinek dimenzióját, és adjon meg bázist bennük:

(a) $\{(x_1, \dots, x_{100})\colon\ x_1 = x_3 = \dots = x_{99} = 0\}$;
(b) $\{(x_1, \dots, x_{100})\colon\ x_1 = x_3 = \dots = x_{99}\}$;
(c) $\{(x_1, \dots, x_{100})\colon\ x_1 + x_2 + \dots + x_{50} = x_{51} + x_{52} + \dots + x_{100}\}$.

3.30. Feladat. Adja meg az összes olyan $(n-1)$-dimenziós alteret a $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ vektortérben, amely nem tartalmazza $\mathbb{R}^n$ standard bázisának egyetlen elemét sem.

3.31. Feladat. Igazolja, hogy ha az n-dimenziós V vektortérben van olyan r és s rangú vektorrendszer, amely együttesen generálja a V vektorteret, akkor $r + s \geq n$.

3.32. Feladat. Mutassa meg, hogy ha U_1 és U_2 olyan alterek egy n-dimenziós V vektortérben, amelyekre $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ és $\dim U_1 + \dim U_2 = n$, akkor U_1 tetszőleges $e_1, e_2, \dots, e_{\dim U_1}$ bázisa és U_2 tetszőleges $f_1, f_2, \dots, f_{\dim U_2}$ bázisa esetén az $e_1, e_2, \dots, e_{\dim U_1}, f_1, f_2, \dots, f_{\dim U_2}$ vektorrendszer bázis V-ben.

3.33. Feladat. Adja meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszerben az a paraméter értékét úgy, hogy a megoldástér dimenziója 3 legyen:

$$\begin{array}{rrrrrcl} & x_2 & +x_3 & & -ax_5 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & +ax_3 & -3x_4 & & = & 0\,. \\ x_1 & +ax_2 & +x_3 & +3x_4 & -2x_5 & = & 0 \end{array}$$

Az ilyen a értékek esetén adjon meg bázist is a megoldástérben.

3.34. Feladat. Tekintsük a következő homogén lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & +x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ & x_2 & & +x_4 & & = & 0 \end{array}.$$

Adottak a következő vektorok $\mathbb{R}^5$-ben: $u = (1,1,1,1,1)$, $v = (1,0,-2,0,1)$, $w = (0,-1,0,1,0)$, $x = (1,-2,-2,2,1)$, $y = (1,0,-1,0,0)$. Döntse el, hogy az alábbi vektorrendszerek bázist alkotnak-e az egyenletrendszer megoldásterében:

(a) u, v, w;
(b) v, w, x;
(c) w, x, y.

3.35. Feladat. Legyen $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n}$ $(n \geq 2)$ olyan mátrix, amelynek sorvektorai lineárisan független vektorrendszert alkotnak. Mutassa meg, hogy az $Ax = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldástere egydimenziós, és adjon meg benne egy nemzérus vektort — minél egyszerűbb formában — az A mátrix elemeinek segítségével.