2. Feladatsor – Lineáris egyenletrendszerek

2.1. Feladat. Legyen adott egy m egyenletből álló n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

°(a) Ha $n > m$, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
°(b) Ha $n = m$, akkor az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.
°(c) Ha az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor $n = m$.
°(d) Ha $n < m$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.
(e) Ha $m < n$, akkor az egyenletrendszernek nem lehet pontosan egy megoldása.
°(f) Tetszőleges $u, v \in \mathbb{R}^n$ vektorok esetén az $\frac{1}{2}u$ vektor az u és a v vektorok lineáris kombinációja.
(g) Az $[u, v]$ halmaz tetszőleges $u, v \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén végtelen.
°(h) Nincs olyan homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek egyetlen megoldása van.
(i) Van olyan homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek megoldásai éppen a $(2,2,2)+t(1,1,1)$ $(t \in \mathbb{R})$ vektorok.
(j) A síkban az $x + y = 2$ és $2x + 2y = 2$ egyenesek egybe esnek.
(k) A térben az $x - y + z = 2$ és $-x + y + z = -2$ síkok nem párhuzamosak.

2.2. Feladat°. Oldja meg Gauss-eliminációval az alábbi lineáris egyenletrendszereket. Az eredményt adja meg
(1) általános megoldás formájában,
(2) paraméteres vektoralakban,
(3) kifeszített vektorhalmaz eltoltjaként.

(a) $2x_1 - x_3 = 0$;

(b) $$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & & = & 0 \end{array};$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -9 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = & 25 \end{array};$$

(d) $$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 7x_1 & + & 7x_2 & + & 8x_3 & = & 10 \end{array};$$

(e) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 14 \end{array};$$

(f) $$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_3 & + & 11x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array};$$

(g) $$\begin{array}{rcrcrcr} 18x_1 & + & 9x_2 & + & 23x_3 & = & 50 \\ 17x_1 & + & 13x_2 & + & 12x_3 & = & 42 \\ 21x_1 & + & 20x_2 & - & 10x_3 & = & 31 \end{array};$$

(h) $$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -x_2 & +x_3 & & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array};$$

(i) $\begin{array}{rrrrcl} x_1 & -x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 0 \end{array}$;

(j) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ -3x_1 & - & 9x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \end{array}$;

(k) $\begin{array}{rrrrcl} x_1 & -2x_2 & & +3x_4 & = & 0 \\ & x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -4x_2 & +x_3 & +5x_4 & = & 0 \end{array}$;

(l) $\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 4 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & - & 4x_4 & = & 8 \end{array}$;

(m) $\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & -5x_5 & = & 0 \\ & 2x_2 & -x_3 & +3x_4 & +2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +6x_4 & -6x_5 & = & 0 \end{array}$;

(n) $\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 3 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 13x_5 & = & 9 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \end{array}$.

2.3. Feladat. Lineáris egyenletrendszerek bővített mátrixait adtuk meg. „Ránézésre” (bármilyen átalakítás nélkül) írja fel a vizsgált egyenletrendszerek megoldásait

(1) általános megoldás formájában,
(2) paraméteres vektoralakban,
(3) kifeszített vektorhalmaz eltoltjaként.

°(a) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & -12 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$;

°(b) $\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 0 & -19 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$;

°(c) $\left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 1 & 0 & -19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$;

(d) $\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$;

(e) $\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & -7 \end{array}\right)$.

2.4. Feladat°. Az alábbiakban négyismeretlenes lineáris egyenletrendszerek általános megoldását adtuk meg. Írja fel a megoldásokat paraméteres vektoralakban és kifeszített vektorhalmaz eltoltjaként is.

(a) $\begin{array}{ll} x_1 & = 2 + x_2 + 2x_3 \\ x_4 & = 1 + x_2 - x_3 \end{array}$

(b) $x_2 = x_1 - 2x_3 + x_4$

(c) $\begin{array}{ll} x_1 & = 1 \\ x_2 & = 2 + x_3 \end{array}$

2.5. Feladat. Előáll-e a v vektor a v_1, v_2, illetve v_1, v_2, v_3 vektorok lineáris kombinációjaként?

°(1) Adjon meg olyan lineáris egyenletrendszert, amelynek megoldásával ez a kérdés eldönthető.
°(2) Válaszolja meg a kérdést.

(3) Adja meg a v vektor összes előállítását.

(a) $v = (1, 0, -2, 10)$, $v_1 = (1, -2, 0, 4)$, $v_2 = (-2, 5, -1, -5)$;
(b) $v = (2, -7, -1, -10)$, $v_1 = (1, -3, 2, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2, 4)$, $v_3 = (1, -3, 3, 4)$;
(c) $v = (3, -5, 6, 8, 6)$, $v_1 = (1, -1, 0, 4, 2)$, $v_2 = (2, -1, -3, 10, 5)$;
(d) $v = (2, 1, 3, 2, -2)$, $v_1 = (1, 1, 2, 2, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4, 5)$, $v_3 = (0, -1, -1, -2, -4)$.

2.6. Feladat. Adjon meg olyan v vektort és $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszert, amelyre a 2.2. és a 2.3. Feladatbeli lineáris egyenletrendszerek megoldása eldönti azt a kérdést, hogy a v vektor előáll-e $v_1, \dots, v_n$ lineáris kombinációjaként.

2.7. Feladat. Keressen olyan lineáris egyenletrendszert, amely megoldásvektorainak halmaza éppen a megadott halmaz.

(a) $[(1, 1, 1), (1, -1, 5)]$;
(b) $[(2, 2, -4), (1, 0, 3)]$;
(c) $[(1, 1, 1), (-2, 2, -2), (3, -1, 3)]$;
(d) $[(1, 1, 1), (-2, 2, -2), (0, -1, 3)]$;
(e) $[(2, 2, -2, 4), (-4, -5, 6, -5)]$;
(f) $[(1, 2, -3, 4), (0, 1, -1, 2), (-3, 0, -3, 0)]$;
(g) $[(1, 0, 2, -1, -2), (-2, 1, -4, 3, 2), (3, -1, 5, -2, -3)]$;
(h) $(1, 1, 2) + [(1, 1, 1), (1, -1, 5)]$;
(i) $(2, 2, 2) + [(1, 1, 1), (1, -1, 5)]$;
(j) $(1, 2, 1, 2) + [(1, 2, -3, 0), (2, 0, -2, -4)]$;
(k) $(1, 1, 1, 1) + [(1, 2, -3, 0), (2, 0, -2, -4)]$;
(l) $(1, 2, 2, 2) + [(1, 1, 2, 2), (2, 2, 4, 4)]$.

2.8. Feladat. Határozza meg a paraméteres alakban, vektoros alakban, illetve egyenlettel megadott (síkbeli) egyenes másik két alakját:

(a) $x = 7 + 5t,\ y = 8 - 4t\ (t \in \mathbb{R})$;
(b) $x = 1 + t,\ y = 2 + 2t\ (t \in \mathbb{R})$;
(c) $x = -t,\ y = -t\ (t \in \mathbb{R})$;
(d) $[(2, 1)]$;
(e) $(1, 4) + [(-2, -8)]$;
(f) $(0, 1) + [(1, -1)]$;
(g) $5x - 3y = 1$;
(h) $-2x + 4y = 3$;
(i) $3x + 2y = 5$.

2.9. Feladat. Határozza meg a paraméteres alakban, vektoros alakban, illetve egyenlettel megadott sík másik két alakját:

(a) $x = 2 + t_1 - t_2,\ y = -1 + 3t_2,\ z = 1 + t_1 - 2t_2\ (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$;
(b) $x = 2 + t_1,\ y = 2 - t_1 + 2t_2,\ z = -1 + t_1 + t_2\ (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$;
(c) $x = -1 - t_1 + t_2,\ y = 1 + 4t_1 - 2t_2,\ z = t_1 + t_2\ (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$;
(d) $(0, 0, 0) + [(1, 1, 1), (1, 1, 2)]$;
(e) $(1, 1, 1) + [(1, 2, 0), (0, -1, 1)]$;
(f) $(1, 1, 1) + [(1, 1, 0), (2, 1, 0)]$;
(g) $x + y + z = 6$;
(h) $-x + 2y - z = 0$;
(i) $2x - 3y + z = 5$.

2.10. Feladat. Határozza meg

°(a) a síkban az $x - y = 0$ és az $x - 3y = 2$ egyenes metszéspontját;
°(b) a síkban a $2x + y = 1$ és az $x + y = 2$ egyenes metszéspontját;
(c) a térben az $x - y - z = 0$ sík és az $x = 2,\ y = t,\ z = t\ (t \in \mathbb{R})$ egyenes metszéspontját;

(d) a térben az $x + y - z = -1$ sík és az $x = 2 - t,\ y = 1 + t,\ z = 2t$ ($t \in \mathbb{R}$) egyenes metszéspontját.

2.11. Feladat. Termelési vezetőként dolgozik egy cégnél, ahol diákcsemegét készítenek, ami mazsolát, mogyorót és csokoládét tartalmaz. Eme három összetevő segítségével három változata készül a terméknek: fitt, standard és prémium. A raktárban csak maximum 380 kg mazsola, 500 kg mogyoró és 620 kg csokoládé fér el, melyet éjszaka szállítanak, a gyártás pedig nappal történik. A dolgozók a diákcsemege-változatokat 15 kilós kötegekbe csomagolják. A következő táblázat sorai megadják, hogy egy-egy ilyen kötegbe melyik alapanyagból mennyi kerül.

	Mazsola (kg/köteg)	Mogyoró (kg/köteg)	Csokoládé (kg/köteg)	Alapanyagár ($/kg)	Eladási ár ($/kg)
Fitt	7	6	2	3,69	4,99
Standard	6	4	5	3,86	5,50
Prémium	2	5	8	4,45	6,50
Raktárhely (kg)	380	500	620		

(1) Mint termelési vezetőnek, el kell döntenie, hogy melyik diákcsemege-változatból mennyit gyártsanak naponta. (Nyilvánvaló cél, hogy minden nap az összes alapanyag elfogyjon, így másnap maximális kapacitással tud a vállalat újat fogadni.)
(2) Számolja ki, hogy mennyi profitra tesz szert a cég így naponta.
(3) Határozza meg a mazsola, mogyoró és csokoládé kilónkénti árát.
(4) Válaszolja meg ugyanezeket a kérdéseket, ha a diákcsemege-változatok alapanyagarányai így változnak:

	Mazsola (kg/köteg)	Mogyoró (kg/köteg)	Csokoládé (kg/köteg)	Alapanyagár ($/kg)	Eladási ár ($/kg)
Fitt	7	5	3	3,70	4,99
Standard	6	5	4	3,85	5,50
Prémium	2	5	8	4,45	6,50
Raktárhely (kg)	380	500	620		

2.12. Feladat. Van-e olyan parabola, melynek tengelye párhuzamos az y-tengellyel, és amely áthalad a koordinátarendszer $(-1, 9)$, $(1, 5)$, $(2, 12)$ pontjain? Ha van ilyen, akkor adja meg a képletével.

Szorgalmi feladatok

2.13. Feladat. Oldja meg a következő lineáris egyenletrendszert, ahol a, b, c valós paraméterek:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & a \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & b \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & c \end{array}.$$

2.14. Feladat. Oldja meg (az a valós paraméter függvényében) az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & -x_2 & +x_3 & +ax_4 & = & 1 \\ x_1 & & +(1-a)x_3 & +(a-1)x_4 & = & 2 \\ x_1 & & -ax_3 & +(a-2)x_4 & = & 1 \\ -ax_1 & +ax_2 & +2ax_3 & +2x_4 & = & 3a-1 \end{array}.$$

2.15. Feladat. Oldja meg (az a valós paraméter függvényében) az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & -2x_2 & +(a^2-8)x_3 & = & a+4 \end{array}.$$

2.16. Feladat. Oldja meg a következő lineáris egyenletrendszert, ahol a valós paraméter:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & ax_3 & = & 3 \\ x_1 & + & ax_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}.$$

2.17. Feladat. Legyenek a, b, c nem nulla, páronként különböző valós paraméterek. Oldja meg minél egyszerűbben a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ ax_1 & +bx_2 & +cx_3 & = & d \\ a^2x_1 & +b^2x_2 & +c^2x_3 & = & d^2 \end{array}.$$

2.18. Feladat. Legyen u, v, w három vektor a térben. Mit lehet mondani az u vektorról, ha tudjuk, hogy $w \notin [u, v]$, $v \notin [u, w]$, de $u \in [v, w]$?

2.19. Feladat. Egyszer volt, hol nem volt, volt egyszer hét kicsi kecske. A mamájuk hozott nekik 2,1 liter tejecskét, és szétosztotta a hét kicsi bögrécskébe, de nem sikerült igazságosan elosztania. Az első kicsi kecske így szólt: „Én annyira szeretem a testvérkéimet, hogy inkább lemondok a tejecskémről a javukra." Azzal egyenlően szét is osztotta a tejecskéjét a hat testvérkéje között. A második kicsi kecske is nagyon jószívű volt, ő is szétosztotta a bögrécskéjében lévő tejecskét hat testvérkéje között. Így tett sorban a többi kicsi kecske is. És lássatok csudát! A végén minden kicsi bögrécskében ugyanannyi tejecske volt, mint a legelején. Azaz mennyi?

2.20. Feladat. Döntse el, hogy az alábbi pontok egy egyenesen vannak-e, és ha nem, akkor határozza meg a rajtuk átmenő sík egyenletét:

(a) $(1, 1, 0)$, $(2, -2, -1)$, $(4, -8, -3)$;
(b) $(1, 2, -2)$, $(0, 1, 1)$, $(2, 2, 3)$.

2.21. Feladat. Adja meg az alábbi síkok metszésegyenesét paraméteres és vektoros alakban:

(a) $x + y + 2z = 0$ és $x - y = 0$;
(b) $x - 2y - 3z = 0$ és $x + y - z = 0$;
(c) $-2x + y + z = 0$ és $x - y - 3z = 0$.

2.22. Feladat. Adja meg az $x = 1+2t$, $y = 2-t$, $z = 1-t$ $(t \in \mathbb{R})$ egyenest két lényegesen különböző módon két sík metszeteként (azaz „ránézésre" ne lehessen eldönteni a két megadási módról, hogy valóban ugyanazt az egyenest határozzák meg).

2.23. Feladat. Adja meg a térben az alábbi s sík és P pont esetében a P pont s-re vonatkozó tükörképét:

(a) $s\colon x = 0$, $P = (1, -1, 1)$;
(b) $s\colon x - y = 0$, $P = (-2, 1, -1)$;
(c) $s\colon x + y + z = 0$, $P = (1, 0, 0)$.

2.24. Feladat. Igazolja, hogy ha egy $\mathbb{R}^{3\times 2}$-beli mátrix két oszlopvektora, mint $\mathbb{R}^3$-beli vektor nem egy egyenesen van, akkor a mátrix lépcsős alakja $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.