MBX114G: DISZKRÉT MATEMATIKA III. GYAKORLAT

(2009. március 23.)

1. Permutációk

1.1. Feladat. Írja fel az alábbi S_7-beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

(1) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

(2) $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$,

(3) $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

1.2. Feladat. Adja meg a következő S_7-beli, páronként idegen ciklusok szorzataként előállított permutációkat kétsoros írásmódban:

(1) $\delta = (1\,3\,6)(2\,7\,5\,4)$,
(2) $\varepsilon = (1\,7)(2\,6)(3\,4\,5)$,
(3) $\eta = (1\,5\,4\,2\,7\,3)$.

1.3. Feladat. Az előző két feladatban bevezetett permutációkból kiindulva adja meg az alábbi S_7-beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

$$(\beta\alpha)^{-1}, \quad \varepsilon\eta^{-1}\beta\gamma\delta^{-1}, \quad \alpha^n \ (n \in \mathbb{N}), \quad \left((\eta\beta)^{2006}\delta^{2007}\right)^{-1}.$$

1.4. Feladat. Adja meg a következő S_9-beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

(1) $\left(\alpha^{-1}\beta\alpha\right)^{109}$, ahol

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 1 & 9 & 2 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 2 & 5 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

(2) $\Big((1\,5\,4\,3\,7\,2)^9\,((2\,9\,3)(4\,5\,2\,7))^{120}\,(4\,8\,1)\Big)^{-1}$.

1.5. Feladat. Keresse meg mindazokat a $\sigma \in S_8$ permutációkat, amelyekre teljesül, hogy

$$((1\,2\,3\,4)(7\,3\,8))^3\,\sigma(3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1}.$$

1.6. Feladat. Döntse el, hogy az első két feladatban bevezetett $\alpha, \ldots, \eta \in S_7$ permutációk, valamint a segítségükkel megadott alábbi permutációk párosak-e vagy páratlanok:

$$\left(\eta^{-1}\delta^{112}\right)^{111}, \quad (\varepsilon\gamma\alpha)^{-1}\left(\beta^{-1}\delta\eta^9\right)^2.$$

1.7. Feladat. Igazolja, hogy minden k hosszúságú $\gamma \in S_n$ ciklusra

(1) $\gamma^k = \mathrm{id}$,
(2) $\gamma^\ell \neq \mathrm{id}$, ha $\ell \in \mathbb{N}$ kisebb k-nál.

1.8. Feladat. Igazolja, hogy minden $\pi \in S_n$ permutációra $\pi^{n!} = \mathrm{id}$. Hogyan lehet megadni a legkisebb olyan $k \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $\pi^k = \mathrm{id}$?

1.9. Feladat. Mutassa meg, hogy S_9 minden eleme előáll

(1) az $(1\,2), (1\,3), \ldots, (1\,9)$ transzpozíciók szorzataként;
(2) az $(1\,2)$ és $(1\,2\,3\,\ldots\,9)$ ciklusok szorzataként.

1.10. Feladat. Keresse meg mindazokat a $\pi \in S_6$ permutációkat, amelyekre teljesül, hogy

(1) $\pi^2 = (1\,2)$;
(2) $\pi^2 = (1\,2)(3\,4)$.

2. Komplex számok

2.1. Feladat. Határozza meg az alábbi kanonikus alakban megadott komplex számok trigonometrikus alakját:

(1) $0,\ 1,\ -1,\ i,\ -i;$
(2) $1-i,\ -3-\sqrt{3}i,\ -\sqrt{2}+\sqrt{6}i.$

2.2. Feladat. Határozza meg az alábbi trigonometrikus alakban megadott komplex számok kanonikus alakját:

$$u=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),\quad v=5\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right),$$
$$w=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

2.3. Feladat. Számolja ki a lehető legegyszerűbben a megadott kifejezések értékét:

$$t=\frac{1}{1-2i}-\frac{1}{1+2i},\quad u=\overline{\left(\frac{3-3i}{\overline{-3+\sqrt{3}i}}\right)^{17}},\quad v=\left(\frac{i(-1-i)}{|1-i|}\right)^{11},$$
$$w=\frac{3+i}{(-1+i)(3-2i)}+\frac{3-i}{(-1-i)(3-2i)},\quad x=\left(\frac{(2-i)(-3+i)}{|(2-i)(-3+i)|}\right)^{1001},$$
$$y=\overline{\left(\frac{(-2-2i)\left(-5\sqrt{3}+15i\right)}{\sqrt{3}-i}\right)^{389}},\quad z=\frac{\left(7\sqrt{3}-21i\right)^{79}}{\left((-1-i)\left(-\sqrt{21}+\sqrt{7}i\right)\right)^{103}}.$$

2.4. Feladat. Adja meg a

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
(-5+2i)x_1 & + & (1+i)x_2 & + & (3-9i)x_3 & + & 4ix_4 & = & 1-i\\
(-3+i)x_1 & + & (1+i)x_2 & + & (2-7i)x_3 & + & 3ix_4 & = & 1-i\\
(1-i)x_1 & + & (1+i)x_2 & + & -3ix_3 & + & ix_4 & = & 1-i
\end{array}$$

lineáris egyenletrendszer általános megoldását.

2.5. Feladat. Végezze el az alábbi gyökvonásokat:

$$\sqrt[15]{0},\quad \sqrt[9]{-1},\quad \sqrt[111]{i},\quad \sqrt[10]{-2+2i},\quad \sqrt[89]{\frac{\sqrt{3}-3i}{-3+3i}}.$$

2.6. Feladat. Döntse el a megadott n pozitív egész és z komplex szám esetén, hogy n-edik egységgyök-e z, és ha igen, akkor primitív n-edik egységgyök-e. Ha az utóbbi kérdésre igenlő a válasz, akkor állítsa elő az összes n-edik egységgyököt z 'kis' nemnegatív egész kitevős hatványaként (pl. $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ primitív harmadik egységgyök, és $1=z^0,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=z^2,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=z$):

(1) $n=8,\ z=1-i;$
(2) $n=8,\ z=-i;$
(3) $n=6,\ z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i;$
(4) $n=10,\ z=\cos\dfrac{3\pi}{10}+i\sin\dfrac{3\pi}{10};$

(5) $n = 7,\ z = \cos \frac{8\pi}{7} + i \sin \frac{8\pi}{7}$.

2.7. Feladat. Trigonometrikus alakúak-e a következő komplex számok:

$$t = 0\,(\cos\pi + i\sin\pi)\,,\quad u = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$
$$v = -1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right),\quad w = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right).$$

Amelyik nem trigonometrikus alakú, azt adja meg trigonometrikus alakban.

2.8. Feladat. Igaz-e, hogy

$$\sqrt[42]{\left(-2\sqrt{3}-2i\right)^7} = \left(\sqrt[42]{-2\sqrt{3}-2i}\right)^7 = \sqrt[6]{-2\sqrt{3}-2i}\,?$$

2.9. Feladat. Az alábbi komplex számok mely $n \in \mathbb{N}$-re n-edik egységgyökök, illetve primitív n-edik egységgyökök:

$$-i,\quad -1+i,\quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \cos\frac{7\pi}{2007} + \sin\frac{7\pi}{2007}.$$

2.10. Feladat. Adja meg a $\frac{\pi}{12}$ szög szinuszát és koszinuszát egész számokból alkotott gyökös kifejezésként. [Pl. $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.]

2.11. Feladat. Igazolja a következő egyenlőséget tetszőleges α szögre:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \quad \text{és} \quad \sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha.$$

2.12. Feladat. Mutassa meg, hogy

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

3. Vektorrendszer és mátrix rangja, alterek bázisai

3.1. Feladat. Határozza meg a következő valós mátrixok rangját:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

Mekkora ugyanezen mátrixok rangja, ha racionális, illetve komplex számtest feletti mátrixként tekintjük őket?

3.2. Feladat. Határozza meg

(1) az $\mathbb{R}^5$ vektortérben a $(3,-1,3,2,5)$, $(5,-3,2,3,4)$, $(-1,3,5,0,7)$, $(7,-5,1,4,1)$
(2) a $\mathbb{Q}^4$ vektortérben a $(1,1,4,-1)$, $(2,5,5,1)$, $(4,0,3,1)$, $(1,2,3,0)$
(3) a $\mathbb{C}^4$ vektortérben a $(2i,-2,1,1)$, $(1,i,0,-i)$, $(-1-i,1,1,i)$

vektorrendszer rangját.

3.3. Feladat. Válasszon ki az előző feladatban megadott vektorrendszerekből maximális lineárisan független részrendszert.

3.4. Feladat. Adja meg

(1) az $\mathbb{R}^4$-beli $[(3,1,0,0),(1,1,0,-1),(1,-1,0,2)]$
(2) a $\mathbb{Q}^5$-beli $[(1,4,-2,0,-1),(-2,0,0,1,1),(1,-2,2,-1,1),(0,2,0,0,1)]$
(3) a $\mathbb{C}^3$-beli $[(1-i,i,0),(-1-i,1,0)]$

alteret elemei segítségével. Állapítsa meg, hogy ezekben az alterekben bázist alkotnak-e a megadott vektorok.

3.5. Feladat. Adjon meg bázist

(1) a 4.4. Feladatban megadott három
(2) az $\mathbb{R}^5$-beli $\{(2a-b+c, a+c, -a+b, b+c, b+c) \in \mathbb{R}^5 : a,b,c \in \mathbb{R}\}$
(3) a $\mathbb{Q}^5$-beli $\{(3a-4b+2c, 2a+b-c, a+c, b+c, a+b+c) \in \mathbb{Q}^5 : a,b,c \in \mathbb{Q}\}$
(4) a $\mathbb{C}^4$-beli $\{(-b+c, ia+c, -a+ib, b+c) \in \mathbb{C}^5 : a,b,c \in \mathbb{R}\}$

altérben.

3.6. Feladat. Tekintsük

(1) az $\mathbb{R}^4$ vektortérben az $U = [(1,1,0,-1),(1,-1,0,2),(3,1,0,0)]$ és $V = [(-1,0,1,-1),(1,0,1,0),(0,0,2,-1)]$
(2) a $\mathbb{Q}^5$ vektortérben az $U = [(2,2,0,-1,0),(3,0,2,-2,1),(1,0,2,2,0)]$ és $V = [(1,-2,2,-1,1),(-2,0,0,1,1),(0,2,0,0,1)]$
(3) a $\mathbb{C}^3$ vektortérben az $U = [(i,i,1)]$ és $V = [(1-i,i,0),(-1-i,1,0)]$

altereket. Adjon meg egy-egy bázist az $U+V$ és $U \cap V$ alterekben.

3.7. Feladat. Legyen M tetszőleges racionális mátrix. Igazolja, hogy M rangja független attól, hogy M-et racionális, valós vagy komplex mátrixnak tekintjük.

3.8. Feladat. Mutassa meg, hogy bármely T test feletti $n \times n$-es A mátrixra ekvivalensek az alábbi tulajdonságok:

(1) A sorvektorainak rendszere lineárisan független,
(2) A oszlopvektorainak rendszere lineárisan független,
(3) A rangja n,
(4) A determinánsa nem 0.

3.9. Feladat. Legyen V tetszőleges vektortér és benne $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tetszőleges vektorok. Milyen feltételek mellett 0, illetve 1 a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszer rangja?

3.10. Feladat. Legyen T test, valamint legyen $A \in T^{k\times m}$ és $B \in T^{k\times n}$. Jelölje C azt a $T^{k\times(m+n)}$-beli mátrixot, amely A és B oszlopainak egymás után írásával keletkezik. Igazolja, hogy $r(C) \le r(A) + r(B)$.

3.11. Feladat. Legyen T test, és legyen $A, B \in T^{k\times m}$. Bizonyítsa be, hogy $r(A + B) \le r(A) + r(B)$.

3.12. Feladat. Legyen T test, valamint legyen $A \in T^{k\times m}$ és $B \in T^{m\times n}$. Mutassa meg, hogy $r(AB) \le r(A)$ és $r(AB) \le r(B)$.

4. Lineáris leképezések I.

A sík, illetve tér vektorterét a szokásos módon azonosítjuk $\mathbb{R}^2$-tel, illetve $\mathbb{R}^3$-bel. Továbbá ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ jelöli $\mathbb{C}$-t mint $\mathbb{R}$ fölötti vektorteret.

4.1. Feladat. Döntse el, hogy lineáris leképezések-e az alábbi vektorterek között megadott leképezések:

(1) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, φ a tér vektorainak merőleges vetítése az x, y tengelyek által kifeszített síkra;
(2) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto \left(x, y, \frac{x+y}{2}\right)$;
(3) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_2, 2x_3, 3x_4)$;
(4) $\varphi\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, x_1 + 1, x_2 + 2, x_3 + 3)$;
(5) $\varphi\colon {}_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, $a + bi \mapsto (a, b)$ $(a, b \in \mathbb{R})$;
(6) $\varphi\colon {}_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, $a + bi \mapsto (a, b)$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

4.2. Feladat. Döntse el, hogy lineáris transzformációk-e az alábbi vektortereken megadott transzformációk:

(1) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, φ a sík vektorainak az origó körüli elforgatása $\frac{\pi}{3}$ szöggel;
(2) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, φ a tér vektorainak merőleges vetítése az $x + y + z = 0$ síkra;
(3) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3)$;
(4) $\varphi\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$;
(5) $\varphi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$;
(6) $\varphi\colon {}_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \to {}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$.

4.3. Feladat. Tekintsük a megadott vektorterek alábbi bázisát:

(1) $\mathbb{R}^2$: $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (0, -1)$;
(2) $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 3)$: $u_1 = (0, 1, 1, \ldots, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1, 1, \ldots, 1), \ldots, u_k = (1, 1, \ldots, 1, 0)$;
(3) $\mathbb{Q}^k$ $(k \geq 2)$: $u_1 = (1, 1, \ldots, 1)$, $u_2 = (1, 1, \ldots, 1, 0)$, $u_3 = (1, \ldots, 1, 0, 0)$, $\ldots, u_k = (1, 0, \ldots, 0)$;
(4) $\mathbb{C}^k$ $(k \geq 2)$: $u_1 = (0, \ldots, 0, i)$, $u_2 = (0, \ldots, 0, i, 0), \ldots, u_k = (i, 0, \ldots, 0)$;
(5) ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$: $u_1 = 1 + i$, $u_2 = 1 - i$.

(a) Adja meg az 5.1. Feladatbeli lineáris leképezések mátrixát a standard bázisokban, valamint az itt megadott bázisokban.

(b) Adja meg az 5.2. Feladatbeli lineáris transzformációk mátrixát a standard bázisban, valamint az itt megadott bázisban.

4.4. Feladat. Adja meg a bázisáttérés mátrixát az alábbi két bázis között mindkét irányban:

(1) $\mathbb{R}^2$: a standard bázis és az 5.3. Feladatbeli bázis;
(2) $\mathbb{R}^2$: az 5.3. Feladatbeli bázis és az $(1, -1), (-1, 2)$ bázis;
(3) $\mathbb{R}^k, \mathbb{Q}^k$ és $\mathbb{C}^k$ $(k = 3, 4)$: a standard bázis és az 5.3. Feladatbeli bázis;
(4) ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$: a standard bázis és az 5.3. Feladatbeli bázis;
(5) ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$: az 5.3. Feladatbeli bázis és az $1 + \sqrt{3}i, -\sqrt{3} + i$ bázis.

4.5. Feladat. Tudjuk, hogy a φ lineáris leképezés, illetve transzformáció mely vektorokat rendeli egy adott bázis elemeihez. Adja meg φ hozzárendelési szabályát (l. 5.1. és 5.2. Feladat):

(1) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ e_1\varphi = e_1,\ e_2\varphi = -e_2;$
(2) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ e_1\varphi = e_2,\ e_2\varphi = -e_1,\ e_3\varphi = e_3;$
(3) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ e_1\varphi = e_3,\ e_2\varphi = e_1;$
(4) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ u_1\varphi = u_2\varphi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0),\ u_3\varphi = (1,1,0);$
(5) $\varphi\colon {}_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2,\ u_1\varphi = e_1,\ u_2\varphi = e_2;$
(6) $\varphi\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3,\ u_1\varphi = 0,\ u_2\varphi = u_1 + u_2,\ u_3\varphi = u_2 + u_3,\ u_4\varphi = 0;$
(7) $\varphi\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4,\ u_1\varphi = u_2,\ u_2\varphi = u_3,\ u_3\varphi = u_3 - u_4.$

Itt $e_1, e_2, \ldots$ az adott vektortér standard bázisát, $u_1, u_2, \ldots$ pedig az 5.3. Feladatban megadott bázisát jelöli.

4.6. Feladat. Igazolja, hogy az alábbi leképezések (transzformációk) lineárisak:

(1) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, φ a sík vektorainak az origó körüli elforgatása α szöggel;
(2) $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1},\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, 2x_3, \ldots, (n-1)x_n);$
(3) $\varphi\colon \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n,\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \cdots + x_n);$
(4) $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 - x_2, \ldots, x_{n-1} - x_n, x_n - x_1).$

4.7. Feladat. Tetszőleges $n \geq 3$ egész esetén adja meg az 5.6. Feladatbeli (2) lineáris leképezés, illetve (1),(3),(4) lineáris transzformáció mátrixát a standard bázis(ok)ban, valamint az 5.3. Feladatban megadott bázis(ok)ban.

4.8. Feladat. Tudjuk, hogy a φ lineáris leképezés mely vektorokat rendeli egy adott bázis elemeihez. Adja meg φ hozzárendelési szabályát (l. 5.6. Feladat):

(1) $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1},\ u_1\varphi = 0,\ u_2\varphi = u_1 + u_2,\ u_3\varphi = u_2 + u_3, \ldots, u_{n-1}\varphi = u_{n-2} + u_{n-1},\ u_n\varphi = 0;$
(2) $\varphi\colon \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^{n+1},\ u_1\varphi = u_2,\ u_2\varphi = u_3, \ldots, u_{n-1}\varphi = u_n,\ u_n\varphi = u_n - u_{n+1}.$

Itt $u_1, u_2, \ldots$ az adott vektortérnek az 5.3. Feladatban megadott bázisát jelöli.

4.9. Feladat. Adja meg a bázisáttérés mátrixát tetszőleges $k \geq 3$ egész esetén az $\mathbb{R}^k, \mathbb{Q}^k$ és $\mathbb{C}^k$ vektorterekben a standard bázis és az 5.3. Feladatbeli bázis között mindkét irányban.

5. Lineáris leképezések II.

5.1. Feladat. Tekintsük az alábbi φ és ψ lineáris leképezéseket, illetve transzformációkat:

(1) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to {}_{\mathbb{R}}\mathbb{C},\ (a,b)\varphi = a - bi,$
$\psi\colon {}_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2,\ (a+bi)\psi = (b,a)\ (a,b \in \mathbb{R});$

(2) $\varphi\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2,\ (x,y)\varphi = (x+y, x-y),$
$\psi\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3,\ (x,y)\psi = (x,y,x+y);$

(3) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z)\varphi = (x-y, y-z),$
$\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z)\psi = (y, z-x);$

(4) $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^2,\mathbb{Q}^3)$ és $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^2,\mathbb{Q}^3)$ az a lineáris leképezés, amelynek mátrixa a standard bázisokban
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad A_\psi = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

(5) $\varphi \in \mathrm{Hom}({}_{\mathbb{R}}\mathbb{C},{}_{\mathbb{R}}\mathbb{C})$ az a lineáris transzformáció, amelynek mátrixa a standard bázisban
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$\psi \in \mathrm{Hom}({}_{\mathbb{R}}\mathbb{C},{}_{\mathbb{R}}\mathbb{C})$ pedig az, amelynek mátrixa az $i, 1-i$ bázisban
$$A_\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

(6) $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ és $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ a sík vektorainak tükrözése az x, illetve az y tengelyre;

(7) $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ és $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ a tér vektorainak tükrözése az origóra, illetve a tér vektorainak merőleges vetítése az x, y tengelyek által kifeszített síkra.

(a) Döntse el, hogy értelmezve van-e φ és ψ összege, és ha igen, akkor adja meg a $\varphi + \psi$ összeget ugyanabban a formában, ahogyan φ-t és ψ-t megadja a feladat.

(b) Döntse el, hogy értelmezve van-e φ és ψ szorzata, és ha igen, akkor adja meg a $\varphi\psi$ szorzatot ugyanabban a formában, ahogyan φ-t és ψ-t megadja a feladat.

5.2. Feladat. Döntse el, hogy előállnak-e a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ lineáris leképezések, illetve transzformációk a megadott ξ és η lineáris leképezések, illetve transzformációk lineáris kombinációjaként:

(1) $\xi\colon {}_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \to \mathbb{R}^3,\ (a+bi)\xi = (a-b, b, a+b),$
$\eta\colon {}_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \to \mathbb{R}^3,\ (a+bi)\eta = (a, 0, b),$
$\varphi_1\colon {}_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \to \mathbb{R}^3,\ (a+bi)\varphi_1 = (a, -a, -b),$
$\varphi_2\colon {}_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \to \mathbb{R}^3,\ (a+bi)\varphi_2 = (b, -b, -a)\ (a,b \in \mathbb{R});$

(2) ξ és $\eta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ a sík vektorainak merőleges vetítése az x, illetve y tengelyre, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ pedig rendre az identikus transzformáció, a sík vektorainak tükrözése az x tengelyre, valamint a sík vektorainak elforgatása az origó körül $\frac{\pi}{2}$ szöggel.

5.3. Feladat. Határozza meg a 6.1. Feladatbeli lineáris leképezések, illetve transzformációk rangját.

5.4. Feladat. Határozza meg az alábbi φ lineáris transzformációk sajátértékeit, és adjon meg bázist minden sajátértékhez tartozó sajátaltérben:

(1) $\varphi\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\ (x, y)\varphi = (-y, x)$;
(2) $\varphi\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2,\ (x, y)\varphi = (-y, x)$;
(3) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ (x_1, x_2, x_3, x_4)\varphi = (x_3, x_2 - 3x_4, -x_1, 2x_4)$;
(4) $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ a sík vektorainak merőleges vetítése az x tengelyre;
(5) $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ a sík vektorainak tükrözése az x tengelyre;
(6) $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ a sík vektorainak tükrözése az origóra;
(7) $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ a sík vektorainak elforgatása az origó körül $\frac{\pi}{2}$ szöggel;
(8) $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ a tér vektorainak tükrözése az $x + y + z = 0$ síkra.

5.5. Feladat. Döntse el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkot-e a sík lineáris transzformációinak $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ vektorterében az identikus transzformáció, az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükrözés és az origó körüli elforgatás $\frac{\pi}{3}$ szöggel.

5.6. Feladat. Legyen ξ és $\eta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ a sík vektorainak merőleges vetítése az x, illetve y tengelyre. Határozza meg, melyik alteret generálja $\{\xi, \eta\}$ a $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ vektortérben.

5.7. Feladat. Oldja meg a 4.11. és 4.12. Feladatot a lineáris leképezésekről tanultak felhasználásával.

5.8. Feladat. Döntse el, hogy van-e olyan $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ lineáris transzformáció, amelynek két különböző bázisban felírt mátrixa

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;
(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
(6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
(7) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Kvadratikus alakok, euklideszi terek

6.1. Feladat. Adott a V vektortéren egy kvadratikus alak a standard bázisban felírt A mátrixával, illetve f koordinátás alakjában:

(1) $V = \mathbb{Q}^3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) $V = \mathbb{R}^3$, $f = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2$;

(3) $V = \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

(4) $V = \mathbb{Q}^3$, $f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;

(5) $V = \mathbb{R}^4$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(6) $V = \mathbb{R}^4$, $f = 8x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 8x_2x_4$.

(a) A koordinátás alakban megadott kvadratikus alaknak írja fel a mátrixát, a mátrixával megadottat pedig írja fel koordinátás alakban.

(b) Hozza kanonikus alakra a kvadratikus alakot, és adjon meg olyan bázist V-ben, amelyben ez a kvadratikus alak koordinátás alakja.

(c) Ha a kvadratikus alak valós, akkor adja meg a normálalakját is, és állapítsa meg, hogy definitség szempontjából melyik csoportba tartozik.

6.2. Feladat. Az adott A_i $(i = 0, 1, \ldots, 4)$ valós mátrixhoz keressen olyan D_i diagonális mátrixot és olyan Q_i nemelfajuló mátrixot, amelyre $A_i = Q_i D_i Q_i^{\mathrm{T}}$:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

6.3. Feladat. Adjon meg ortonormált bázist a négydimenziós euklideszi tér megadott altereiben:

(1) $U = [(1,1,1,1), (3,-1,3,-1), (2,3,-2,-1)]$,

(2) $V = [(1,2,1,3), (4,1,1,1), (3,1,1,0)]$,

(3) $W = \{(a,b,c,d) : 3a - b - c + d = 0,\ a + 2b - c - d = 0\}$,

(4) továbbá a 4.4. Feladat (1) és a 4.6. Feladat (1) részében definiált alterekben.

6.4. Feladat. A 7.1. Feladatban megadott valós kvadratikus alakokat hozza főtengely-transzformációval kanonikus alakra, és adjon meg minden kvadratikus alak esetén olyan ortonormált bázist a megfelelő euklideszi térben, amelyben a kvadratikus alaknak ez a koordinátás alakja.

6.5. Feladat. A 7.2. Feladatban megadott A_i $(i = 0, 1, \dots, 4)$ valós mátrixhoz keressen olyan D_i diagonális mátrixot és olyan Q_i ortogonális mátrixot, amelyre $A_i = Q_i D_i Q_i^{-1}$.

6.6. Feladat. Tekintsük az alábbi két kvadratikus alakot $\mathbb{R}^n$-en:

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \le i < k \le n} x_i x_k, \quad g = \sum_{1 \le i < k \le n} x_i x_k.$$

(a) Hozza kanonikus alakra a két kvadratikus alakot, és mindkét esetben adjon meg olyan bázist $\mathbb{R}^n$-ben, amelyben ez a kvadratikus alak koordinátás alakja.

(b) Hozza főtengely-transzformációval kanonikus alakra ezeket a kvadratikus alakokat, és adjon meg mindkét esetben olyan ortonormált bázist $\mathbb{R}^n$-ben, amelyben a kvadratikus alaknak ez a koordinátás alakja.

(c) Fogalmazza meg az (a) és (b) részben kapott eredmények mátrixokra vonatkozó megfelelőjét.

7. Test feletti polinomgyűrűk I.

7.1. Feladat. Végezze el az alábbi maradékos osztást a megadott polinomgyűrűben:

(1) $\mathbb{R}[x]$-ben $(x^5 - 5x^3 + 5x + 1) : (3x^3 - 2x + 1)$,
(2) $\mathbb{Q}[x]$-ben $(x^5 - 5x^3 + 5x + 1) : (3x^3 - 2x + 1)$,
(3) $\mathbb{R}[x]$-ben $(x^4 - 10x^2 + 1) : (x^2 - 2\sqrt{2}x - 1)$,
(4) $\mathbb{C}[x]$-ben $(x^3 - 2) : (x^2 + ix - 1)$,
(5) $\mathbb{Z}_2[x]$-ben $(x^5 + x^4 + x^2 + x) : (x^4 + x^2 + \overline{1})$,
(6) $\mathbb{Z}_5[x]$-ben $(x^5 + \overline{2}x^4 - x^2 - x + \overline{1}) : (\overline{2}x^3 - x - \overline{1})$,
(7) $\mathbb{Z}_7[x]$-ben $(\overline{3}x^5 - x^3 - \overline{2}x^2 + x - \overline{1}) : (x^3 - \overline{2}x^2 + x - \overline{1})$.

7.2. Feladat. Határozza meg az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét a megadott polinomgyűrűben:

(1) $x^5 - 5x^3 + 5x + 1, 3x^3 - 2x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$,
(2) $x^4 - 10x^2 + 1, x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 \in \mathbb{R}[x]$,
(3) $ix^3 - 1, x^5 - x^3 + x^2 - 1 \in \mathbb{C}[x]$,
(4) $x^4 + x^2 + \overline{1}, x^5 + x^4 + x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$,
(5) $x^4 + \overline{1}, x^3 - x \in \mathbb{Z}_3[x]$,
(6) $x^4 + x^3 + \overline{2}x^2 - \overline{2}x + \overline{2}, x^4 - x^2 - \overline{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$.

7.3. Feladat. Adja meg az R polinomgyűrűben a megadott polinomegyenlet összes (u, v) megoldását, valamint azt a megoldást, ahol u a lehető legkisebb fokú.

(1) $R = \mathbb{R}[x]$: $(x^5 - 3x^4 + 2x^2)u + (2x^4 - x^3)v = x$;
(2) $R = \mathbb{Q}[x]$: $(x^4 + 2x^3 + x + 1)u + (x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1)v = x^3 - 2x$;
(3) $R = \mathbb{C}[x]$: $(x - i)u + (x^2 + 1)v = x^3 + i$;
(4) $R = \mathbb{Z}_2[x]$: $(x^4 + x^2 + \overline{1})u + (x^5 + x^4 + x^2 + x)v = x^4 + x^3 + x^2$;
(5) $R = \mathbb{Z}_5[x]$: $(x^3 + x^2 + \overline{2}x - \overline{2})u + (x^3 - \overline{2}x^2 - x - \overline{1})v = x^2 + \overline{1}$;
(6) $R = \mathbb{Z}_7[x]$: $(x^3 + \overline{3}x^2 - \overline{3}x - \overline{1})u + (x^4 + x^2 + \overline{3})v = x^4$.

7.4. Feladat. Legyenek adottak az alábbi polinomok:

$$\begin{aligned}
f &= x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 12x^2 - 2x - 4 \in \mathbb{R}[x],\\
g &= x^3 + 3x + 2i \in \mathbb{C}[x],\\
u &= x^3 + x^2 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x],\\
v &= x^4 - x^3 - x^2 + x \in \mathbb{Z}_3[x],\\
w &= x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x],\\
z &= x^3 + \overline{2}x^2 - \overline{3} \in \mathbb{Z}_7[x].
\end{aligned}$$

Horner-elrendezés alkalmazásával

(1) számolja ki az $f(-1), g(2i), v(-\overline{1}), w(\overline{2}), z(-\overline{3})$ helyettesítési értékeket;
(2) döntse el, hogy gyöke-e, és ha igen, akkor hányszoros gyöke f-nek -2, g-nek $-i$, u-nak $\overline{1}$, v-nek $\overline{1}$, w-nek $-\overline{2}$ és z-nek $\overline{3}$;
(3) végezze el az $f : (x + 1)$, $g : (x - 1)$, $u : (x + \overline{1})$, $v : (x - \overline{1})$, $w : (x - \overline{2})$ és a $z : (x + \overline{2})$ maradékos osztást.

7.5. Feladat. Adja meg elempárok halmazaként az előző feladatbeli u, v, w, z, valamint a következő polinomokhoz tartozó polinomfüggvényeket:

$$\begin{aligned} f &= x^5 + x^3 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x], \\ g &= -x^4 - x^3 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x], \\ h &= x^6 + x^4 + x^3 + \overline{2}x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x], \\ p &= x^7 + \overline{2}x^4 - \overline{3}x + \overline{2} \in \mathbb{Z}_7[x]. \end{aligned}$$

Döntse el, hogy vannak-e közöttük azonosak.

7.6. Feladat. Határozza meg azt a legkisebb fokú $\mathbb{Z}_7$-beli polinomot, amely $\overline{2}x$-et ad maradékul $(x - \overline{1})^2$-nel osztva, és $\overline{3}x$-et ad maradékul $(x - \overline{2})^3$-nel osztva.

7.7. Feladat. Legyen K tetszőleges test, $f, g, u, v \in K[x]$ tetszőleges polinomok, és jelölje d az f és g polinomok legnagyobb közös osztóját $K[x]$-ben. Határozza meg az u és v polinomok legnagyobb közös osztóját $K[x]$-ben, ha tudjuk, hogy $fu + gv = d$.

7.8. Feladat. Legyen K, L két test, melyre $K \subseteq L$, és legyen $f, g \in K[x]$. Ekkor persze $f, g \in L[x]$ is fennáll. Igazolja, hogy

(1) $f \mid g$ pontosan akkor teljes $K[x]$-ben, ha $L[x]$-ben teljesül,
(2) az f és g polinomnak ugyanaz a legnagyobb közös osztója, illetve legkisebb közös többszöröse $K[x]$-ben, mint $L[x]$-ben,
(3) bármely $h \in K[x]$ és $u, v \in L[x]$ polinomok esetén, ha $fu + gv = h$, akkor $u, v \in K[x]$, és így az $fu + gv = h$ egyenletnek ugyanazok a polinompárok a megoldásai $K[x]$-ben, mint $L[x]$-ben.

7.9. Feladat. Mutassa meg, hogy $x^d - 1 \mid x^n - 1$ teljesül $\mathbb{Q}[x]$-ben, ha $d, n \in \mathbb{N}$-re $d \mid n$.

7.10. Feladat. Mely a, b valós, illetve $\mathbb{Z}_p$-beli (p prímszám) együtthatók esetén teljesül $(x - 1)^2 \mid ax^{n+1} + bx^n + 1$?

7.11. Feladat. Legyen p prímszám és f, g két polinom $\mathbb{Z}_p$ felett. Igazolja, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ polinomfüggvények pontosan akkor azonosak, ha

$$x(x - \overline{1})(x - \overline{2}) \cdots (x - \overline{p-1}) \mid f - g.$$

7.12. Feladat. Mutassa meg, hogy tetszőleges p prímszámra $\mathbb{Z}_p[x]$-ben fennáll az

$$x^p - x = x(x - \overline{1})(x - \overline{2}) \cdots (x - \overline{p-1})$$

egyenlőség.

8. Test feletti polinomgyűrűk II. Véges testek

8.1. Feladat. Adja meg az alábbi valós együtthatós polinomok irreducibilis felbontását a komplex, illetve a valós számtest fölött:

(1) $x^3 - 1$,
(2) $x^4 - 1$,
(3) $x^3 + 1$,
(4) $x^4 + 1$,
(5) $x^4 + x^2 + 1$,
(6) $x^6 - x^3 + 1$.

8.2. Feladat. Adjon meg

(1) harmadfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_5$ fölött;
(2) negyedfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_3$ fölött;
(3) ötödfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_3$ fölött;
(4) negyedfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_2$ fölött;
(5) ötödfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_2$ fölött;
(6) hetedfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_2$ fölött.

8.3. Feladat. Döntse el, hogy irreducibilis-e az alábbi polinom a megadott polinomgyűrűben:

(1) $x^3 + x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$,
(2) $x^4 + x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$,
(3) $x^4 + x^3 + x^2 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$,
(4) $x^4 + x^3 + x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$,
(5) $x^5 - \overline{2}x^3 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$.

8.4. Feladat. Legyen p prímszám, f pedig egy n-edfokú irreducibilis polinom $\mathbb{Z}_p$ fölött. Adja meg a $\mathbb{Z}_p[x]/\langle f\rangle$ test alábbi elemét n-nél kisebb fokú polinom osztályaként:

(1) $p = 2,\ f = x^3 + x^2 + \overline{1};\quad \overline{x^2 + x} \cdot \overline{x + \overline{1}},\ \overline{x + \overline{1}}^{-1},\ \overline{x^2} \cdot \overline{x^2 + x + \overline{1}}^{-1}$;
(2) $p = 3,\ f = x^2 + \overline{1};\quad \overline{\overline{1} - x} \cdot \overline{\overline{1} + x}^{-1},\ \overline{\overline{1} - x}^{-2}$;
(3) $p = 5,\ f = x^3 + x + \overline{1};\quad \overline{x}^{-1},\ \overline{(x^2 + \overline{1})}^{-5}$.

8.5. Feladat. Adja meg az alábbi valós együtthatós polinomok irreducibilis felbontását a komplex, illetve a valós számtest fölött:

(1) $x^n + 1$ $(n \in \mathbb{N})$,
(2) $x^{2n} - x^n + 1$ $(n \in \mathbb{N})$.

8.6. Feladat. Mutassa meg, hogy az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben pontosan akkor teljesül $x^2 + x + 1 \mid x^{2k} + x^k + 1$, ha $3 \nmid k$.

8.7. Feladat. Legyen p prímszám, f pedig egy n-edfokú irreducibilis polinom $\mathbb{Z}_p$ fölött. Adja meg a $\mathbb{Z}_p[x]/\langle f\rangle$ test elemeinek összegét.

9. Racionális együtthatós polinomok. Véges testek II.

9.1. Feladat. Döntse el, hogy van-e racionális gyöke az alábbi egész, illetve racionális együtthatós polinomoknak:

(1) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$,
(2) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$,
(3) $x^4 - \frac{19}{6}x^3 - \frac{7}{6}x^2 - \frac{13}{3}x + 2$,
(4) $x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{24}x^3 - \frac{19}{24}x^2 - \frac{5}{24}x + \frac{1}{4}$,
(5) $x^4 - 1,3x^3 + 1,5x^2 - 1,8x - 2,4$.

9.2. Feladat. Döntse el, hogy irreducibilisek-e az alábbi polinomok a racionális számtest fölött, és ha nem, akkor adja meg az irreducibilis felbontásukat $\mathbb{Q}[x]$-ben.

(1) $x^3 - 2$,
(2) $x^4 - 1$,
(3) $2x^3 - 5x^2 + 5x - 3$,
(4) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$,
(5) $x^5 + x^3 - 2x^2 - 2$,
(6) $x^5 - 12x^4 + 36x^2 - 12$.

9.3. Feladat. Határozza meg a megadott elemek rendjét az alábbi véges testekben, és döntse el, hogy ezek közül mely elemek primitívek és melyek nem.

(1) $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 + x + \overline{1}\rangle$; $\overline{x}$, $\overline{x + \overline{1}}$;
(2) $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x^2 + \overline{1}\rangle$; $\overline{x + \overline{1}}$, $\overline{x^2 + x}$;
(3) $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x + \overline{1}\rangle$; $\overline{x + \overline{1}}$, $\overline{x^2 + x}$;
(4) $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + \overline{1}\rangle$; $\overline{x}$, $\overline{x - \overline{1}}$;
(5) $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 + \overline{2}\rangle$; $\overline{x + \overline{1}}$, $\overline{2x + \overline{1}}$.

9.4. Feladat. Keresse meg a következő testekben a megadott elemek minimálpolinomját:

(1) $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x + \overline{1}\rangle$-ban $\overline{x^2 + x}$, $\overline{x^3 + \overline{1}}$;
(2) $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^4 + x^2 + x + \overline{1}\rangle$-ban $\overline{x - \overline{1}}$, $\overline{x^3 + x^2 + x}$;
(3) $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 - \overline{2}x - \overline{2}\rangle$-ban $\overline{x - \overline{1}}$, $\overline{x + \overline{2}}$.

9.5. Feladat. Jelölje T a $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^3 + x + \overline{1}\rangle$ testet és a az $\overline{x}$ elemet benne. Oldja meg T-ben az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} ay_1 + y_2 &= \overline{1} \\ a^2y_1 + (a+1)y_2 &= \overline{2} \end{aligned}$$

9.6. Feladat. Az adott T test, az a eleme és a felette vett $f \in T[y]$ polinom esetén döntse el, hogy a gyöke-e f-nek:

(1) $T = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x^2 + \overline{1}\rangle$, $a = \overline{x^2 + \overline{1}}$, $f = y^2 + \overline{x^2 + x}$;
(2) $T = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + x - \overline{1}\rangle$, $a = \overline{x - \overline{1}}$, $f = y^3 - \overline{x + \overline{1}}y + \overline{x}$.

9.7. Feladat. Adja meg az alábbi polinomok irreducibilis felbontását $\mathbb{Q}[x]$-ben.

(1) $x^9 - 1$,
(2) $x^4 - x^3 + 2x + 1$.

9.8. Feladat. Számolja ki, hogy hány másodfokú irreducibilis főpolinom van a véges T test felett.

9.9. Feladat. Hány n-edrendű elem van a T testben, ha

(1) $n = 2$, $T = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 + x + \overline{1}\rangle$;
(2) $n = 7$, $T = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x^2 + \overline{1}\rangle$;
(3) $n = 13$, $T = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 - x^2 + \overline{1}\rangle$;
(4) $n = 4$, $T = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + \overline{1}\rangle$;
(5) $n = 4$, $T = \mathbb{Z}_5[x]/\langle x^3 - x + \overline{2}\rangle$;

9.10. Feladat. Legyen f irreducibilis n-edfokú főpolinom a $\mathbb{Z}_p$ test fölött, és tekintsük a $T = \mathbb{Z}_p[x]/\langle f\rangle$ testet. Mely pozitív egész k számokra teljesül, hogy az $x^k - a$ polinomnak van gyöke T-ben az összes $a \in T$-re.

10. Hibajavító kódolás

10.1. Feladat. Állapítsa meg az alábbi $\mathbb{Z}_p$ fölötti C blokk-kódról, hogy
(a) mekkora a minimális távolsága,
(b) mely t nemnegatív egészekre t-hibajelző, illetve t-hibajavító,
(c) lineáris-e:

(1) $p = 2,\ C = \{0101, 1010, 1111\}$,
(2) $p = 2,\ C = \{u_1u_2u_3u_4 \in \mathbb{Z}_2^4 : u_1 = u_2, u_3 = u_4\}$,
(3) $p = 2,\ C = \{0\}\mathbb{Z}_2^3\{0\} \cup \{1\}\mathbb{Z}_2^3\{1\}$,
(4) $p = 3,\ C = \{012, 120, 201, 210, 021, 102\}$,
(5) $p = 3,\ C = \{u_1u_2u_3u_4u_5 \in \mathbb{Z}_3^5 : u_1 + u_2 = u_3 - u_4\}$.

10.2. Feladat. Az előző feladatbeli C lineáris kódokhoz adjon meg — lehetőleg több — generátormátrixot, és döntse el, hogy C szisztematikus-e. Ha C nem szisztematikus, akkor adjon meg vele ekvivalens szisztematikus lineáris kódot.

10.3. Feladat. Adja meg az alábbi G generátormátrix által definiált C kódot, határozza meg C minimális távolságát, és keressen ellenőrző mátrixot C-hez.

(1) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{3\times 5}$,

(2) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{3\times 5}$,

(3) $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{3\times 4}$,

(4) $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 6}$,

10.4. Feladat. Határozza meg az összes

(1) 4 hosszú nemtriviális ciklikus, lineáris, bináris kódot;
(2) 5 hosszú nemtriviális ciklikus, lineáris, bináris kódot;
(3) 3 hosszú nemtriviális ciklikus, lineáris kódot $\mathbb{Z}_3$ fölött.

10.5. Feladat. Legyen β a $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+1\rangle$ test egyik primitív eleme, $g \in \mathbb{Z}_3[x]$ pedig β minimálpolinomja. Jelölje C azt a ciklikus Hamming-kódot, amelynek genetátorpolinomja g. Oldja meg az alábbi feladatokat az összes lehetséges β-ra:

(1) Adja meg a C kódot és egy ellenőrző mátrixát.
(2) Döntse el, hogy C szisztematikus kód-e.
(3) Ha C szisztematikus kód, akkor adja meg a $G = (E\ H)$ (E egységmátrix) alakú generátormátrixát.
(4) Kódolja G segítségével az

$$1120, \quad 221022, \quad 10201121$$

üzeneteket.

(5) Dekódolja az

$$12011102, \quad 211200221211, \quad 111121020001$$

sorozatokat, ha tudjuk, hogy az eredeti üzenetet G segítségével kódolták.

10.6. Feladat. Készítsen olyan Hamming-kódot $\mathbb{Z}_3$ fölött, amelynek hossza 13 és dimenziója 10. Mutassa meg ennek segítségével, hogy a TOTÓ-n elegendő 3^{10} hasábot (ügyesen) megjátszani ahhoz, hogy biztosan legyen legalább 12 találatunk.