

Kvadratikus alakok és euklideszi terek

(előadásvázlat, 2009. március 29.)

Maróti Miklós

Az előadáshoz ajánlott jegyzet:

- Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebra*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003–2006.
- Klukovits Lajos: *Klasszikus és lineáris algebra*, Polygon Kiadó, Szeged, 1999.

1. Megjegyzés. Ebben a fejezetben mindenhol feltesszük, hogy a T testben $1 + 1 \neq 0$. Ez például a $\mathbb{Z}_2$ testben nem teljesül!

2. Definíció. Legyen U és V vektortér a T test felett. Egy $l : U \times V \rightarrow T$ leképezést **bilineáris leképezésnek** nevezünk, ha

- (1) minden $u_1, u_2 \in U$ és $v \in V$ esetén $l(u_1 + u_2, v) = l(u_1, v) + l(u_2, v)$,
- (2) minden $u \in U$ és $v_1, v_2 \in V$ esetén $l(u, v_1 + v_2) = l(u, v_1) + l(u, v_2)$,
- (3) minden $\lambda \in T$, $u \in U$ és $v \in V$ esetén $l(\lambda u, v) = \lambda l(u, v) = l(u, \lambda v)$.

Az l bilineáris leképezés **szimmetrikus**, ha $U = V$ és minden $u, v \in U$ esetén $l(u, v) = l(v, u)$.

3. Definíció. Legyen U m -dimenziós és V n -dimenziós vektortér a T test felett, továbbá $\mathcal{E} : e_1, \dots, e_m$ bázis U -ban és $\mathcal{F} : f_1, \dots, f_n$ bázis V -ben. Az $l : U \times V \rightarrow T$ **bilineáris leképezés mátrixa** az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban az $(l(e_i, f_j)) \in T^{m \times n}$ mátrix. Ha l szimmetrikus, akkor az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokat azonosnak válasszuk, és így definiáljuk l mátrixát.

4. Tétel. Legyen U m -dimenziós és V n -dimenziós vektortér a T test felett, $\mathcal{E}$ bázis U -ban, $\mathcal{F}$ bázis V -ben, és $A \in T^{m \times n}$ az $l : U \times V \rightarrow T$ bilineáris leképezés mátrixa. Ekkor tetszőleges $u \in U$ és $v \in V$ vektorokra $l(u, v) = xAy^T$, ahol x az u vektor koordinátasora az $\mathcal{E}$ bázisban és y a v vektor koordinátasora a $\mathcal{F}$ bázisban. Tehát a bilineáris leképezés mátrixa (valamely bázisban) egyértelműen meghatározza a bilineáris leképezést.

5. Tétel. Legyen V véges dimenziós vektortér a T test felett. Az $l : V \times V \rightarrow T$ bilineáris leképezés akkor és csak akkor szimmetrikus, ha mátrixa valamely (bármely) bázisban szimmetrikus.

6. Definíció. Legyen V vektortér a T test felett. A $q : V \rightarrow T$ leképezést **kvadratikus alaknak** nevezzük, ha létezik olyan $l : V \times V \rightarrow T$ szimmetrikus bilineáris leképezés, amelyre $q(v) = l(v, v)$ minden $v \in V$ esetén.

7. Tétel. Bármely kvadratikus alak egyértelműen meghatározza a hozzá tartozó szimmetrikus bilineáris leképezést.

8. Definíció. A kvadratikus alak valamely bázisbeli **mátrixán** a kvadratikus alakhoz tartozó szimmetrikus bilineáris leképezés mátrixát értjük.

9. Tétel. Legyen V vektortér a T test felett, $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisok V -ben, és $q : V \rightarrow T$ kvadratikus alak. Ha q mátrixa A az $\mathcal{E}$ bázisban, és S az áttérés mátrixa az $\mathcal{F}$ bázisról a $\mathcal{E}$ bázisra, akkor q mátrixa az $\mathcal{F}$ bázisban SAS^T .

10. Definíció. A q kvadratikus alak **rangján** valamely (bármely) bázisbeli mátrixának rangját értjük, és $r(q)$ -val jelöljük. Azt mondjuk, hogy a q kvadratikus alak az $\mathcal{E}$ bázisban **kanonikus alakú**, ha mátrixa diagonális.

11. Tétel (Kvadratikus alakok alaptétele). Bármely véges dimenziós vektortéren értelmezett kvadratikus alakhoz megadható a vektortér olyan bázisa, amelyben a kvadratikus alak kanonikus alakú.

12. Következmény. Bármely A szimmetrikus mátrixhoz megadható olyan S nemelfajuló mátrix, amelyre SAS^T diagonális.

13. Definíció. Az $\mathbb{R}$ valós számtest feletti véges dimenziós vektortereken értelmezett kvadratikus alakokat **valós kvadratikus alakoknak** nevezzük. Az

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

alakú kvadratikus alakokat **normálalakúnak** nevezzük ($0 \leq k \leq r$).

14. Tétel. Bármely valós kvadratikus alakhoz megadható a vektortér olyan bázisa, amelyben a kvadratikus alak normálalakú.

15. Tétel (Tehetetlenségi tétel). Minden valós kvadratikus forma normálalakja egyértelműen meghatározott, azaz ha két bázisban a kvadratikus alak normálalakú, akkor ugyanannyi benne a pozitív, illetve a negatív tagok száma.

16. Definíció. A valós számtest feletti V vektortéren értelmezett q kvadratikus alak

- (1) **pozitív definit**, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) > 0$,
- (2) **negatív definit**, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) < 0$,
- (3) **pozitív szemidefinit**, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) \geq 0$, és létezik olyan nemnulla $w \in V$ vektor, amelyre $q(w) = 0$,
- (4) **negatív szemidefinit**, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) \leq 0$, és létezik olyan nemnulla $w \in V$ vektor, amelyre $q(w) = 0$,
- (5) minden más esetben **indefinit**, azaz ha léteznek olyan nemnulla $v, w \in V$ vektorok, hogy $q(v) > 0$ és $q(w) < 0$.

17. Tétel. Legyen $q = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2$ valós kvadratikus alak a valós számtest feletti n -dimenziós vektortéren. Ekkor q akkor és csak akkor

- (1) pozitív definit, ha $k = r = n$,
- (2) negatív definit, ha $k = 0$ és $r = n$,
- (3) pozitív szemidefinit, ha $k = r < n$,
- (4) negatív szemidefinit, ha $k = 0$ és $r < n$,
- (5) indefinit, ha $0 < k < r$.

18. Következmény. Minden olyan A szimmetrikus mátrixhoz, amelyhez tartozó xAx^T kvadratikus alak pozitív definit, létezik olyan P nemelfajuló valós mátrix, amelyre $A = PP^T$.

19. Definíció. A valós számtest feletti véges dimenziós V vektorteret **euklideszi térnek** nevezzük a $\langle -, - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ **belső szorzattal**, ha $\langle -, - \rangle$ olyan szimmetrikus bilineáris leképezés, amelyhez tartozó kvadratikus alak pozitív definit. Az $u \in V$ vektor **hosszán** (**normáján**) az $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ nemnegatív valós számot értjük. Az u vektor **normált**, ha $\|u\| = 1$. Az u és v vektorok távolsága alatt az $\langle u, v \rangle$ számot értjük.

20. Példa. Az $\mathbb{R}^n$ vektortér euklideszi tér az

$$\langle x, y \rangle = xy^T = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

úgynevezett **standard belső szorzattal**.

21. Tétel (Bunyakovszkij-Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség). Euklideszi tér tetszőleges u, v vektora esetén

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

22. Tétel (Háromszög egyenlőtlenség). Euklideszi tér tetszőleges u, v vektora esetén

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

23. Definíció. Tetszőleges u, v vektorra létezik egy egyértelműen meghatározott $0 \leq \alpha \leq \pi$ szög, hogy

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|},$$

amelyet az u és v vektorok **szögének** nevezünk. Azt mondjuk, hogy az u és v vektorok **merőlegesek** (**ortogonálisak**), ha $\langle u, v \rangle = 0$, amit $u \perp v$ -vel jelölünk.

24. Definíció. Az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer **ortogonális**, ha bármely $1 \leq i < j \leq k$ esetén $u_i \perp u_j$. Ha az $u_1, \dots, u_k$ vektorok normáltak is, akkor **ortonormált vektorrendszerről** beszélünk. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot **ortogonális mátrixnak** nevezzük, ha sorvektorrendszere ortonormált az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben.

25. Következmény. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix akkor és csak akkor ortogonális, ha $AA^T = E$, azaz $A^{-1} = A^T$.

26. Tétel (Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció). Euklideszi tér tetszőleges $u_1, \dots, u_k$ lineárisan független vektorrendszere esetén van olyan $v_1, \dots, v_k$ ortonormált vektorrendszer, amelyre $[u_1, \dots, u_k] = [v_1, \dots, v_k]$.

27. Következmény. Euklideszi tér bármely ortonormált vektorrendszere kiegészíthető ortonormált bázissá. Euklideszi térben van ortonormált bázis.

28. Definíció. Az U és V euklideszi terek **izomorfak**, ha van olyan $\varphi : U \rightarrow V$ vektortér izomorfizmus, amely megtartja a belső szorzatot, azaz $\langle u\varphi, v\varphi \rangle = \langle u, v \rangle$ minden $u, v \in U$ esetén.

29. Tétel. Bármely n -dimenziós euklideszi tér izomorf az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térrel.

30. Definíció. Legyen V euklideszi tér. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció **szimmetrikus**, ha minden $u, v \in V$ esetén $\langle u\varphi, v \rangle = \langle u, v\varphi \rangle$.

31. Tétel. Euklideszi tér lineáris transzformációja akkor és csak akkor szimmetrikus, ha mátrixa valamely (bármely) ortonormált bázisban szimmetrikus.

32. Tétel. Euklideszi tér bármely szimmetrikus lineáris transzformációjának van sajátértéke.

33. Tétel. Euklideszi tér tetszőleges φ szimmetrikus lineáris transzformációja esetén az euklideszi térnek van φ sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa. Ebben a bázisban φ mátrixa diagonális, ahol a főátlóban rendre a bázisvektorokhoz tartozó sajátértékek állnak.

34. Következmény. Bármely A valós szimmetrikus mátrixhoz megadható olyan P ortogonális mátrix, amelyre $P^{-1}AP$ diagonális.

35. Tétel (Kvadratikus alakok főtengetélete). Euklideszi térben bármely kvadratikus alakhoz megadható az euklideszi tér olyan ortonormált bázisa, amelyben a kvadratikus alak kanonikus alakú.