

Szemidirekt szorzat

(előadásvázlat, 2008. október 15.)

Maróti Miklós

Ennek az előadásnak a megértéséhez a következő fogalmakat kell tudni: **direkt szorzat**, **normálosztó**, **homomorfizmus és izomorfia tételek**, nevezetes csoportok.

Az előadáshoz ajánlott irodalom:

- Kiss Emil: *Bevezetés az absztrakt algebra*, Typotex Kiadó, 2007.
- Bálintné Szendrei Mária, Czédli Gábor, Szendrei Ágnes: *Absztrakt algebrai feladatok*, Polygon kiadó, 2005.

1. Definíció. Ha adottak a H és K csoportok és egy $\varphi : H \rightarrow \text{Aut } K$ homomorfizmus, akkor azt mondjuk hogy **H hat a K csoporton**. Jelölés: tetszőleges $h \in H$, $k \in K$ elemekre

$$k^h = k(h\varphi).$$

2. Állítás. A $\varphi : H \rightarrow K^K$ leképezés akkor és csak akkor hatás, ha tetszőleges $k_1, k_2, k \in K$ és $h_1, h_2, h \in H$ elemek esetén

- (1) $k^1 = k$,
- (2) $(k_1 k_2)^h = k_1^h k_2^h$, és
- (3) $(k^{h_1})^{h_2} = k^{h_1 h_2}$.

3. Példa.

- (1) Tetszőleges H, K csoportra $\varphi : H \rightarrow \text{Aut } K$, $k^h = k$ hatás (triviális).
- (2) Ha $H \leq G$, $K \triangleleft G$, akkor $\varphi : H \rightarrow \text{Aut } K$, $k^h = h^{-1}kh$ hatás.

4. Definíció. Legyen H, K csoport és H hasson K -n. A $H \times K$ halmazon definiáljuk a szorzást:

$$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) = (h_1 h_2, k_1^{h_2} k_2).$$

Állítás: az így kapott grupoid csoport, melynek neve a **K -nak H -val vett (külső) szemidirekt szorzata** (a $\varphi : H \rightarrow \text{Aut } K$ hatás mellett), és jele **$H \rtimes_\varphi K$** .

5. Állítás. Tetszőleges $G = H \rtimes_\varphi K$ (külső) szemidirekt szorzatra legyen $\overline{H} = \{ (h, 1) : h \in H \}$ és $\overline{K} = \{ (1, k) : k \in K \}$. Ekkor $\overline{H} \leq G$, $\overline{K} \triangleleft G$, $G = \overline{H} \overline{K}$ és $\overline{H} \cap \overline{K} = \{ (1, 1) \}$.

6. Definíció. A G csoport a $H \leq G$ részcsoporthoz és $K \triangleleft G$ normálosztójához vett **(belső) szemidirekt szorzata**, ha $G = HK$ és $H \cap K = \{1\}$. Jelölés: $G = H \ltimes K$.

7. Állítás. Tetszőleges $G = H \ltimes K$ (belső) szemidirekt szorzatra legyen $\varphi : H \rightarrow \text{Aut } K$, $k^h = h^{-1}kh$ a konjugálás hatás. Ekkor $G \cong H \rtimes_\varphi K$, továbbá ezen izomorfizmus a $H, K \leq G$ részcsoporthoz a $\overline{H}, \overline{K} \leq H \rtimes_\varphi K$ részcsoporthoz viszi.

8. Tétel. Legyen G csoport, $H \leq G$ és $K \triangleleft G$. Ekkor a következők ekvivalensek:

- (1) G a K -nak H -val vett belső szemidirekt szorzata.
- (2) G minden eleme előáll, mégpedig egyértelműen egy H -beli és egy K -beli elem szorzataként.
- (3) G minden eleme előáll, mégpedig egyértelműen egy K -beli és egy H -beli elem szorzataként.
- (4) $G = HK$ és $H \cap K = \{1\}$,
- (5) $G = KH$ és $H \cap K = \{1\}$.

9. Példa.

- (1) Minden direkt szorzat szemidirekt szorzat is a triviális hatással.
- (2) S_4 a $V = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ normálosztónak $\overline{S}_3 \leq S_4$ részcsoporthoz vett belső szemidirekt szorzata.

- (3) Az S_n szimmetrikus csoport az A_n normálosztónak a $H = \{\text{id}, (1\ 2)\}$ részcsoporttal vett belső szemidirekt szorzata.
- (4) A $D_n = [a, t \mid a^n, t^2, (at)^2]$ diédercsoport az $K = [a]$ normálosztónak a $H = \{1, t\}$ részcsoporttal vett belső szemidirekt szorzata.
- (5) Az $L_n = \{f_{a,b} : a \in R_n, b \in \mathbb{Z}_n\}$ lineáris permutációk csoportja $(f_{a,b} : x \mapsto ax + b)$ az $K = \{f_{1,b} : b \in \mathbb{Z}_n\}$ normálosztó $H = \{f_{a,0} : a \in R_n\}$ részcsoporttal vett belső szemidirekt szorzata.

10. Állítás. Legyen $C_m = [a \mid a^m]$, $C_n = [b \mid b^n]$ ciklikus csoportok. Ekkor

- (1) $\text{Aut } C_n \cong R_n$,
- (2) A $\varphi : C_m \rightarrow \text{Aut } C_n$ hatást egyértelműen meghatározza az $a\varphi = r \in R_n$ elem,
- (3) φ akkor és csak akkor hatás, ha $o(r) \mid m$.

11. Tétel. Ha p, q különböző prímek és $p \nmid q-1$, akkor C_p egyetlen C_q -val vett szemidirekt szorzata a direkt szorzat. Ha $p \mid q-1$, akkor ezen kívül izomorfia erejéig egyetlen szemidirekt szorzat van még, mégpedig a $\varphi : C_p \rightarrow \text{Aut } C_q, a \mapsto \alpha^{\frac{q-1}{p}}$ hatás által definiált, ahol $C_p = [a]$ és $\text{Aut } C_q = [\alpha]$.