

Szabad algebrák

(előadásvázlat, 2008. szeptember 20.)

Maróti Miklós

Ennek az előadásnak a megértéséhez a következő fogalmakat kell tudni: **csoport**, **félcsoport**, **monoid**, **homomorfizmus** és **izomorfia tételek**.

Az előadáshoz ajánlott irodalom:

- Kiss Emil: *Bevezetés az absztrakt algebrába*, Typotex Kiadó, 2007.
- Bálintné Szendrei Mária, Czédli Gábor, Szendrei Ágnes: *Absztrakt algebrai feladatok*, Polygon kiadó, 2005.

1. Definíció. Tetszőleges $X \neq \emptyset$ halmazra legyen

$$F_X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^n = \{x_1 x_2 \dots x_n : n \geq 1, x_1, \dots, x_n \in X\},$$

azaz az X ábécé feletti nemüres **szavak halmaza**. A $w = x_1 x_2 \dots x_n \in F_X$ **szó hossza** az $l(w) = n$ egész szám. Az F_X halmaz a melléírás művelettel félcsoportot alkot, melynek neve: **szabad félcsoport az X szabad generátorrendszerrel**. Az F_X félcsoportot szokásos X^+ -szal is jelölni.

2. Állítás. Tetszőleges S félcsoportra és $f : X \rightarrow S$ leképezésre létezik egy egyértelműen meghatározott $\varphi : F_X \rightarrow S$ homomorfizmus, amelyre $\varphi|_X = f$, azaz (φ az f **kiterjesztése**).

3. Tétel. Legyen T félcsoport és $\emptyset \neq X \subseteq T$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.

- (1) Tetszőleges S félcsoportra és $f : X \rightarrow S$ leképezésre létezik egy egyértelműen meghatározott $\varphi : T \rightarrow S$ homomorfizmus, amelyre $\varphi|_X = f$.
- (2) $T = [X]$, és tetszőleges S félcsoportra és $f : X \rightarrow S$ leképezésre létezik egy $\varphi : T \rightarrow S$ homomorfizmus, amelyre $\varphi|_X = f$.

4. Állítás. Ha a T félcsoport és $\emptyset \neq X \subseteq T$ részhalmaz teljesíti az előző tétel (valamilyen ekvivalens) állítását, akkor a T félcsoportot az X halmaz számossága izomorfia erejéig egyértelműen meghatározza.

5. Állítás. Minden félcsoport szabad félcsoport homomorf képe.

6. Definíció. Legyen $\mathcal{K}$ azonos típusú algebrák egy osztálya, amely zárt a részalgebra képzésre, $T \in \mathcal{K}$ és $X \subseteq T$. Ha a típus nem tartalmaz 0-változós műveleti jelet, akkor feltesszük továbbá, hogy $X \neq \emptyset$. Azt mondjuk, hogy T **szabad algebra $\mathcal{K}$ -ban az X szabad generátorrendszerrel**, ha tetszőleges $S \in \mathcal{K}$ algebrára és $f : X \rightarrow S$ leképezésre létezik egy egyértelműen meghatározott $\varphi : T \rightarrow S$ homomorfizmus, amelyre $\varphi|_X = f$.

7. Tétel. A 3. Tétel és a 4. és 5. Állítások nem csak a félcsoportok osztályára, hanem tetszőleges részalgebra képzésre zárt $\mathcal{K}$ algebra osztályra is érvényes.

8. Definíció. Tetszőleges X halmazra legyen $M_X = F_X \cup \{1\}$, ahol 1 az **üres szó**. Itt megengedjük az $X = \emptyset$ esetet is, azaz $M_\emptyset = \{1\}$. Az M_X halmaz a melléírás művelettel monoidot alkot. Az M_X monoidot szokásos X^* -gal is jelölni.

9. Állítás. M_X szabad monoid az X szabad generátorrendszerrel.

10. Definíció. Legyen X és X' azonos számosságú diszjunk halmazok, $' : X \rightarrow X'$ bijekció, amelyet kiterjesztünk $' : X \cup X' \rightarrow X \cup X'$ bijekcióvá úgy, hogy $x'' = x$ minden x elemre. Tekintsük az $M_{X \cup X'}$ szavak halmazát.

- (1) A v szó az u szónak **elemi rövidítése**, ha $v = st$ és $u = sy't$ valamely s, t szavakra és $y \in X \cup X'$ betűre.

- (2) Az u szó redukált, ha nincs elemi rövidítése.

11. Állítás.

- (1) Ha a v és w szavak az u szóból elemi rövidítések sorozatával megkaphatók, akkor létezik olyan s szó, amely mind a v , mind a w szavakból elemi rövidítések sorozatával megkapható.
- (2) Az elemi rövidítések végrehajtásának sorrendje nem számít, azaz minden u szó elemi rövidítések sorozatával egy egyértelműen meghatározott redukált szóba alakítható, amelyet $\bar{u}$ -val jelölünk.
- (3) Tetszőleges u, v szavakra $\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} = \overline{\bar{u}v}$.
- (4) Tetszőleges $y_1, \dots, y_n \in X \cup X'$ betűkre ha $y_1 \dots y_n$ redukált, akkor $y'_n \dots y'_1$ is az.

12. Definíció. Tetszőleges X halmazra legyen

$$G_X = \{ u \in M_{X \cup X'} : \bar{u} = u \},$$

azaz a redukált szavak halmaza. G_X csoportot alkot az $u \cdot v = \bar{u}\bar{v}$ és $(y_1 \dots y_n)^{-1} = y'_n \dots y'_1$ műveletekkel.

13. Tétel. G_X szabad csoport az X szabad generátorrendszerrel.

14. Állítás. G_X minden eleme egyértelmű módon írható fel $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ alakban, ahol $x_1, \dots, x_n \in X$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$, és tetszőleges i -re $x_i \neq x_{i+1}$. (Következésképpen $G_{\{x\}} \cong \mathbb{Z}$.)

15. Definíció. Tetszőleges X halmazra legyen

$$\mathbb{Z}^{(X)} = \{ f : X \rightarrow \mathbb{Z} : \text{véges sok } x \in X \text{ kivételével } xf = 0 \}.$$

A $\mathbb{Z}^{(X)}$ halmaz a szokásos, komponensenként végzett $x(f+g) = xf + xg$ és $x(-f) = -(xf)$ műveletekkel Abel-csoportot alkot.

16. Állítás. $\mathbb{Z}^{(X)}$ szabad Abel-csoport az X szabad generátorrendszerrel.