

Permutációcsoportok

(előadásvázlat, 2008. szeptember 14.)

Maróti Miklós

Ennek az előadásnak a megértéséhez a következő fogalmakat kell tudni: S_A , permutációcsoport, Cayley-tétel, S_n -ben páronként idegen ciklusokra való felbontás, transzpozíció és paritás. Már ismert permutációcsoportok: A_n , V , $GL(V)$, $SL(V)$, $Aut G$, $Inn G$.

Az előadáshoz ajánlott irodalom:

- Kiss Emil: *Bevezetés az absztrakt algebra*ba, Typotex Kiadó, 2007.
- Bálintné Szendrei Mária, Czédli Gábor, Szendrei Ágnes: *Absztrakt algebrai feladatok*, Polygon kiadó, 2005.

1. Definíció. Az $n \in \mathbb{N}$ egészre és $a \in R_n$, $b \in \mathbb{Z}_n$ elemekre definiáljuk a

$$\pi_{a,b} : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad x \mapsto xa + b$$

leképezést. Ekkor $\{\pi_{a,b} : a \in R_n, b \in \mathbb{Z}_n\}$ részcsoporthoz $S_{\mathbb{Z}_n}$ -ben, melynek neve n -edfokú lineáris csoport.

2. Definíció. A $G \leq S_A$ permutációcsoportra definiáljuk a $\sim_G$ relációt A -n:

$$a \sim_G b \iff \exists \pi \in G, a\pi = b.$$

Ekkor $\sim_G$ ekvivalencia reláció A -n, melynek osztályai a G permutációcsoport pályái. Egy pálya triviális, ha egyelemű. A nemtriviális pályák egyesítése a G tartománya. A G permutációcsoport tranzitív, ha $\sim_G$ a teljes reláció. Ha $G = \langle \pi \rangle$ ciklikus, akkor a $\sim_G$ relációt $\sim_\pi$ -vel jelöljük, és osztályait a π permutáció pályáinak nevezzük.

3. Definíció. A $G \leq S_A$ permutációcsoportra és $B \subseteq A$ részhalmazra definiáljuk a

$$G_B = \{\pi \in G : \forall b \in B, b\pi = b\}$$

halmazt, melyet a B halmaz stabilizátorának hívunk. Ha $B = \{a\}$, akkor az a elem stabilizátoráról beszélünk, melyet G_a -val jelölünk.

4. Állítás. Tetszőleges $G \leq S_A$ permutációcsoportra, $B \subseteq A$ részhalmazra és $a \in A$ elemre

- (1) $G_B \leq G$,
- (2) $G_B = \bigcap_{b \in B} G_b$,
- (3) $G_A = \{\text{id}\}$,
- (4) $[G : G_a] = |\{a\pi : \pi \in G\}| = |a/\sim_G|$.

5. Állítás. Ha $G \leq S_A$ tranzitív, akkor

- (1) a G_a ($a \in A$) részcsoporthoz egymás konjugáltjai,
- (2) $[G : G_a] = |A|$.

6. Tétel. Ha $G \leq S_A$ kommutatív és tranzitív, akkor $|G| = |A|$. (Például $[(1\ 2\ 3\ 4)]$ és V az S_4 -ben.)

7. Tétel. Legyen $G \leq S_A$ és k a G pályáinak száma. Ekkor

$$\sum_{\pi \in G} |M_\pi| = |G| \cdot (|A| - k),$$

ahol M_π a π permutáció mozgatott elemeinek halmaza. Következésképpen, G akkor és csak akkor tranzitív, ha $\sum_{\pi \in G} |M_\pi| = |G| \cdot (|A| - 1)$.

8. Definíció. A G csoport $H \leq G$ részcsoportjának jobboldali mellékosztályainak halmaza legyen

$$G//H = \{ Ha : a \in G \}.$$

Minden $g \in G$ elemre definiáljuk a

$$\beta_g : G//H \rightarrow G//H, \quad Ha \mapsto Hag$$

leképezést, amelyről megmutatható, hogy permutáció. A

$$\varphi : G \rightarrow S_{G//H}, \quad g \mapsto \beta_g$$

leképezést a **G csoport H mellékosztályainak halmazán való ábrázolásának** hívjuk.

9. Tétel (Cayley-féle reprezentációtétel általánosítása). Legyen φ a G csoport $H \leq G$ mellékosztályainak halmazán való ábrázolása. Ekkor

- (1) φ csoport-homomorfizmus,
- (2) $\text{Ker } \varphi = \bigcap_{a \in G} a^{-1}Ha$,
- (3) $G\varphi$ tranzitív.

10. Tétel. Ha a G egyszerű csoportnak van $n \geq 2$ indexű részcsoportja, akkor $|G| \mid n!$.