

Normalizátor, centralizátor, osztályegyenlet, Frobenius-felbontás

(előadásvázlat, 2008. október 16.)

Maróti Miklós

Ennek az előadásnak a megértéséhez a következő fogalmakat kell tudni: **konjugálás, normálosztó, homomorfizmus és izomfia tételek**.

Az előadáshoz ajánlott irodalom:

- Kiss Emil: *Bevezetés az absztrakt algebra*, Typotex Kiadó, 2007.
- Bálintné Szendrei Mária, Czédli Gábor, Szendrei Ágnes: *Absztrakt algebrai feladatok*, Polygon kiadó, 2005.

1. Definíció. Legyen G csoport és $S \subseteq G$ tetszőleges részhalmaz. Az S halmaz G -beli **normalizátora** az

$$N_G(S) = \{g \in G : g^{-1}Sg = S\}$$

részcsoporth. Egyelemű részhalmazra használjuk az $N_G(s) = N_G(\{s\})$ jelölést.

2. Állítás. Legyen $H \leq G$. Ekkor

- (1) $H \triangleleft G \iff N_G(H) = G$,
- (2) $N_G(H)$ az a legbővebb részcsoportha G -nek, amelyben H normálosztó,
- (3) H konjugáltjainak száma $|G : N_G(H)|$.

3. Definíció. Legyen G csoport és $S \subseteq G$ tetszőleges részhalmaz. Az S halmaz G -beli **centralizátora** az

$$C_G(S) = \{g \in G : \forall s \in S, g^{-1}sg = s\}$$

részcsoporth. Egyelemű részhalmazra használjuk a $C_G(s) = C_G(\{s\})$ jelölést.

4. Állítás. Legyen $S \subseteq G$. Ekkor

- (1) $C_G(S) = \bigcap_{s \in S} C_G(s)$,
- (2) $C_G(S) \triangleleft N_G(S)$,
- (3) $C_G(G) = Z(G)$.

5. Definíció. Tetszőleges G csoporton a **konjugáltsági reláció** az

$$a \sim b \iff \exists g \in G, g^{-1}ag = b.$$

definícióval megadott ekvivalencia reláció. Az $a \in G$ elem konjugáltsági osztálya

$$K(a) = \{g^{-1}ag : g \in G\}.$$

6. Állítás. $|K(a)| = |G : N_G(a)|$.

7. Állítás (Osztályegyenlet). Legyen G véges csoport és $a_1, \dots, a_t$ a G egynél többelemű konjugáltsági osztályainak egy reprezentánsrendszere. Ekkor

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^t |G : N_G(a_i)|.$$

8. Definíció. A G csoport $H, K \leq G$ részcsoporthai szerinti **kettős mellékosztályozásán** a $\{HaK : a \in G\}$ osztályozást értjük. Ha véges sok kettős mellékosztály van, akkor az kettős mellékosztályok egy $a_0, \dots, a_k$ reprezentánsrendszerét véve megkapjuk a G csoport **Frobenius-felbontását**:

$$G = Ha_0K \cup Ha_1K \cup \dots \cup Ha_kK.$$

Szokás az $a_0 = 1$ választás, ekkor az első kettősmellékosztály HK .

9. Állítás. A fenti Frobenius-felbontásra

$$|G : K| = \sum_{i=0}^k |H|/|a_i^{-1}Ha_i \cap K|.$$

Speciálisan, ha $H \leq K$ és $a_0 = 1$, akkor

$$|G : K| = 1 + \sum_{i=1}^k |H|/|a_i^{-1}Ha_i \cap K|.$$