

Nilpotens csoportok

(előadás vázlat, 2008. november 20.)

Maróti Miklós

Ennek az előadásnak a megértéséhez a következő fogalmakat kell tudni: **homomorfizmus és izomfia tételek**, **centrum**, **Sylow tételek**.

Az előadáshoz ajánlott irodalom:

- Kiss Emil: *Bevezetés az absztrakt algebra*, Typotex Kiadó, 2007.
- Bálintné Szendrei Mária, Czédli Gábor, Szendrei Ágnes: *Absztrakt algebrai feladatok*, Polygon kiadó, 2005.

1. Definíció. Tetszőleges G csoportra indukcióval definiáljuk a $Z_k(G)$ normálosztókat. Legyen $Z_0 = \{1\}$, $Z_1 = Z(G)$. Ha $Z_k(G)$ definiálva van, akkor legyen $Z_{k+1}(G)$ az (a megfeleltetési tétel miatt egyértelműen meghatározott) részcsoport, amelyre

$$Z_{k+1}(G)/Z_k(G) = Z(G/Z_k(G)).$$

Mivel $Z(G/Z_k(G)) \triangleleft G/Z_k(G)$, ezért $Z_{k+1}(G) \triangleleft G$. A G normálosztóiból álló

$$\{1\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \dots$$

láncot a G csoport **felső centrális láncának** hívjuk.

2. Definíció. A G csoport **nilpotens**, ha van olyan $k \in \mathbb{N}_0$, hogy $Z_k(G) = G$. A legkisebb ilyen k szám a G csoport **nilpotenciaosztálya**, és ekkor azt mondjuk, hogy G **k -adfokú** nilpotens csoport. (Megjegyzés: G pontosan akkor 0-adfokú, ha $|G| = 1$, és G pontosan akkor 1-adfokú, ha Abel-féle és nem triviális.)

3. Állítás. Minden véges p -csoport nilpotens.

4. Definíció. Az $a, b \in G$ elemek **kommutátora**: $[a; b] = a^{-1}b^{-1}ab$. A $H, K \leq G$ részcsoportok **kölcsönöskommutátorcsoportja**: $[H; K] = \{[h; k] : h \in H, k \in K\}$ (itt a generált részcsoportot kell venni). A G csoport **kommutátorcsoportja** vagy röviden **kommutátora** $[G; G]$.

5. Definíció. Tetszőleges G csoportra indukcióval definiáljuk a $\Gamma_k(G)$ részcsoportokat. $\Gamma_0(G) = G$, és legyen

$$\Gamma_{k+1}(G) = [\Gamma_k(G); G].$$

A G csoport **alsó centrális lánc** $G = \Gamma_0(G) \geq \Gamma_1(G) \geq \Gamma_2(G) \geq \dots$

6. Definíció. A $H \leq G$ részcsoport **karakterisztikus**, ha tetszőleges $\alpha \in \text{Aut } G$ automorfizmusra és $h \in H$ elemre $h\alpha \in H$. Megjegyzés: minden karakterisztikus részcsoport normálosztó.

7. Állítás. Tetszőleges G csoportra

- (1) $Z(G)$ karakterisztikus részcsoportja G -nek;
- (2) ha $N \leq H \leq G$ és N karakterisztikus részcsoport G -ben, H/N karakterisztikus részcsoport G/N -ben, akkor H karakterisztikus részcsoport G -ben;
- (3) G felső centrális láncának tagjai karakterisztikus részcsoportok.

8. Állítás. Tetszőleges G csoportra

- (1) ha $H, K \leq G$ karakterisztikus részcsoportok, akkor $[H; K]$ is az;
- (2) G alsó centrális láncának tagjai karakterisztikus részcsoportok.

9. Állítás. Legyen $H \leq G$, $N \triangleleft G$. Ekkor $HN/N \leq Z(G/N)$ pontosan akkor, ha $[H; G] \leq N$.

10. Állítás. Tetszőleges G csoport esetén $[G; G]$ a legszűkebb olyan N normálosztó G -ben, amelyre G/N Abel-féle.

11. Tétel. Nilpotens csoport alsó és felső centrális láncza azonos hosszúságú.

12. Állítás. Tetszőleges G, H csoportokra

- (1) $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$,
- (2) $Z_k(G \times H) = Z_k(G) \times Z_k(H)$,
- (3) $G \times H$ akkor és csak akkor nilpotens, ha G és H is az.

Következésképpen véges sok nilpotens csoport direkt szorzata is nilpotens.

13. Állítás. Tetszőleges G nilpotens csoportra és $H \leq G$ részcsoportra ha $Z_k(G) \leq H$, akkor $Z_{k+1}(G) \leq N_G(H)$.

14. Tétel. Tetszőleges véges G csoportra az alábbi állítások ekvivalensek:

- (1) G nilpotens,
- (2) tetszőleges $p \mid |G|$ prímre egyetlen egy p -Sylow részcsoport van G -ben,
- (3) G a Sylow részcsoportjainak direkt szorzata.

15. Tétel. Véges nilpotens csoport bármely részcsoportja, illetve faktorcsoportja nilpotens.