

**MM4122-1 CSOPORTELMÉLET GYAKORLAT**  
(2008.12.01.)

1. ISMÉTLÉS

SZEPTEMBER 1.–SZEPTEMBER 8.

**1.1. Feladat.** Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Az  $A_6$  csoportnak van 6-odrendű eleme.
- (2) Minden prímszámú rendű csoport egyszerű.
- (3)  $\mathbb{Z}$ -nek minden faktorcsoportja véges.
- (4)  $\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{40} \cong \mathbb{Z}_{120} \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$ .

**1.2. Feladat.** Rajzolja le a  $Q, D_4, A_4$  csoportok részcsoportláncjainak, illetve normálosztóláncjainak Hasse-diagramját.

**1.3. Feladat.** Adja meg az összes lehetséges homomorfizmust a  $D_4$  csoportról a  $V$  csoportra. Minden esetben határozza meg a homomorfizmus magját.

**1.4. Feladat.** Adja meg a 180-adrendű ciklikus csoport összes felbontását nemtriviális részcsoportjainak direkt szorzataként.

SZORGALMI FELADAT

**1.5. Feladat.** (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy egy csoport részcsoportláncja pontosan akkor lánc (azaz a láncban bármely két elem összehasonlítható), ha valamely  $p$  prímszámmal a csoport izomorf  $E_{p^\infty}$  egy részcsoportjával.

2. PERMUTÁCIÓCSOPORTOK  
SZEPTEMBER 8.–SZEPTEMBER 15.

**2.1. Feladat.** Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Legyen  $A$  végtelen halmaz. A véges sok triviális pályával rendelkező permutációk halmaza részcsoport  $S_A$ -ban.
- (2)  $S_3$ -nak pontosan egy tranzitív részcsoportja van.
- (3) Az  $(1\ 2)$  és  $(1\ 3)(2\ 4)$  permutációk által generált részcsoport  $S_4$ -ben tranzitív.
- (4)  $A_6$ -nak van 72-elemű részcsoportja.

**2.2. Feladat.** Döntse el, hogy tranzitívak-e az alábbi permutációcsoportok:

- (1)  $G_m = \{\pi \in S_{\mathbb{Z}} : m \mid x\pi - x \text{ minden } x \in \mathbb{Z}\text{-re}\}$ , ahol  $m \in \mathbb{N}$  előre adott;
- (2)  $H = \{\rho_g \in S_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} : g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ és } g\text{-nek nincs zérushelye}\}$ , ahol  $\rho_g \in S_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$  tetszőleges  $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ -hez  $xg \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ -et rendeli.

**2.3. Feladat.** Határozza meg az  $L_6$  és  $A_4$  csoportok összes minimális tranzitív részcsoportjait.

**2.4. Feladat.** Tekintsük a komplex számtesten értelmezhető lineáris permutációcsoportot:  $L_{\mathbb{C}} = \{\pi_{x,y} \in S_{\mathbb{C}} : a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$ , ahol  $\pi_{x,y} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $c\pi_{x,y} = cx + y$ .

- (1) Mutassa meg, hogy  $L_{\mathbb{C}}$  tranzitív.
- (2) Adjon meg  $L_{\mathbb{C}}$ -ben olyan permutációt, amelynek minden pályája végtelen, és olyan nemidentikus permutációt, amelynek minden pályája véges.
- (3) Határozza meg a véges rendű elemeket  $L_{\mathbb{C}}$ -ben.

SZORGALMI FELADATOK

**2.5. Feladat.** (3 pt.)

Jellemezze azoknak a  $\sigma \in S_A$  ( $A$  nemüres halmaz) permutációknak a pályáit, amelyeknek van négyzetgyöke, azaz amelyekhez létezik olyan  $\tau \in S_A$ , amelyre  $\tau^2 = \sigma$ .

**2.6. Feladat.** (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy az  $S_p$  ( $p$  prímszám) szimmetrikus csoportnak nincs olyan valódi tranzitív részcsoportja, amely tartalmaz transzpozíciót.

**2.7. Feladat.** (3 pt.)

Milyen  $n$  természetes számokra létezik  $Q$ -val izomorf részcsoport  $S_n$ -ben?

3. SZABAD ALGEBRÁK  
SZEPTEMBER 15.–SZEPTEMBER 22.

**3.1. Feladat.** Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Van olyan félcsoporth, amely nem áll elő szabad félcsoporth homomorf képeként.
- (2) Tetszőleges  $X$  nemüres halmaz esetén bármely algebraosztályban izomorfától eltekintve legfeljebb egy szabad algebra létezik az  $X$  halmazon.
- (3) A véges csoportok algebraosztályában tetszőleges nemüres  $X$  halmazon létezik szabad algebra.
- (4) A  $\mathbb{C}^*$  csoport szabad Abel-csoport.

**3.2. Feladat.** Adja meg az alábbi  $f$  leképezés kiterjesztését homomorfizmussá a megadott  $F$  szabad algebrára:

- (1)  $f: \{x, y, z\} \rightarrow (\mathbb{N}; \text{lk. k. t.}), xf = 6, yf = 7, zf = 15; F = \{x, y, z\}^+;$
- (2)  $f: \{x, y\} \rightarrow D_4, xf = a^2, yf = at; F = \{x, y\}^*.$

**3.3. Feladat.** Igazolja, hogy

- (1)  $\mathbb{N}$  szabad félcsoporth valamely egyelemű halmazon;
- (2)  $\mathbb{Z}$  szabad csoport valamely egyelemű halmazon;
- (3)  $\mathbb{R}^n$  szabad  $\mathbb{R}$  feletti vektortér valamely  $n$ -elemű halmazon.

Határozza meg ezekben a szabad algebrákban az összes szabad generátorrendszert.

**3.4. Feladat.** Az alábbi  $G$  csoportnak adjon meg olyan minimális, egységelemet nem tartalmazó  $X$  generátorrendszerét, valamint keressen olyan  $H$  csoportot és  $f: X \rightarrow H$  leképezést, amely nem terjeszthető ki  $\varphi: G \rightarrow H$  homomorfizmussá:

- (1)  $G = Q \times \mathbb{Z}_{15},$
- (2)  $G = [1, \sqrt{2}, i] \leq \mathbb{C},$
- (3)  $G = \mathbb{Q}^*.$

SZORGALMI FELADATOK

**3.5. Feladat.** (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy  $\mathbb{Q}$  nem szabad Abel-csoport.

**3.6. Feladat.** (3 pt.)

Álljon  $K$  azon  $\{x, y\}^*$ -beli szavakból, amelyekben az  $x$ -ek és  $y$ -ok száma megegyezik. Mutassa meg, hogy  $K$  szabad monoid.

**3.7. Feladat.** (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy a  $G_{\{x, y\}}$  szabad csoportban az  $x^i y^i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) elemek megszámlálhatóan végtelen rangú szabad csoportot generálnak.

4. DEFINIÁLÓ RELÁCIÓK  
SZEPTEMBER 22.–SZEPTEMBER 29.

**4.1. Feladat.** Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Az  $[a, b \mid a^2, b^2, (ab)^2]$  csoport homomorf képe a  $[c, d \mid c^4, d^2, (cd)^2]$  csoportnak.
- (2) Tetszőleges csoport izomorf egy  $[A \mid R]$  csoporttal, ahol mind  $A$ , mind  $R$  véges.
- (3) Ha  $A$  a  $H$  csoport részhalmaza és  $R$  olyan definiáló relációk halmaza az  $A$  halmazon amelyek teljesülnek  $H$ -ban, akkor  $H$  az  $[A \mid R]$  csoport homomorf képe.
- (4) Az  $[A \cup B \mid R \cup T]$  csoport izomorf az  $[A \mid R]$  és  $[B \mid T]$  csoportok direkt szorzatával.

**4.2. Feladat.** Milyen „ismert” csoporttal izomorfak az alábbi csoportok:

- (1)  $[a, b, c \mid a^4, b^2, c^2, (ab)^2, (bc)^2, aca^{-1}c^{-1}]$ ,
- (2)  $[a, b \mid a^2ba, ba^2]$ .

**4.3. Feladat.** Milyen „ismert” csoporttal izomorfak az alábbi csoportok:

- (1)  $[a, b \mid a^5, b^7, a^2b]$ ,
- (2)  $[a, b \mid a^4, b^5, abab^{-1}]$ .

**4.4. Feladat.** Bizonyítsa be, hogy az  $[a, b \mid abab^2a^2b^{-3}, ab^2ab^{-2}, ab^3abab^2ab^2]$  csoport izomorf  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$ -cal.

SZORGALMI FELADATOK

**4.5. Feladat.** (3 pt.)

Adja meg a  $V$ , illetve  $Q$  csoportokat definiáló relációkkal oly módon, hogy közülük egyik definiáló reláció sem hagyható el, azaz bármelyik definiáló reláció elhagyásával olyan csoport adódik, amely nem izomorf az eredetivel.

**4.6. Feladat.** (3 pt.)

Legyen  $G = [a, b \mid a^3, b^3, (ab)^2, (a^{-1}b)^3]$ .

- (1) Mutassa meg, hogy a  $G$  csoport minden eleme az  $a, a^{-1}, b$  és  $b^{-1}$  betűk felhasználásával legfeljebb három hosszúságú szóval kifejezhető.
- (2) Mutassa meg, hogy a  $G$  csoportnak legfeljebb 12 eleme van.
- (3) Határozza meg, hogy  $G$  melyik „ismert” csoporttal izomorf.

5. TOVÁBBI GYAKORLÓ FELADATOK  
SZEPTEMBER 29.–OKTÓBER 6.

**5.1. Feladat.** Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1)  $S_4$ -nek van 6-odrendű részcsoporthja.
- (2)  $\mathbb{Z} \times S_3$  szabad csoport.
- (3) Az  $[a, b \mid a^2, b^3, ab^2]$  csoportnak homomorf képe  $\mathbb{Z}_6$ .
- (4) Az  $[a, b \mid a^2, b^3, b^2aba]$  csoport izomorf  $\mathbb{Z}_6$ -tal.

**5.2. Feladat.** Legyen  $\varphi$  a  $D_4$  csoport  $\{\text{id}, a^2\}$  részcsoporthjának mellékosztályainak halmazán való Cayley ábrázolása. Adja meg az  $a, at, a^3t$  elemek képét, majd döntse el, hogy  $\varphi$  beágyazás-e.

**5.3. Feladat.** Igazolja, hogy  $\mathbb{Z}[x]$  szabad egységelemes kommutatív gyűrű.

**5.4. Feladat.** Milyen „ismert” csoporttal izomorf az  $[a, b \mid a^2, b^5, ab^3ab^3]$  csoport?

**5.5. Feladat.** Igazolja az alábbi  $G$  definiáló relációkkal megadott csoportban az adott egyenlőséget.

- (1)  $G = [a, b \mid aba^{-1}b^{-1}, ba^3, (ab)^2a^2], a = b^{-1},$
- (2)  $G = [a \mid a^{10}, a^{21}], a = 1,$
- (3)  $G = [x, y \mid xyxy], xy = yx.$

6. SZEMIDIREKT SZORZAT  
OKTÓBER 6.–OKTÓBER 13.

**6.1. Feladat.** Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Az  $S_4$  csoport előállítható egy hatod és egy negyedrendű részcsoportjainak szemidirekt szorzataként.
- (2) Léteznek olyan  $H, K$  nemkommutatív csoportok, és olyan  $\varphi: H \rightarrow \text{Aut } K$  hatás, hogy a  $H \rtimes_{\varphi} K$  csoport Abel-féle.
- (3) A  $\mathbb{Z}_6 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_3$  csoportban, ahol  $\varphi: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}_3$  az a homomorfizmus, amely  $\bar{1}$ -hez az inverzképzést rendeli, a másodrendű elemek száma három.
- (4) A  $\mathbb{Z}_4 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_3$  csoport, ahol  $\varphi: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}_3$  az a homomorfizmus, amely  $\bar{1}$ -hez az inverzképzést rendeli, izomorf a  $D_6$  csoporttal.

**6.2. Feladat.** Tekintsük azt a  $\varphi: \mathbb{Q}^* \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Q}$  leképezést, amelyre tetszőleges  $a \in \mathbb{Q}^*$  esetén az  $a\varphi$  automorfizmus az  $a$ -val való szorzás (azaz tetszőleges  $a \in \mathbb{Q}^*$ -ra és  $q \in \mathbb{Q}$ -ra  $q(a\varphi) = qa$ ).

- (1) Mutassa meg, hogy  $a\varphi$  valóban a  $\mathbb{Q}$  csoport automorfizmusa, és  $\varphi$  a  $\mathbb{Q}^*$  csoport hatása  $\mathbb{Q}$ -n.
- (2) Vizsgálja meg, hogy kommutatív-e a  $\mathbb{Q}^* \rtimes_{\varphi} \mathbb{Q}$  csoport, valamint határozza meg a véges rendű elemeket, és adja meg a rendjüket.

**6.3. Feladat.** Izomorfak-e egymással az alábbi szemidirekt szorzatok:

- (1)  $\mathbb{Z}_2 \times D_4$  és  $\mathbb{Z}_4 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_4$ , ahol  $\varphi: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}_4$  az a homomorfizmus, ami  $\bar{1}$ -hez az inverzképzést rendeli.
- (2)  $\mathbb{Z}_2 \rtimes_{\varphi} S_3$  és  $\mathbb{Z}_2 \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}_6$ , ahol  $\varphi: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut } S_3$  az a homomorfizmus, amely  $\bar{1}$ -hez az  $(1\ 2)$ -vel való konjugálást rendeli,  $\psi: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}_6$  pedig az, amely  $\bar{1}$ -hez az inverzképzést rendeli.

**6.4. Feladat.** Előállnak-e nemtriviális módon szemidirekt szorzatként az alábbi csoportok? Ha igen, akkor adjon meg ilyen előállítást, és adja meg a hozzá tartozó indukált hatást.

- (1)  $Q$ ,
- (2)  $A_4$ .

SZORGALMI FELADATOK

**6.5. Feladat.** (3 pt.)

Izomorfak-e egymással az alábbi szemidirekt szorzatok:

- (1)  $\mathbb{Z}_6 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_4$  és  $\mathbb{Z}_4 \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}_6$ , ahol  $\varphi: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}_4$  és  $\psi: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}_6$  is az a homomorfizmus, ami  $\bar{1}$ -hez az inverzképzést rendeli (rendre a megfelelő csoportokban).
- (2)  $\mathbb{Z}_2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_6$  és  $\mathbb{Z}_2 \times S_3$ , ahol  $\varphi: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}_6$  az a homomorfizmus, ami  $\bar{1}$ -hez az inverzképzést rendeli.

**6.6. Feladat.** (3 pt.)

Legyen  $H = [a]$   $n$ -edrendű ciklikus,  $K$  pedig tetszőleges csoport. Tekintsünk olyan  $\varphi, \psi: H \rightarrow \text{Aut } K$  hatásokat, amelyekre van olyan  $k \in \mathbb{Z}$ , hogy  $a\psi = (a\varphi)^k$ .

- (1) Igazolja, hogy ha  $\text{ln. k. o.}(k, n) = 1$ , akkor  $H \rtimes_{\varphi} K \cong H \rtimes_{\psi} K$ .
- (2) Vizsgálja meg, hogy érvényes-e az előző állítás megfordítása.

7. KONJUGÁLÁS, NORMALIZÁTOR, CENTRALIZÁTOR, KETTŐS  
MELLÉKOSZTÁLYOK  
OKTÓBER 20.–NOVEMBER 3.

**7.1. Feladat.** Határozza meg az  $S_4$  csoportban az  $(1\ 2\ 3\ 4)$ , illetve az  $(1\ 3)(2\ 4)$  elem normalizátorának elemszámát.

**7.2. Feladat.** Adjon meg a  $Q \times \mathbb{Z}_2$  csoportnak egy Frobenius-felbontását a  $H = [(i, \bar{1})]$  és  $K = [(-1, \bar{0})]$  részcsoporthoz szerint. A felbontás minden tagjáról állapítsa meg, hogy hány  $H$  szerinti jobb oldali és hány  $K$  szerint bal oldali mellékosztályból áll.

**7.3. Feladat.** Határozza meg a  $D_n$  csoport centrumát, tetszőleges  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$  esetén. Határozza meg a  $D_3$  és  $D_6$  csoportok konjugáltsági osztályait.

**7.4. Feladat.** Mutassa meg, hogy tetszőleges  $G$  csoport,  $H \triangleleft G$  és  $K \leq G$  esetén a  $G$  csoport  $H$  és  $K$  részcsoporthoz szerinti kettős mellékosztályok azonos elemszámúak.

SZORGALMI FELADAT

**7.5. Feladat.** (3 pt.)

Igazolja, hogy egy  $G$  véges csoport bármely  $H$  valódi részcsoporthoz létezik olyan  $a \in G \setminus H$  elem, amely egyetlen  $H$ -beli elemnek sem konjugáltja.

8. SYLOW-TÉTELEK  
NOVEMBER 3.–NOVEMBER 10.

**8.1. Feladat.** Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Ha a  $G$  csoport rendje a  $p$  szám többszöröse, akkor  $G$ -ben a  $p$ -rendű részcsoportok száma kongruens eggyel modulo  $p$ .
- (2) Ha a  $G$  csoport rendje a  $p$  prímszám többszöröse, és  $G$ -ben a  $p$ -rendű részcsoportok száma  $k$ , akkor  $G$ -ben a  $p$ -rendű elemek száma  $k(p-1)$ .
- (3)  $A_5$ -ben a 2-Sylov részcsoportok száma 15.
- (4) Van olyan véges csoport amelynek nincs Sylow-részcsoportja.

**8.2. Feladat.** Mutassa meg, hogy minden

- (1) 200-adrendű,
- (2) 30-adrendű

csoportnak van normális Sylow-részcsoportja.

**8.3. Feladat.** Mutassa meg, hogy minden

- (1) 260-adrendű,
- (2) 56-adrendű

csoportnak van normális Sylow-részcsoportja.

**8.4. Feladat.** Igazolja, hogy a  $p^2q$ -adrendű csoportokban, ahol  $p, q$  különböző prímszámok, van normális Sylow-részcsoport.

SZORGALMI FELADATOK

**8.5. Feladat.** (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy ha egy  $p^3q$ -adrendű  $G$  csoportban, ahol  $p, q$  különböző prímszámok, nincs normális Sylow-részcsoport, akkor  $p = 2$ ,  $q = 3$  és  $G$  izomorf  $S_4$ -gyel.

**8.6. Feladat.** (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy nincs 120-adrendű egyszerű csoport.

**8.7. Feladat.** (3 pt.)

Határozza meg izomorfiától eltekintve az összes 12-edrendű csoportot.

**8.8. Feladat.** (3 pt.)

Egy véges csoportot *Frobenius-csoportnak* hívunk, ha van olyan  $H$  nemtriviális részcsoportja, amelyre  $H \cap g^{-1}Hg = \{1\}$  teljesül minden  $g \in G \setminus H$  elem esetén. Tegyük fel, hogy  $H$  ilyen részcsoport a  $G$  véges csoportban. Bizonyítsa be, hogy

- (1)  $\ln. k. o. (|H|, [G : H]) = 1$ ,
- (2) ha  $[G : H]$   $p$ -hatvány valamely  $p$  prímszámra, akkor  $G$   $p$ -SyLOW-részcsoportja normálosztó  $G$ -ben.

9. TOVÁBBI GYAKORLÓ FELADATOK  
NOVEMBER 10.–NOVEMBER 17.

**9.1. Feladat.** Adja meg következő csoportok összes Sylow-részcsoportját.

- (1)  $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$ ,
- (2)  $A_4$ ,
- (3)  $D_5$ .

**9.2. Feladat.** Adja meg következő csoportok összes Sylow-részcsoportját.

- (1)  $\mathbb{Z}_{12}$ ,
- (2)  $D_6$ ,
- (3)  $L_5$ .

**9.3. Feladat.** Adjon meg két különböző  $\varphi, \psi : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}_7$  nemtriviális hatást. Majd mutassa meg, hogy  $\mathbb{Z}_3 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}_7$ , és adja meg ezt az izomorfizmust.

**9.4. Feladat.** Mutassa meg, hogy minden 45-öndrendű csoport kommutatív.

SZORGALMI FELADATOK

**9.5. Feladat.** (2 pt.)

Keressen olyan csoportot, amelynek van 2-részcsoportja, de ezek közül tartalmazásra nézve nincsen maximális.

**9.6. Feladat.** (2 pt.)

Legyen  $G$  véges csoport,  $N$  normálosztó,  $P$  pedig Sylow-részcsoport  $G$ -ben. Igazolja, hogy  $N \cap P$  Sylow-részcsoport  $N$ -ben.

**9.7. Feladat.** (2 pt.)

Legyen  $N \triangleleft G$  és  $P$  a véges  $N$  csoport egy Sylow-részcsoportja. Mutassuk meg, hogy  $G = HN_G(P)$ .

10. NILPOTENS CSOPORTOK  
NOVEMBER 17.–NOVEMBER 24.

**10.1. Feladat.** Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) A  $D_6$  csoport nilpotens.
- (2) Ha  $G, H$  nilpotens csoportok és  $\varphi: G \rightarrow H$  tetszőleges hatás, akkor a  $G \rtimes_{\varphi} H$  csoport is nilpotens.
- (3) Nemkommutatív véges csoport pontosan akkor nilpotens, ha prímszámú rendű.
- (4) A  $Q$  csoport minden részcsoportja karakterisztikus.

**10.2. Feladat.** Határozza meg a

- (1)  $Q$ ,
- (2)  $D_8$

csoportok alsó és felső centrális láncát.

**10.3. Feladat.** Döntse el, hogy nilpotensek-e az alábbi csoportok:

- (1)  $S_3 \times \mathbb{Q}$ ,
- (2)  $(\mathbb{Z}; \circ)$ , ahol  $k \circ m = k + (-1)^k m$  ( $k, m \in \mathbb{Z}$ ),
- (3)  $\mathbb{Z}_8 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_4$ , ahol  $\varphi: \mathbb{Z}_8 \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}_4$  az a homomorfizmus, amely  $\bar{1}$ -hez az inverzképzést rendeli.

**10.4. Feladat.** Adja meg a következő csoportok kommutátorcsoportját:

- (1)  $D_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ ),
- (2)  $S_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ),
- (3)  $L_5$ .

SZORGALMI FELADAT

**10.5. Feladat.** (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy tetszőleges nilpotens csoport minden részcsoportja és faktorcsoportja is nilpotens.

11. FELOLDHATÓ CSOPORTOK  
DECEMBER 1.–DECEMBER 8.

**11.1. Feladat.** Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Tetszőleges  $G$  csoport és  $N$  normálosztója esetén, a  $[G; G]/[N; N]$  faktorcsoport izomorf a  $[G/N; G/N]$  csoporttal.
- (2) Feloldható csoport feloldható csoporttal vett direkt szorzata feloldható.
- (3) Az  $A_n$  csoport feloldható. ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 5$ )
- (4) Tetszőleges Abel-csoportnak van kompozíciólánca.

**11.2. Feladat.** Határozza meg az alábbi csoportok kommutátorlancát:

- (1)  $\mathbb{Z}_n \times S_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),
- (2)  $(\mathbb{Z}; \circ)$ , ahol  $k \circ m = k + (-1)^k m$  ( $k, m \in \mathbb{Z}$ ),
- (3)  $D_n$ .

**11.3. Feladat.** Döntse el, hogy feloldhatók-e az alábbi csoportok:

- (1) tetszőleges  $pq$ -rendű csoport, ahol  $p, q$  különböző prímszámok,
- (2)  $L_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ ),

**11.4. Feladat.** Keresse meg az alábbi csoportok összes kompozíciólancát:

- (1)  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{18}$ ,
- (2)  $\mathbb{R}$ ,
- (3)  $D_4$ .

SZORGALMI FELADATOK

**11.5. Feladat.** (3 pt.)

Legyen  $G$  véges nilpotens csoport,  $H$  pedig tetszőleges részcsoportja. Mutassa meg hogy  $G$ -nek van  $H$ -t tartalmazó kompozíciólánca.

**11.6. Feladat.** (3 pt.)

Legyen  $G$  véges  $p$ -csoport. Bizonyítsa be, hogy

- (1) ha  $N$  minimális normálosztó  $G$ -ben, akkor  $N \subseteq Z(G)$  és  $|N| = p$ ,
- (2)  $G$ -nek van normálosztóiból álló kompozíciólánca,
- (3) ha  $N$  olyan normálosztó  $G$ -ben, amelyre  $|N| = p^i$ , akkor  $N \subseteq Z_i(G)$ .