

MBN511G: ALGEBRA ÉS ALKALMAZÁSAI GYAKORLAT

1. ISMÉTLÉS: BILINEÁRIS ÉS KVADRATIKUS ALAKOK

1.1. Feladat. (2 pont.)

Legyen a $\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ bilineáris alak mátrixa az $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ bázisban

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg $\varphi((0, 1, 2), (2, 1, 0))$ értékét.

1.2. Feladat. (2 pont.)

Legyen $h: V \times W \rightarrow K$ tetszőleges bilineáris alak, s tekintsünk tetszőleges $\phi: V \rightarrow V$ és $\psi: W \rightarrow W$ bijektív lineáris transzformációkat. Mutassuk meg, hogy

$$g: V \times W \rightarrow K, \quad g(v, w) = h(v\phi, w\psi)$$

szintén bilineáris alak, s g rangja megegyezik h rangjával.

1.3. Feladat. (2 pont.)

Igazoljuk, hogy ha V, W különböző véges dimenziós vektorterek K fölött, akkor bármely $h: V \times W \rightarrow K$ bilineáris alakhoz megadható V -nek illetve W -nek egy-egy bázisa oly módon, hogy h mátrixa ezekben a bázisokban diagonális, s a főátlójában csak 0, 1 szerepel.

1.4. Feladat. (2 pont. előadta: Miklós)

Legyenek V, W véges dimenziós vektorterek K fölött, s legyen $h: V \times W \rightarrow K$ r rangú bilineáris alak. Igazoljuk, hogy

- (1) $V_0 = \{v \in V: h(v, w) = 0 \text{ minden } w \in W\text{-re}\}$ altér V -ben, és
- (2) $\dim V_0 = \dim V - r$.

1.5. Feladat. (3 pont.)

Legyen V tetszőleges vektortér, l_1, l_2 lineáris funkcionálok V -n. Mutassuk meg, hogy ha a $h(u, v) = l_1(u)l_2(v)$ bilineáris alak szimmetrikus, akkor van olyan l lineáris funkcionál V -n, továbbá olyan $\lambda \neq 0$ skalár, amelyre $h(u, v) = \lambda l(u)l(v)$.

1.6. Feladat. (3 pont.)

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött, h pedig tetszőleges bilineáris alak V -n. Bizonyítsuk be, hogy h -nak akkor és csak akkor 1 a rangja, ha V valamely bázisában h mátrixa

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ha } h \text{ szimmetrikus,}$$

és

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ha } h \text{ nem szimmetrikus.}$$

1.7. Feladat. (2 pont.)

Adott a V vektortéren egy kvadratikus alak a standard bázisban felírt A mátrixával, illetve f koordinátás alakjában:

- (1) $V = \mathbb{Q}^3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
- (2) $V = \mathbb{R}^3$, $f = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2$;
- (3) $V = \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;
- (4) $V = \mathbb{Q}^3$, $f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;

- A koordinátás alakban megadott kvadratikus alaknak írja fel a mátrixát, a mátrixával megadottat pedig írja fel koordinátás alakban.
- Hozza kanonikus alakra a kvadratikus alakot, és adjon meg olyan bázist V -ben, amelyben ez a kvadratikus alak koordinátás alakja.
- Ha a kvadratikus alak valós, akkor adja meg a normálalakját is, és állapítsa meg, hogy definitesség szempontjából melyik csoportba tartozik.

1.8. Feladat. (2 pont.)

Az adott A_i ($i = 0, 1, \dots, 4$) valós mátrixhoz keressen olyan D_i diagonális mátrixot és olyan Q_i nemelfajuló mátrixot, amelyre $A_i = Q_i D_i Q_i^T$:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. MÁTRIXOK NORMÁLALAKJA

2.1. Feladat. (2 pont, válasszon kettőt a négy feladat közül. előadta: Balázs és Tamás.)

Hozzuk kanonikus alakra az alábbi R gyűrű feletti A mátrixokat:

- (1) $R = \mathbb{Z}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;
- (2) $R = \mathbb{Z}[i]$, $A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 1+i & 0 \\ 0 & 3+i \end{pmatrix}$;

$$(3) \ R = \mathbb{Q}[x], \ A = \begin{pmatrix} x^3 - x & 2x^2 \\ x^2 + 5x & 3x \end{pmatrix}.$$

$$(4) \ R = \mathbb{R}[x], \ A = \begin{pmatrix} 2-x & 3 & 7 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 1-x \end{pmatrix}.$$

2.2. Feladat. (2 pont. előadta: László)

Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket az R gyűrű felett.

$$(1) \ R = \mathbb{Z}, \ x_1 - 3x_2 = 7, \ x_2 - 5x_3 = 0, \ x_1 + x_2 - x_3 = 2;$$

$$(2) \ R = \mathbb{Q}[t], \ t^2x_1 - t + x_2 - 2x_1 + 2 = t^2, \ t^2 - x_2 - tx_2 + tx_1 = 0;$$

2.3. Feladat. (2 pont. előadta: Lívía)

A K test feletti A mátrixra számítsa ki az $A - xE$ mátrix kanonikus alakját, majd ebből határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$$(1) \ K = \mathbb{R}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(2) \ K = \mathbb{Z}_3, \ A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

2.4. Feladat. (3 pont.)

Legyen R egy főideálgyűrű tetszőleges faktorgyűrűje. Definiálja az R feletti mátrixok kanonikus alakját, és mutassa meg, hogy minden R feletti $m \times n$ -es mátrix ekvivalens egy asszociáltságtól eltekintve egyértelműen meghatározott kanonikus alakú mátrixszal.

2.5. Feladat. (3 pont.)

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ mátrixra és $\bar{b} \in \mathbb{Z}^m$ vektorra az $A\bar{x} = \bar{b}$ egyenletnek akkor és csak akkor van $\mathbb{Z}^n$ -beli megoldása, ha tetszőleges pozitív k egészre az $A\bar{x} = \bar{b}$ egyenletnek van megoldása modulo k .

2.6. Feladat. (2 pont.)

Legyen R tetszőleges euklideszi gyűrű, és $a, b, u, v \in R$ elemek úgy, hogy $au + bv = \text{lko}(a, b)$. Adjon meg olyan invertálható P mátrixot, amelyre az $(a \ b)P$ mátrix az $(a \ b)$ mátrix kanonikus alakja.

3. MODULUSOK

3.1. Feladat. (2 pont.)

Legyen R tetszőleges gyűrű. Konstruáljunk olyan R^1 egységelemes gyűrűt—egységelemét jelölje 1 ($1 \notin R$)—amelynek R részgyűrűje, továbbá fennállnak a következők:

$$(1) \ R^1\text{-et generálja } R \cup \{1\};$$

$$(2) \ \text{minden } R\text{-modulus (az } R\text{-en kívüli elemekkel való szorzás megfelelő értelmezésével) } R^1\text{-modulussá tehető.}$$

3.2. Feladat. (2 pont.)

Mutassuk meg, hogy ha R kommutatív egységelemes gyűrű, ${}_RA$ pedig unitér R -modulus, akkor ${}_RA$ izomorf a $\text{Hom}_R(R, A)$ R -modulussal.

3.3. Feladat. (2 pont. előadta: Tamás)

Bizonyítsuk be, hogy minden gyűrű beágyazható egy alkalmasan választott Abel-csoport endomorfizmusgyűrűjébe.

3.4. Feladat. (2 pont.)

Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be az izomorfiatételeket R -modulusokra.

3.5. Feladat. (2 pont. előadta: Lívía)

Igazoljuk, hogy egy M R -modulus tetszőleges S, T, U részmodulusaira az $S \cap (T + U) = (S \cap T) + U$ egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $S \supseteq U$.

3.6. Feladat. (2 pont. közösen megbeszéltük)

Rajzolja fel az $M = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ és $N = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ modulusok összes részmodulusa által alkotott részbenrendezés Hasse-diagramját.

3.7. Feladat. (2 pont. előadta: Tamás és Lívía)

Legyen M egy D főideálgűrű feletti modulus, $a \in M$. Az

$$\text{Ann}_D[a] = \{d \in D : da = 0\} \triangleleft D$$

ideál generátorelemét (amely asszociáltságig egyértelműen meghatározott), az a elem rendjének nevezzük és $o(a)$ -val jelöljük. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a, b \in M$ és $d \in D$ elemekre

- (1) $da = 0 \iff o(a) \mid d$,
- (2) $o(da) \mid o(a)$,
- (3) $d \neq 0 \implies o(da) \sim o(a)/\text{lko}(d, o(a))$, és
- (4) $\text{lko}(o(a), o(b)) \sim 1 \implies o(a+b) \sim o(a)o(b)$.

3.8. Feladat. (2 pont.)

Bizonyítsuk be, hogy egy M modulus valamely N részmodulusa akkor és csak akkor direkt összeadandó, ha létezik az $\iota : N \rightarrow M$ beágyazáshoz olyan $\pi : M \rightarrow N$ homomorfizmus, amelyre $\iota\pi = \text{id}_N$.

3.9. Feladat. (2 pont.)

Legyen R egységelemes gyűrű és M egy R -modulus. Bizonyítsuk be, hogy ha $R = I_1 \oplus \dots \oplus I_n$, akkor $M = I_1M \oplus \dots \oplus I_nM$.

4. FŐIDEÁLGYŰRŰ FELETTI VÉGESEN GENERÁLT MODULUSOK ALAPTÉTELE**4.1. Feladat.** (3 pont.)

Tudjuk, hogy tetszőleges főideálgűrű feletti n -rangú szabad modulus minden részmodulusa is szabad, amelynek van legfeljebb n -elemű bázisa.

- (1) Igaz-e az állítás végtelen rangú szabad modulusra (ezeknek van olyan generátorrendszere, amely felett minden elem egyértelműen írható fel).
- (2) Keressen olyan integritástartomány feletti szabad modulust, amelynek van olyan részmodulusa, amely nem szabad.

4.2. Feladat. (2 pont.)

Határozza meg a $\mathbb{Z}$ gyűrű feletti M szabad modulus N részmodulusának szabad generátorrendszerét.

- (1) $M = \mathbb{Z}^2$, $N = [(10, 3), (4, 1), (6, 8)]$.
- (2) $M = \mathbb{Z}^3$, $N = [(-12, 6, 8), (8, 9, 2), (6, 0, 6), (2, 4, 8)]$.
- (3) $M = \mathbb{Z}^3$, $N = [(1, 1, 1), (1, 2, 4), (1, 3, 9), (1, 4, 16)]$.

4.3. Feladat. (3 pont. előadta: (1) Livia)

Tekintse a $\mathbb{Z}$ gyűrű feletti alábbi M modulusokat, és bontsa primér részmodulusainak direkt összegére.

- (1) $M = [(\overline{8}, \overline{3}), (\overline{4}, \overline{5})] \leq \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_8$,
- (2) $M = [(\overline{8}, \overline{3}), (\overline{4}, \overline{5})] \leq \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{12}$,
- (3) $M = [(\overline{8}, \overline{3}), (\overline{4}, \overline{5})] \leq \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{15}$.

4.4. Feladat. (3 pont.)

Főideálgűrű feletti bármely torziómodulus primér részmodulusainak (esetleg végtelen soknak) a direkt összege.

4.5. Feladat. (2 pont. előadta: Livia)

Tekintse a $\mathbb{Z}$ gyűrű feletti M modulust és adja meg az $\text{Ann}_M(2)$ és $\text{Ann}_M(4)$ részmodulusok kanonikus alakját.

- (1) $M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$,
- (2) $M = \mathbb{Z}_{12}$,
- (3) $M = \mathbb{Z}_8$.

4.6. Feladat. (2 pont.)

Legyen M az R főideálgűrű feletti végesen generált modulus. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $\varphi : R^n \rightarrow M$ szürjektív homomorfizmus és olyan $A \in R^{p \times n}$ kanonikus alakú mátrix, hogy A sorai a $\ker \varphi \leq R^n$ részmodulust generálják.

4.7. Feladat. (2 pont. előadta: Tamás)

Melyik az a legnagyobb Abel-csoport, amelyet az m_1, m_2 elemek generálnak és amelyben az $2m_1 + 4m_2 = 0$ és $-2m_1 + 6m_2 = 0$ egyenlőségek teljesülnek.

4.8. Feladat. (2 pont.)

Határozza meg a

$$\varphi : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

lineáris leképezés magjának egy szabad generátorrendszerét.

5. POLINOMGYŰRŰ FELETTI MODULUSOK

Legyen V a T test feletti véges dimenziós vektortér, φ a V vektortér lineáris transzformációja, és tekintsük V -t mint $T[x]$ feletti jobbmodulust a szokásos módon, azaz $v \cdot f = v(f(\varphi))$.

5.1. Feladat. (2 pont. előadta: László)

Mutassuk meg, hogy ha $V = [v]$ ciklikus modulus és $o(v) = p^k$ ahol $p \in T[x]$ m -edfokú irreducibilis polinom, akkor V -nek az alábbi mk vektor

$$\begin{array}{cccccc} v, & vx, & vx^2, & \dots & vx^{m-1}, \\ vp, & vpx, & vpx^2, & \dots & vpx^{m-1}, \\ vp^2, & vp^2x, & vp^2x^2, & \dots & vp^2x^{m-1}, \\ & & & \vdots & \\ vp^{k-1}, & vp^{k-1}x, & vp^{k-1}x^2, & \dots & vp^{k-1}x^{m-1} \end{array}$$

vektortéri bázisa.

5.2. Feladat. Vegyük a V vektortérnek egy $e_1, \dots, e_n$ (vektortéri) bázisát, és legyen A a φ leképezés mátrixa. Tekintsük továbbá a $\psi : (T[x])^n \rightarrow V$, $(f_1, \dots, f_n) \mapsto e_1 f_1 + \dots + e_n f_n$ kanonikus modulus homomorfizmust.

- (1) Mutassuk meg, hogy ψ szürjektív.
- (2) Mutassuk meg, hogy az $E - Ax \in (T[x])^{n \times n}$ mátrix sorai a $\ker \psi \leq (T[x])^n$ részmodulusban vannak.
- (3) Mutassuk meg, hogy az $E - Ax$ mátrix sorai a $\ker \psi$ részmodulust generálják.

6. JORDAN-FÉLE NORMÁLALAK

6.1. Feladat. (2 pont. előadta Balázs)

Határozzuk meg az összes olyan $\mathbb{Q}$ fölötti Jordan-mátrixot, amely

- (1) 4×4 -es és minimálpolinomja $(x+1)^2$;
- (2) 6×6 -os és minimálpolinomja $(x+2)^2(x-1)$;
- (3) 7×7 -es és minimálpolinomja $(x+1)^2(x-3)$;
- (4) 6×6 -os és karakterisztikus polinomja $(x^4-1)(x^2-1)$.

6.2. Feladat. (2 pont. előadta Balázs)

Határozzuk meg az alábbi mátrixok közül háromnak a Jordan-normálalakját a komplex számtest fölött:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \alpha & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{ha } a_{12}, a_{23}, \dots, a_{n-1,n} \neq 0, \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}^2 \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{2n-2} & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2n-1} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & b_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b_{2n-2} & \dots & a_{2n-2} & 0 & 0 \\ 0 & b_{2n-1} & 0 & \dots & 0 & a_{2n-1} & 0 \\ b_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2n} \end{pmatrix} \quad (8)$$

6.3. Feladat. (2 pont. előadta Balázs)

Tekintsünk tetszőleges $A \in K_{m \times m}$ és $B \in K_{n \times n}$ mátrixokat.

- (1) Igazoljuk, hogy ha A Jordan-féle normálalakja M , B -é pedig N , akkor az $(m+n) \times (m+n)$ típusú

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad (*)$$

mátrix Jordan-normálalakja

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}.$$

- (2) Hogyan kapható meg a $(*)$ -gal jelzett mátrix minimálpolinomja A , illetve B minimálpolinomjából?

6.4. Feladat. (2 pont.)

Igazoljuk, hogy minden négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához.

6.5. Feladat. (2 pont. előadta Livia és közösen megbeszéltük)

Legyen $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ és $\alpha \in \mathbb{C}$.

- (1) Mutassuk meg, hogy ha az A mátrix Jordan-normálalakja M , akkor az $A + \alpha E$ mátrixé $M + \alpha E$.
- (2) Határozzuk meg az (a)-beli észrevétel felhasználásával az

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

mátrix Jordan-normálalakját.

6.6. Feladat. (2 pont.)

Bizonyítandó, hogy tetszőleges $A, B \in \mathbb{Q}_{n \times n}$ mátrixokra ekvivalens az alábbi két feltétel:

- (1) van olyan $Q \in \mathbb{Q}_{n \times n}$ nemelfajuló mátrix, melyre $Q^{-1}AQ = B$;
- (2) van olyan $C \in \mathbb{C}_{n \times n}$ nemelfajuló mátrix, melyre $C^{-1}AC = B$.

6.7. Feladat. (2 pont.)

Legyen K tetszőleges test, $A \in K_{n \times n}$ pedig olyan mátrix, amelyre

- (1) $A^2 = A$;
- (2) $A^2 = E$.

Határozzuk meg A Jordan-normálalakját, s ez alapján adjuk meg az A -hoz tartozó lineáris transzformáció(k) geometriai jelentését.

6.8. Feladat. (2 pont.)

Legyen K tetszőleges test, $A \in K_{n \times n}$ pedig olyan mátrix, amelynek valamely hatványa a 0 mátrix.

- (1) Igazoljuk, hogy $A^n = 0$.
- (2) Írjuk le, milyen lehet A Jordan-normálalakja.

6.9. Feladat. (2 pont. előadta Balázs)

Mutassuk meg, hogy ha az $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ mátrix valamely hatványa az egység-mátrix, akkor A hasonló egy diagonális mátrixhoz, melynek főátlójában egység-gyökök állnak.

6.10. Feladat. (2 pont. előadta Balázs)

Igazoljuk, hogy bármely test fölött tetszőleges $n \times n$ -es A mátrixra igaz, hogy A karakterisztikus polinomja osztja A minimálpolinomjának n -edik hatványát.

6.11. Feladat. (3 pont.)

Legyen K tetszőleges test. Bizonyítsuk be, hogy bármely $A \in K_{n \times n}$ mátrixra ekvivalens az alábbi két feltétel:

(1) A hasonló egy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in K_{n \times n}$$

alakú mátrixhoz;

(2) A karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja (asszociáltságtól eltekintve) megegyezik.

6.12. Feladat. (2 pont.)

Legyen $A \in K_{n \times n}$ tetszőleges mátrix, s A -nak a K test fölötti minimálpolinomját jelölje μ_A . Mutassuk meg, hogy A akkor és csak akkor hasonló egy diagonális mátrixhoz, ha μ_A elsőfokú polinomok szorzatára bomlik K fölött, s μ_A -nak minden gyöke egyszeres.

6.13. Feladat. (3 pont.)

Mutassuk meg, hogy minden komplex négyzetes mátrix előáll két szimmetrikus mátrix szorzataként.

6.14. Feladat. (2 pont.)

Legyen K tetszőleges test, s legyen $A, B \in K_{n \times n}$.

- (1) Bizonyítsuk be, hogy $K = \mathbb{C}$ esetén AB és BA Jordan-féle normálalakja csak a 0 sajátértékhez tartozó Jordan-blokkokban térhet el egymástól.
- (2) Fogalmazzuk meg, és igazoljuk az (a) állítás analogonját tetszőleges K test fölötti négyzetes mátrixokra.

7. EUKLIDESZI TEREK

7.1. Feladat. (2 pont. előadta Balázs)

Igaz-e, hogy $\mathbb{R}^2$ euklideszi tér a következő belső szorzattal: $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - y_1x_2 - x_1y_2 + 3y_1y_2$?

7.2. Feladat. (2 pont. előadta Tamás)

$\mathbb{R}^3$ -ben mi $(1, 2, 3)$ merőleges vetülete $[(1, 0, 1)]$ -re?

7.3. Feladat. (2 pont. előadta László)

Igazoljuk, hogy tetszőleges euklideszi tér bármely u, v vektoraira

- (1) $\|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$;
- (2) $2\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$;
- (3) ha $\|u\| = \|v\|$, akkor $u - v \perp u + v$.

7.4. Feladat. (2 pont. előadta Livia)

Adjon meg ortonormált bázist a négydimenziós euklideszi tér megadott altereiben:

- (1) $U = [(1, 1, 1, 1), (3, -1, 3, -1), (2, 3, -2, -1)]$,
- (2) $V = [(1, 2, 1, 3), (4, 1, 1, 1), (3, 1, 1, 0)]$,
- (3) $W = \{(a, b, c, d) : 3a - b - c + d = 0, a + 2b - c - d = 0\}$

7.5. Feladat. (2 pont.)

Legyen $u_1, \dots, u_k$ lineárisan független vektorrendszer egy euklideszi térben, $e_1, \dots, e_k$ pedig az az ortogonális vektorrendszer, amelyet $u_1, \dots, u_k$ -ből a Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárással (normálás nélkül) kapunk. (Azaz e_i -t $u_i + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{i-1} e_{i-1}$ alakban keressük.) Ekkor minden i -re ($1 \leq i \leq k$) $\|e_i\| \leq \|u_i\|$. Mikor van olyan $i > 1$, hogy $\|e_i\| = \|u_i\|$?

7.6. Feladat. (2 pont. előadta Tamás)

Legyen V euklideszi tér, U altér V -nek, $v \in V$. Mutassa meg, hogy $U + v = \{u + v : u \in U\}$ pontosan egy U -ra merőleges elemet tartalmaz, és ez az elem éppen $U + v$ legrövidebb eleme.

7.7. Feladat. (2 pont. előadta László)

Milyen szöget zár be az n -dimenziós kocka testátlója a lapjaival?

7.8. Feladat. (2 pont.)

Bizonyítsa, hogy euklideszi tér belsőszorzatörző transzformációja szükségképpen lineáris.

7.9. Feladat. (2 pont.)

Mutassa meg, hogy véges dimenziós euklideszi tér ϕ lineáris transzformációjára az (a) ϕ önadjungált, (b) ϕ ortogonális, (c) $\phi^2 = \text{id}$ feltételek bármelyike következik a másik kettőből. Mely ϕ -k teljesítik mindhárom feltételt?

7.10. Feladat. (2 pont. előadta László)

Hozza főtengety-transzformációval kanonikus alakra az $f = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2$ kvadratikus alakot, és adjon meg olyan ortonormált bázist $\mathbb{R}^3$ -ben, amelyben f kanonikus alakú.

7.11. Feladat. (2 pont.)

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Adjon meg olyan 3×3 -as valós ortogonális Q mátrixot, melyre $D = QAQ^{-1}$ diagonális alakú.

8. TESTEK (CSAK A ZH UTÁNRA)

8.1. Feladat. (2 pont. közösen megbeszéltük)

Tekintsük a $\mathbb{Q}(u)|\mathbb{Q}$ testbővítést, ahol u az $f = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ egyik komplex gyöke. Mutassa meg, hogy f irreducibilis, és fejezze ki az $u^4, u^5, 3u^5 - u^4 + 2, (u+1)^{-1}, (u^2 - 6u + 8)^{-1}$ elemeket a $\mathbb{Q}(u)$ test $\mathbb{Q}$ feletti $\{1, u, u^2\}$ bázisában.

8.2. Feladat. (2 pont.)

Mutassa meg, ha $L|K$ tetszőleges testbővítés, és $u \in L$ páratlan fokú algebrai elem K fölött, akkor u^2 is az, és $K(u) = K(u^2)$.

8.3. Feladat. (2 pont.)

Legyen $L|K$ egy testbővítés, s tegyük fel, hogy $a \in L$ transzcendens K felett, és $f \in K[x]$ nemkonstans polinom. Igazolja, hogy ekkor $f(a)$ is transzcendens K felett, és minden olyan $b \in L$ elem, amelyre $f(b) = a$ szintén transzcendens K felett.

8.4. Feladat. (2 pont. közösen megbeszéltük)

Döntse el, hogy irreducibilis-e az alábbi polinom a megadott polinomgyűrűben:

- (1) $x^3 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$,
- (2) $x^4 + x^3 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$,
- (3) $x^5 - \bar{2}x^3 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$.

8.5. Feladat. (2 pont. közösen megbeszéltük)

Legyen T véges test. Adja meg T elemeinek összegét.

8.6. Feladat. (2 pont. közösen megbeszéltük)

Határozza meg a megadott elemek multiplikatív rendjét az alábbi véges testekben, és döntse el, hogy ezek közül melyek ciklikus generátorok, és melyek nem.

- (1) $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x + \bar{1} \rangle$; $\overline{x + \bar{1}}$, $\overline{x^2 + x}$;
- (2) $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + \bar{1} \rangle$; $\overline{x}$, $\overline{x - \bar{1}}$;
- (3) $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 + \bar{2} \rangle$; $\overline{x + \bar{1}}$, $\overline{2x + \bar{1}}$.

8.7. Feladat. (2 pont. közösen megbeszéltük)

Legyen T véges test. Mely pozitív egész k számokra teljesül, hogy az $x^k - a$ polinomnak van gyöke T -ben az összes $a \in T$ -re?

8.8. Feladat. (2 pont. félig megbeszéltük)

Határozza meg a $\mathbb{Q}(\sqrt[8]{1 + \sqrt{2}})|\mathbb{Q}$ testbővítés fokát és adja meg a $\sqrt[8]{1 + \sqrt{2}}$ szám $\mathbb{Q}$ fölötti minimálpolinomját.

8.9. Feladat. (2 pont.)

Keresse meg a következő testekben a megadott elemek minimálpolinomját:

- (1) $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x + \bar{1} \rangle$ -ban $\overline{x^2 + x}$, $\overline{x^3 + \bar{1}}$;
- (2) $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^4 + x^2 + x + \bar{1} \rangle$ -ban $\overline{x - \bar{1}}$, $\overline{x^3 + x^2 + x}$;
- (3) $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 - \bar{2}x - \bar{2} \rangle$ -ban $\overline{x - \bar{1}}$, $\overline{x + \bar{2}}$.

8.10. Feladat. (2 pont.)

Mutassa meg, hogy ha $[L : K]$ prímszám, akkor az $L|K$ testbővítés egyszerű.