

Kompozícióláncok

(előadásvázlat, 2008. december 4.)

Maróti Miklós

Ennek az előadásnak a megértéséhez a következő fogalmakat kell tudni: **homomorfizmus és izomfia tételek, feloldható csoportok**.

Az előadáshoz ajánlott irodalom:

- Kiss Emil: *Bevezetés az absztrakt algebra*, Typotex Kiadó, 2007.
- Bálintné Szendrei Mária, Czédli Gábor, Szendrei Ágnes: *Absztrakt algebrai feladatok*, Polygon kiadó, 2005.

1. Definíció. A $G = N_0 \triangleright N_1 \triangleright N_2 \triangleright \dots \triangleright N_s = \{1\}$ normállánc **valódi**, ha $N_0 > N_1 > \dots > N_s$.
A

$$G = N_0 \triangleright N_1 \triangleright N_2 \triangleright \dots \triangleright N_i \triangleright M \triangleright N_{i+1} \triangleright \dots \triangleright N_s = \{1\}$$

finomítás **valódi**, ha $N_i > M > N_{i+1}$. **Kompozícióláncnak** nevezzük az olyan valódi normálláncot, amelynek nincs valódi finomítása.

2. Állítás. Egy normállánc akkor és csak akkor kompozíciólánc, ha faktoraik egyszerűek.

3. Állítás. Minden véges csoportnak van kompozíciólánca.

4. Tétel (Zassenhaus-lemma). Ha $G \geq H \triangleright H' \geq \{1\}$ és $G \geq K \triangleright K' \geq \{1\}$, akkor

$$H'(H \cap K)/H'(H \cap K') \cong (H \cap K)/(H \cap K')(H' \cap K) \cong K'(H \cap K)/K'(H' \cap K).$$

5. Tétel (Schreier-Zassenhaus). Egy csoport bármely két normálláncának van egy-egy olyan finomítása, amelyek azonos hosszúságúak és faktoraik izomorfak.

6. Következmény (Jordan-Holder tétel). Ha egy csoportnak van kompozíciólánca, akkor bármely két kompozíciólánca azonos hosszúságú és faktoraik izomorfak.