

Feloldható csoportok

(előadás vázlat, 2008. november 20.)

Maróti Miklós

Ennek az előadásnak a megértéséhez a következő fogalmakat kell tudni: **homomorfizmus és izomfia tételek, centrum, feloldható csoportok.**

Az előadáshoz ajánlott irodalom:

- Kiss Emil: *Bevezetés az absztrakt algebra*, Typotex Kiadó, 2007.
- Bálintné Szendrei Mária, Czédli Gábor, Szendrei Ágnes: *Absztrakt algebrai feladatok*, Polygon kiadó, 2005.

1. Definíció. A G csoport $N_0, \dots, N_s$ részcsoportjai **normálláncot** alkotnak, ha

$$G = N_0 \triangleright N_1 \triangleright N_2 \triangleright \dots \triangleright N_s = \{1\}$$

(nem feltétlenül $N_i \triangleleft G$). Az N_i/N_{i+1} faktorcsoporthoz a **normállánc faktorainak** nevezzük.

2. Definíció. A G csoport **feloldható**, ha van olyan normállánca, amelynek faktorai Abel-félék.

3. Példa.

- (1) Minden nilpotens csoport feloldható: $G = Z_s \triangleright Z_{s-1} \triangleright \dots \triangleright Z_0 = \{1\}$, itt a faktorok $Z_{i+1}/Z_i = Z(G/Z_i)$ Abel-félék,
- (2) D_n feloldható: $D_n \triangleright [n] \triangleright \{1\}$,
- (3) S_n feloldható $\iff n \leq 4$.

4. Definíció. A G csoport **i -edik kommutátorcsoportját** indukcióval definiáljuk: $G^{(0)} = G$, és ha $G^{(i)}$ már definiálva van, akkor $G^{(i+1)} = [G^{(i)}; G^{(i)}]$. A G csoport kommutátorlánca

$$G = G^{(0)} \triangleright G^{(1)} \triangleright G^{(2)} \triangleright \dots$$

5. Állítás. Minden i -re $G^{(i)}$ karakterisztikus részcsoport G -ben. Következésképpen $G \triangleright G^{(i)}$ és $G^{(i-1)} \triangleright G^{(i)}$, továbbá a faktorok Abel-félék.

6. Tétel. Tetszőleges G csoportra ekvivalensek:

- (1) G feloldható,
- (2) létezik k , hogy $G^{(k)} = \{1\}$,
- (3) G -nek van normálosztókból álló olyan normállánca, amelynek faktorai Abel-félék,

ha G véges, akkor az is ekvivalens, hogy

- (4) G -nek létezik olyan normállánca, amelynek faktorai prírendűek.

7. Tétel. Feloldható csoport részcsoportjai és faktorcsoporthoz is feloldható.

8. Tétel. Feloldható csoport feloldhatóval vett bővítése is feloldható.

9. Következmény. A feloldható csoportok osztálya a legszűkebb olyan csoportosztály, amely tartalmazza az Abel-csoportokat és zárt a bővítésre.