

Definiáló relációk

(előadásvázlat, 2008. október 2.)

Maróti Miklós

Ennek az előadásnak a megértéséhez a következő fogalmakat kell tudni: **szabad csoport**, **homomorfizmus** és **izomfia tételek**.

Az előadáshoz ajánlott irodalom:

- Kiss Emil: *Bevezetés az absztrakt algebra*, Typotex Kiadó, 2007.
- Bálintné Szendrei Mária, Czédli Gábor, Szendrei Ágnes: *Absztrakt algebrai feladatok*, Polygon kiadó, 2005.

1. Definíció. Az A halmaz felett az $R \subseteq G_A$ definiáló relációkkal megadott csoport alatt az

$$[A \mid R] = G_A/N$$

csoportot értjük, ahol N az R által generált normálosztó G_A -ban. Az A elemeit **generátoroknak**, az R elemeit **definiáló relációknak** nevezzük. Ha $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $R = \{r_1, \dots, r_m\}$ véges halmazok, akkor az $[a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m]$ jelölést is használjuk. Az $[A \mid R]$ csoport elemei mellékosztályok, de mi az uN mellékosztályt sokszor azonosítjuk az u elemmel.

2. Állítás. Legyenek $[A \mid R]$ és H csoportok és $f : A \rightarrow H$ tetszőleges leképezés. Az f leképezés akkor és csak akkor terjeszthető ki $\varphi : [A \mid R] \rightarrow H$ homomorfizmussá, ha minden $r = a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} \in R$ generáló relációra $(a_1 f)^{k_1} \dots (a_n f)^{k_n} = 1$.

3. Példa.

- (1) $G_{\{a\}} \cong \mathbb{Z}$,
- (2) $G_A \cong [A \mid \emptyset]$,
- (3) $[a \mid a^n] \cong \mathbb{Z}_n$,
- (4) $[a, b \mid aba^{-1}b^{-1}] \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
- (5) $[a, b \mid ab] \cong \mathbb{Z}$,
- (6) $[a, t \mid a^n, t^2, (at)^2] \cong D_n$,

4. Állítás (Dyck tétele). Ha $H = [A \mid R]$ és $H' = [A \mid R']$, ahol $R' \supseteq R$, akkor H' a H homomorf képe (olyan szürjektív homomorfizmus által, amelyre $a \mapsto a$ minden $a \in A$ -ra).

5. Tétel. $S_n \cong [t_1, \dots, t_{n-1} \mid \{t_i^2\} \cup \{(t_i t_{i+1})^3\} \cup \{(t_i t_j)^2 : |i - j| > 1\}]$.

6. Tétel. Legyen $[A \mid R]$ és $[B \mid S]$ olyan csoportok, hogy $A \cap B = \emptyset$. Ekkor

$$[A \mid R] \times [B \mid S] \cong [A \cup B \mid R \cup S \cup \{aba^{-1}b^{-1} : a \in A, b \in B\}].$$

7. Tétel. Legyen X tetszőleges halmaz. Ekkor

$$A_X \cong [X \mid \{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in X\}] = G_X/[G_X; G_X].$$