

MM4122/2: CSOPORTELMÉLET GYAKORLAT
(2007.05.11)

1. ISMÉTLÉS
FEBRUÁR 8.–FEBRUÁR 15.

1.1. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Egy csoport rendelkezhet egynél több egységelemmel.
- (2) Bármely két háromelemű csoport izomorf egymással.
- (3) Egy csoportban bármely $axb = c$ alakú egyenletnek pontosan egy megoldása van x -re nézve.
- (4) Az üres halmazon értelmezhető olyan kétváltozós művelet, amellyel az csoportot alkot.
- (5) Minden legfeljebb 5-elemű csoport Abel-féle.
- (6) Minden csoport önmagának részcsoportha.
- (7) Ha a valós számok egy részhalmaza csoportot alkot az összeadásra nézve, akkor csoportot alkot a szorzásra nézve is.
- (8) Van olyan n -elemű csoport, melynek pontosan 2^n darab részcsoportha van.
- (9) Izomorfiától eltekintve pontosan egy darab 10-elemű csoport van.
- (10) D_3 -nak pontosan 6 részcsoportha van.

1.2. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Van olyan nemtriviális csoport, amelyben minden elem generátorelem.
- (2) Van olyan nemtriviális ciklikus csoport, amelyben pontosan egy elem generátorelem.
- (3) Egy 12-elemű ciklikus csoportnak 11 olyan eleme van, ami generálja.
- (4) Minden ciklikus csoport Abel-féle.
- (5) Létezik olyan Abel-csoport, amely nem ciklikus.
- (6) Legyen $\bar{x}$ a $\mathbb{Z}_{20}$ ciklikus csoport olyan generátoreleme, amelyre $0 \leq x \leq 19$. Ekkor x vagy prímszám, vagy egyenlő 1-gyel.
- (7) Bármely legalább harmadrendű ciklikus csoportnak van két különböző generátoreleme.
- (8) Legyen H és H' két olyan csoport, amelyre $H \cap H' \neq \emptyset$. Ekkor $H \cap H'$ részcsoportha alkot mind H -ban, mind H' -ben.
- (9) Van olyan végtelen ciklikus csoport, melynek legalább négy generátoreleme van.
- (10) Van olyan véges ciklikus csoport, melynek pontosan négy generátoreleme van.
- (11) $\mathbb{Z}$ -nek pontosan egy végtelen részcsoportha van.

1.3. Feladat. (1 pt. előadta N. Győző)

Melyik részcsoporthat generálja a megadott A halmaz a G csoportban:

- (1) $G = S_4$, $A = \{(1\ 3), (1\ 2\ 3\ 4)\}$;
- (2) $G = \mathbb{Z}_5 \times S_3$, $A = \{(\bar{1}, (1\ 2)), (\bar{2}, (1\ 3))\}$.

1.4. Feladat. (1 pt. előadta H. Ádám)

Melyik normálosztót generálja a megadott a elem a G csoportban:

- (1) $G = S_4$, $a = (1\ 2\ 3\ 4)$;
- (2) $G = S_4$, $a = (1\ 2\ 3)$;
- (3) $G = A_5$, $a = (1\ 2\ 3)$.

1.5. Feladat. (2 pt.)

Rajzolja le a C_{12} , V , S_3 , D_4 és E_{p^∞} (p prímszám) csoportok részcsoporthálójának, illetve normálosztóhálójának Hasse-diagramját.

1.6. Feladat. (2 pt.)

Adja meg az előző feladatbeli csoportok összes valódi nemtriviális normálosztója szerinti faktorcsoportját az elemeik felsorolásával és művelettáblázatával. Minden faktorcsoporthoz keressen vele izomorf, de nem faktorcsoportként előálló csoportot.

1.7. Feladat. (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy egy csoport részcsoporthálóját pontos akkor lánc (azaz a hálóban bármely két elem összehasonlítható), ha valamely p prímszámra a csoport izomorf E_{p^∞} egy részcsoporthálójával.

1.8. Feladat. (2 pt. előadta V. Edit)

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Minden permutáció injektív leképezés.
- (2) Egy leképezés akkor és csak akkor permutáció, ha injektív.
- (3) Minden G csoport izomorf S_G -nek egy részcsoporthálójával.
- (4) Az S_{10} szimmetrikus csoportnak pontosan 10 eleme van.
- (5) Az S_3 csoport ciklikus.
- (6) Pontosán két olyan n pozitív egész van, amelyre S_n Abel-féle.
- (7) D_3 izomorf S_3 -mal.
- (8) Ha H az S_9 csoport olyan részcsoporthálóját, amely tartalmaz páratlan permutációt, akkor H tartalmaz transzpozíciót is.
- (9) A_5 -nek 120 eleme van.
- (10) Pontosán három olyan n pozitív egész van, amelyre A_n Abel-féle.
- (11) S_9 minden eleme legfeljebb 14-edrendű.
- (12) A_5 minden eleme legfeljebb 3-adrendű.

1.9. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Minden végtelen csoportnak minden nemtriviális részcsoporthálóját szerint végtelen sok bal oldali mellékosztálya van.
- (2) Minden csoportnak minden részcsoporthálóját szerint ugyanannyi bal, illetve jobb oldali mellékosztálya van, és a mellékosztályok számossága megegyezik.

- (3) Létezik olyan 64-edrendű csoport és annak olyan részcsoporthja, amelynek pontosan 16 bal oldali mellékosztálya van.
- (4) Minden prímdrendű csoport ciklikus.
- (5) Minden prímszámú rendű csoport ciklikus.
- (6) Tetszőleges $n \geq 2$ esetén $A_n \triangleleft S_n$.
- (7) Tetszőleges G és H csoportokra létezik homomorfizmus G -ről H -ba.
- (8) Egy homomorfizmus akkor és csak akkor izomorfizmus, ha magja csak az egységelemet tartalmazza.
- (9) Létezik 6-edrendű csoportról 4-edrendű csoportba menő nemtriviális homomorfizmus.
- (10) Létezik 6-edrendű csoportról 5-ödrendű csoportba menő nemtriviális homomorfizmus.
- (11) Létezik véges csoportról végtelen csoportba menő nemtriviális homomorfizmus.

1.10. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Tetszőleges G és H csoportokra $G \times H \cong H \times G$.
- (2) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{10}$.
- (3) $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$.
- (4) $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{10}$ minden eleme legfeljebb 30-ad rendű.
- (5) Minden prímszámú rendű Abel-csoport ciklikus.
- (6) Ha egy Abel-csoport rendje 4 többszöröse, akkor tartalmaz olyan ciklikus részcsoporthot, amelynek rendje szintén 4 többszöröse.
- (7) Ha egy Abel-csoport rendje 5 többszöröse, akkor tartalmaz olyan ciklikus részcsoporthot, amelynek rendje szintén 5 többszöröse.
- (8) Ha egy Abel-csoport rendje 6 többszöröse, akkor tartalmaz olyan ciklikus részcsoporthot, amelynek rendje szintén 6 többszöröse.
- (9) A $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ csoportnak pontosan 5 részcsoporthja van.
- (10) A $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha n és m relatív prímek.
- (11) Tetszőleges G és H csoportokra $G \times H$ akkor és csak akkor Abel-féle, ha G és H is az.

1.11. Feladat. (2 pt.)

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Egy G csoport H részcsoporthja szerinti bal oldali mellékosztályai akkor és csak akkor alkotnak csoportot a komplexusszorzás művelettel, ha H normálosztó G -ben.
- (2) Abel-csoport minden részcsoporthja normálosztó.
- (3) Abel-csoport minden automorfizmusa identikus.
- (4) Abel-csoport minden faktorcsoportja Abel-féle.
- (5) Van olyan nem Abel-féle G csoport és annak olyan H normálosztója, hogy mind H , mind G/H Abel-féle.
- (6) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.
- (7) S_3 -nak pontosan 3 normálosztója van.
- (8) S_4 -nek pontosan 3 normálosztója van.

- (9) Q -nak pontosan 3 normálosztója van.
- (10) D_4 -nek pontosan 3 normálosztója van.
- (11) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ -nak pontosan 4 normálosztója van.

1.12. Feladat. (2 pt. előadta Á. Sarolta)

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Az $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ csoportnak van másodrendű eleme.
- (2) Az $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ csoportnak van végtelen rendű eleme.
- (3) Az $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ csoportnak végtelen sok negyedrendű eleme van.
- (4) $\mathbb{Z}_6/[2] \cong \mathbb{Z}_3$.
- (5) Tetszőleges $n \geq 2$ egész számra $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_n$.
- (6) $\mathbb{Z}_6$ direkt felbontható.
- (7) $\mathbb{Z}_4$ direkt felbontható.
- (8) $\mathbb{Z}$ direkt felbontható.
- (9) $\mathbb{Q}$ direkt felbontható.
- (10) $\mathbb{Q}^*$ direkt felbontható.
- (11) $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ direkt felbontható.

1.13. Feladat. (1 pt. közösen megbeszéltük)

Adja meg a 18-adrendű ciklikus csoport összes felbontását nemtriviális részcsoportjainak direkt szorzataként.

1.14. Feladat. (2 pt.)

Legyen $A = \{1, 2, \dots, n\}$ valamely n természetes számra, és a $(\mathcal{P}(A); \triangle)$ csoportot jelölje G .

- (1) Mutassa meg, hogy G izomorf C_2 n -edik direkt hatványával, és adjon meg G -nek kételemű részcsoportok direkt szorzatára való felbontását.
- (2) Az $n = 3$ esetben adja meg G -nek az összes kételemű részcsoportok direkt szorzatára való felbontását.

2. PERMUTÁCIÓCSOPORTOK FEBRUÁR 16.–FEBRUÁR 22.

2.1. Feladat. (1 pt. előadta N. Győző)

Adjon meg a természetes számok halmazán olyan permutációt, amelynek egyetlen pályája van.

2.2. Feladat. (2 pt.)

Legyen A végtelen halmaz. Döntse el, hogy S_A következő részhalmazai közül melyek alkotnak részcsoportot:

- (1) a véges tartományú permutációk halmaza,
- (2) a véges sok pályával rendelkező permutációk halmaza,
- (3) a végtelen sok triviális pályával rendelkező permutációk halmaza.

Állítását minden esetben bizonyítsa be.

2.3. Feladat. (3 pt. előadta H. Ádám)

Legyen A végtelen halmaz. Döntse el, hogy S_A következő részhalmazai közül melyek alkotnak részcsoportot:

- (1) a véges sok triviális pályával rendelkező permutációk halmaza,
- (2) a véges sok nemtriviális pályával rendelkező permutációk halmaza,
- (3) a csak véges pályával rendelkező permutációk halmaza.

Állítását minden esetben bizonyítsa be.

2.4. Feladat. (3 pt.)

Jellemezze azoknak a $\sigma \in S_A$ (A nemüres halmaz) permutációknak a pályáit, amelyeknek van négyzetgyöke, azaz amelyekhez létezik olyan $\tau \in S_A$, amelyre $\tau^2 = \sigma$.

2.5. Feladat. (1 pt. közösen megbeszéltük)

Döntse el, hogy tranzitívak-e az alábbi permutációcsoportok:

- (1) $GL(V) \leq S_V$, ahol V tetszőleges vektortér;
- (2) $GL_0(V) \leq S_{V \setminus \{0\}}$, ahol V tetszőleges vektortér és $GL_0(V) = \{\phi|_{V \setminus \{0\}} : \phi \in GL(V)\}$.

2.6. Feladat. (1 pt. előadta F. Lajos)

Döntse el, hogy tranzitívak-e az alábbi permutációcsoportok:

- (1) $G_m = \{\pi \in S_{\mathbb{Z}} : m \mid x\pi - x \text{ minden } x \in \mathbb{Z}\text{-re}\}$, ahol $m \in \mathbb{N}$ előre adott;
- (2) $H = \{\rho_g \in S_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} : g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ és } g\text{-nek nincs zérushelye}\}$, ahol $\rho_g \in S_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ -hez $xg \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ -et rendeli.

2.7. Feladat. (2 pt. előadta Á. Sarolta)

Határozza meg az S_4 csoport összes tranzitív részcsoportját.

2.8. Feladat. (1 pt. előadta V. Katalin és M. Miklós)

Határozza meg az L_5 csoport összes minimális tranzitív részcsoportját.

2.9. Feladat. (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy az S_p (p prímszám) szimmetrikus csoportnak nincs olyan valódi tranzitív részcsoportja, amely tartalmaz transzpozíciót.

2.10. Feladat. (3 pt.)

Milyen n természetes számokra létezik Q -val izomorf részcsoport S_n -ben?

3. SZABAD CSOPORTOK, DEFINIÁLÓ RELÁCIÓK FEBRUÁR 23.–MÁRCIUS 8.

3.1. Feladat. (1 pt. előadta M. Miklós)

Adja meg az alábbi f leképezés kiterjesztését homomorfizmussá a megadott F szabad algebrára:

- (1) $f: \{x, y\} \rightarrow (\mathbb{N}; \text{ln. k. o.}), xf = 2, yf = 3; F = \{x, y\}^+$;
- (2) $f: \{x, y\} \rightarrow Q, xf = -1, yf = i; F = G_{\{x, y\}}$.

3.2. Feladat. (1 pt.)

Igazolja, hogy

- (1) $\mathbb{N}$ szabad félcsoport valamely egyelemű halmazon;
- (2) $\mathbb{Z}$ szabad csoport valamely egyelemű halmazon;
- (3) $\mathbb{R}^n$ szabad $\mathbb{R}$ feletti vektortér valamely n -elemű halmazon.

Határozza meg ezekben a szabad algebrákban az összes szabad generátorrendszert.

3.3. Feladat. (2 pt. előadta Á. Sarolta és M. Miklós)

Az alábbi G csoportnak adjon meg olyan egységelemet nem tartalmazó X generátorrendszerét, valamint keressen olyan H csoportot és $f: X \rightarrow H$ leképezést, amely nem terjeszthető ki $\varphi: G \rightarrow H$ homomorfizmussá:

- (1) $G = S_3$,
- (2) $G = [1, \sqrt{2}] \leq \mathbb{R}$,
- (3) $G = E_{p^\infty}$, p prímszám.

3.4. Feladat. (1 pt. előadta M. Miklós)

Mutassa meg, hogy ha $n \geq 2$, akkor $\mathbb{Z}^n$ szabad Abel-csoport, de nem szabad csoport.

3.5. Feladat. (2 pt.)

Igazolja, hogy $\mathbb{Z}(x_1, \dots, x_n)$ szabad egységelemes kommutatív gyűrű, de nem szabad kommutatív gyűrű.

3.6. Feladat. (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{Q}$ nem szabad Abel-csoport.

3.7. Feladat. (1 pt.)

Mutassa meg tetszőleges X, Y halmazokra, hogy ha $|X| = |Y|$, akkor a G_X és G_Y szabad csoport izomorf egymással. [Ezért adott κ számosság esetén a G_X ($|X| = \kappa$) szabad csoportot szokás κ rangú szabad csoportnak nevezni és G_κ -val jelölni.]

3.8. Feladat. (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy a $G_{\{x,y\}}$ szabad csoportban az $x^i y^i$ ($i \in \mathbb{N}$) elemek megszámlálhatóan végtelen rangú szabad csoportot generálnak.

3.9. Feladat. (1 pt. előadta V. Edit)

Sorolja fel az $[a, b \mid a^2, b^5, ab^2ab^2]$ csoport elemeit, és adja meg a csoport műveletábrázolatát.

3.10. Feladat. (1 pt. előadta N. Győző)

Milyen „ismert” csoporttal izomorfak az alábbi csoportok:

- (1) $[a, b, c \mid a^4, b^2, c^2, (ab)^2, (bc)^2, aca^{-1}c^{-1}]$,
- (2) $[a, b \mid a^2ba, ba^2]$.

3.11. Feladat. (2 pt. előadta N. Győző)

Tetszőleges $k, m, n \in \mathbb{Z}$ egészekre mutassa meg, hogy az $[a, b \mid a^m, b^n, aba^{-1}b^k]$ csoport véges.

3.12. Feladat. (2 pt.)

Bizonyítsa be, hogy minden véges csoport izomorf egy olyan $[X \mid R]$ csoporttal, ahol mind X , mind R véges.

3.13. Feladat. (1 pt.)

Milyen „ismert” csoporttal izomorfak az alábbi csoportok:

- (1) $[a, b \mid ab]$,
- (2) $[a, b \mid a^4, b^3, abab^{-1}]$.

3.14. Feladat. (1 pt.)

Tekintsük a $G = [a, b \mid a^2ba^3b]$ és a $H = [u, v \mid uvu]$ csoportokat. Mutassa meg,

hogy létezik olyan egyértelműen meghatározott $\varphi: G \rightarrow H$ homomorfizmus, amelyre $a\varphi = v$ és $b\varphi = v^{-2}u$. Bizonyítsa be, hogy φ izomorfizmus.

3.15. Feladat. (2 pt. előadta F. Lajos)

Bizonyítsa be, hogy az $[a, b \mid a^2, b^2]$ csoport végtelen és nem kommutatív.

3.16. Feladat. (3 pt.)

Adja meg a V , illetve Q csoportokat definiáló relációkkal oly módon, hogy közülük egyik definiáló reláció sem hagyható el, azaz bármelyik definiáló reláció elhagyásával olyan csoport adódik, amely nem izomorf az eredetivel.

3.17. Feladat. (2 pt. előadta V. Katalin)

Bizonyítsa be, hogy az $[a, b \mid a^2b^2a^2b, ab^2a^4b^{-1}a^{-1}b^{-1}, ba^2ba^{-2}b]$ csoport izomorf $\mathbb{Z}_{12}$ -vel.

4. CSOPORTBŐVÍTÉSEK, SZEMIDIREKT SZORZAT MÁRCIUS 16.–MÁRCIUS 22.

4.1. Feladat. (1 pt. előadta M. Miklós)

Keresse meg az összes $\varphi: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut } S_3$ hatást, és minden esetben számolja ki az $(\bar{1}, (13)) \in \mathbb{Z}_2 \rtimes_{\varphi} S_3$ elem rendjét. (Ismer, hogy $\text{Aut } S_3 = \text{Inn } S_3$.)

4.2. Feladat. (1 pt.)

Tekintsük azt a $\varphi: \mathbb{Q}^* \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Q}$ leképezést, amelyre tetszőleges $a \in \mathbb{Q}^*$ esetén az $a\varphi$ automorfizmus az a -val való szorzás (azaz tetszőleges $a \in \mathbb{Q}^*$ -ra és $q \in \mathbb{Q}$ -ra $q(a\varphi) = qa$).

- (1) Mutassa meg, hogy $a\varphi$ valóban a $\mathbb{Q}$ csoport automorfizmusa, és φ a $\mathbb{Q}^*$ csoport hatása $\mathbb{Q}$ -n.
- (2) Vizsgálja meg, hogy kommutatív-e a $\mathbb{Q}^* \rtimes_{\varphi} \mathbb{Q}$ csoport, valamint határozza meg a véges rendű elemeket, és adja meg a rendjüket.

4.3. Feladat. (1 pt. előadta V. Edit)

Legyen G, H Abel-csoport, $\varphi: G \rightarrow \text{Aut } H$ pedig G tetszőleges hatása H -n. Igazolja, hogy $G \rtimes_{\varphi} H$ pontosan akkor Abel-féle, ha φ triviális.

4.4. Feladat. (2 pt. előadta M. Szilvia)

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Ha $H \leq G$, $N \triangleleft G$ és $HN = G$, akkor $G \cong H \rtimes_{\varphi} N$ valamely $\varphi: H \rightarrow \text{Aut } N$ homomorfizmusra.
- (2) Tetszőleges G, H ciklikus csoportok és $\varphi, \psi: G \rightarrow \text{Aut } H$ homomorfizmusok esetén $G \rtimes_{\varphi} H \cong G \rtimes_{\psi} H$.
- (3) D_n előállítható nemtriviális szemidirekt szorzatként.
- (4) Q előállítható nemtriviális széteső bővítésként.
- (5) $\mathbb{Z}_6$ előállítható nemtriviális szemidirekt szorzatként.
- (6) Egyszerű csoportok nem állíthatók elő nemtriviális szemidirekt szorzatként.
- (7) Ciklikus csoportok szemidirekt szorzata ciklikus.
- (8) Véges G és H csoportok esetén a $(g, h) \in G \rtimes_{\varphi} H$ elem rendje többszöröse a $g \in G$ elem rendjének.

4.5. Feladat. (1 pt. előadta Á. Sarolta és V. Katalin)

Milyen „ismert” csoporttal izomorfak az alábbi szemidirekt szorzatok:

- (1) $\mathbb{Z}_2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_3$, ahol $\varphi: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}_3$ az a homomorfizmus, ami $\bar{1}$ -hez az inverzképzést rendeli;
- (2) $\mathbb{Z}_3 \rtimes_{\varphi} (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$, ahol $\varphi: \mathbb{Z}_3 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ olyan homomorfizmus, ami $\bar{1}$ -hez olyan automorfizmust rendel, amely $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ minden másodrendű elemét mozgatja.

4.6. Feladat. (2 pt. előadta M. Miklós)

Izomorfak-e egymással az alábbi szemidirekt szorzatok:

- (1) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ és $\mathbb{Z}_6 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_3$, ahol $\varphi: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}_3$ az a homomorfizmus, ami $\bar{1}$ -hez az inverzképzést rendeli.
- (2) $\mathbb{Z}_2 \rtimes_{\varphi} A_4$ és $S_3 \rtimes_{\psi} (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$, ahol $\varphi: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut } A_4$ az a homomorfizmus, ami $\bar{1}$ -hez az $(1\ 2)$ transzpozíció által S_4 -en indukált belső automorfizmus A_4 -re való megszorítását rendeli, $\psi: S_3 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ pedig olyan izomorfizmus, amire teljesül a következő: van olyan bijekció az $\{1, 2, 3\}$ halmazról $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ másodrendű elemeinek A halmazára, hogy az általa meghatározott $\kappa: S_3 \rightarrow S_A$ izomorfizmusra $(\pi\psi)|_A = \pi\kappa$ tetszőleges $\pi \in S_3$ esetén.

4.7. Feladat. (3 pt.)

Izomorfak-e egymással az alábbi szemidirekt szorzatok:

- (1) $\mathbb{Z}_6 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_4$ és $\mathbb{Z}_4 \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}_6$, ahol $\varphi: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}_4$ és $\psi: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}_6$ is az a homomorfizmus, ami $\bar{1}$ -hez az inverzképzést rendeli (rendre a megfelelő csoportokban).
- (2) $\mathbb{Z}_2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_6$ és $\mathbb{Z}_2 \times S_3$, ahol $\varphi: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}_6$ az a homomorfizmus, ami $\bar{1}$ -hez az inverzképzést rendeli.

4.8. Feladat. (1 pt.)

- (1) Bizonyítsa be, hogy tetszőleges háromnál több elemű T test esetén a $\text{GL}(T, 2)$ általános lineáris csoport izomorf az $\text{SL}(T, 2)$ speciális lineáris csoportnak a $T^* = (T \setminus \{0\}; \cdot)$ csoporttal vett szemidirekt szorzatával.
- (2) Adjon meg két különböző olyan ψ hatást, amelyre $T^* \rtimes_{\psi} \text{SL}(T, 2) \cong \text{GL}(T, 2)$.

4.9. Feladat. (1 pt. előadta N. Győző)

Előállnak-e nemtriviális módon szemidirekt szorzatként az alábbi csoportok? Ha igen, akkor adjon meg ilyen előállítást, és adja meg a hozzá tartozó indukált hatást.

- (1) $(\mathbb{Z}; +)$,
- (2) $L_n, n \in \mathbb{N}$.

4.10. Feladat. (2 pt. előadta M. Miklós)

Mutassa meg, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ esetén van olyan nemtriviális φ hatás, hogy D_{2n} izomorf $C_2 \rtimes_{\varphi} D_n$ -nel.

4.11. Feladat. (2 pt.)

Legyen G tetszőleges csoport, $\alpha: G \rightarrow \text{Aut } G$ pedig az a homomorfizmus, amely minden elemhez az általa indukált belső automorfizmust rendeli. Igazolja, hogy $G \rtimes_{\alpha} G$ két, a G csoporttal izomorf normálosztójának direkt szorzata.

4.12. Feladat. (2 pt.)

Adja meg az $[a, b \mid aba^{-1}b]$ csoportot nemtriviális szemidirekt szorzatként.

4.13. Feladat. (3 pt.)

Legyen $H = [a]$ n -edrendű ciklikus, K pedig tetszőleges csoport. Tekintsünk olyan $\varphi, \psi: H \rightarrow \text{Aut } K$ hatásokat, amelyekre van olyan $k \in \mathbb{Z}$, hogy $a\psi = (a\varphi)^k$.

- (1) Igazolja, hogy ha $\text{ln.k.o.}(k, n) = 1$, akkor $H \rtimes_{\varphi} K \cong H \rtimes_{\psi} K$.
- (2) Vizsgálja meg, hogy érvényes-e az előző állítás megfordítása.

5. KONJUGÁLÁS, NORMALIZÁTOR, CENTRALIZÁTOR, KETTŐS
MELLÉKOSZTÁLYOK, SYLOW-TÉTELEK
ÁPRILIS 10.–ÁPRILIS 20.

5.1. Feladat. (1 pt. előadta H. Ádám)

Határozza meg az S_3 csoportban az (12) , illetve az (123) elemek normalizátorának elemszámát.

5.2. Feladat. (1 pt. előadta M. Miklós)

Legyen G csoport, H, K pedig két részcsoportja. Mutassa meg, hogy ha H és K egymás konjugáltja, akkor ugyanez igaz az $N_G(H)$ és az $N_G(K)$ részcsoportokra.

5.3. Feladat. (1 pt. előadta P. Jolán)

Adjon meg az A_4 csoportnak egy Frobenius-felbontását a $H = [(123)]$ és $K = [(134)]$ részcsoportok szerint. A felbontás minden tagjáról állapítsa meg, hogy hány H szerinti jobb oldali és hány K szerint bal oldali mellékosztályból áll.

5.4. Feladat. (2 pt. előadta Á. Sarolta)

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja. Minden állításnál p prímszámot jelöl.

- (1) Véges csoportban az azonos rendű p -részcsoportok konjugáltjai egymásnak.
- (2) Véges G Abel-csoportban minden $p \mid |G|$ prímszámmra pontosan egy p -Sylow-részcsoport van.
- (3) Tetszőleges $H \leq G$ részcsoportra $N_G(H) \triangleleft G$.
- (4) Tetszőleges $H \leq G$ részcsoportra $H \triangleleft N_G(H)$.
- (5) A G csoport P p -Sylow-részcsoportja akkor és csak akkor normálosztó G -ben, ha P az egyetlen p -Sylow-részcsoport G -ben.
- (6) Létezik olyan véges p -csoport, amelynek nincs p -Sylow-részcsoportja.
- (7) Ha G Abel-csoport, akkor $N_G(H) = H$ tetszőleges $H \leq G$ részcsoportra.
- (8) Véges csoport rendje akkor és csak akkor p -hatvány, ha minden elemének rendje p -hatvány.
- (9) S_3 -ban a 2-Sylow-részcsoportok száma 3.
- (10) Ha a G csoport rendje $p^k m$, ahol $p \nmid m$, akkor G p -Sylow-részcsoportjainak száma m osztója.
- (11) Tetszőleges G csoport és $H, K \leq G$ esetén a G csoport H és K részcsoportja szerinti kettős mellékosztályok azonos elemszámúak.

5.5. Feladat. (1 pt. előadta N. Győző és M. Miklós)

Mutassa meg, hogy ha N nemtriviális normálosztó a G véges p -csoportban, akkor $N \cap Z(G) \neq \{1\}$.

5.6. Feladat. (3 pt.)

Igazolja, hogy egy G véges csoport bármely H valódi részcsoportjához létezik olyan $a \in G \setminus H$ elem, amely egyetlen H -beli elemnek sem konjugáltja.

5.7. Feladat. (2 pt. előadta M. Miklós)

Legyen G véges csoport és H, K két részcsoportja. Tekintsük G egy Frobenius-felbontását H és K szerint. Az előadáson tanult képlethez hasonlóan, amely a felbontás ismeretében megadja a $[G : K]$ indexet, adjon meg képletet a $[G : H]$ indexre.

5.8. Feladat. (1 pt. előadta N. Győző)

Határozza meg S_4 -ben a 2-Sylow-, illetve 3-Sylow-részcsoportok számát.

5.9. Feladat. (2 pt.)

Legyen G véges csoport, N normálosztó, P pedig Sylow-részcsoport G -ben. Igazolja, hogy $N \cap P$ Sylow-részcsoport N -ben.

5.10. Feladat. (1 pt. előadta M. Szilvia és V. Edit)

Mutassa meg, hogy minden

- (1) 200-adrendű,
- (2) 260-adrendű

csoportnak van normális Sylow-részcsoportja.

5.11. Feladat. (2 pt. előadta V. Katalin)

Mutassa meg, hogy minden

- (1) 56-odrendű,
- (2) 1365-ödrendű ($1365 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$)

csoportnak van normális Sylow-részcsoportja.

5.12. Feladat. (2 pt. előadta H. Ádám és Á. Sarolta)

Igazolja, hogy a p^2q -adrendű csoportokban, ahol p, q különböző prímek, van normális Sylow-részcsoport.

5.13. Feladat. (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy ha egy p^3q -adrendű G csoportban, ahol p, q különböző prímek, nincs normális Sylow-részcsoport, akkor $p = 2$, $q = 3$ és G izomorf S_4 -gyel.

5.14. Feladat. (2 pt.)

Igazolja, hogy egyetlen p páratlan prím és k pozitív egész esetén sincs $4p^k$ rendű egyszerű csoport.

5.15. Feladat. (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy nincs 120-adrendű egyszerű csoport.

5.16. Feladat. (3 pt.)

Határozza meg izomorfiától eltekintve az összes 12-edrendű csoportot.

5.17. Feladat. (1 pt. előadta M. Miklós)

Mutassa meg kettős mellékosztályok alkalmazásával, hogy egy csoport bármely H, K véges részcsoportjára $|HK| = |H||K|/|H \cap K|$.

5.18. Feladat. (2 pt.)

Igazolja kettős mellékosztályok alkalmazásával, hogy ha K a G csoport véges indexű részcsoportja, akkor G bármely H részcsoportjára $H \cap K$ véges indexű H -ban, és $[H : H \cap K] \leq [G : K]$.

5.19. Feladat. (1 pt. előadta M. Miklós)

Igazolja, hogy ha a G csoportban a H és K részcsoport olyan, hogy $H \cap K$ triviális és $H \subseteq N_G(K)$, $K \subseteq N_G(H)$, akkor tetszőleges $h \in H$ és $k \in K$ esetén $hk = kh$.

5.20. Feladat. (2 pt.)

Bizonyítsa be, hogy ha a G csoport centruma triviális, akkor $C_{\text{Aut } G}(\text{Inn } G)$ és $Z(\text{Aut } G)$ is triviális.

5.21. Feladat. (3 pt.)

Egy véges csoportot *Frobenius-csoportnak* hívunk, ha van olyan H nemtriviális részcsoportja, amelyre $H \cap g^{-1}Hg = \{1\}$ teljesül minden $g \in G \setminus H$ elem esetén. Tegyük fel, hogy H ilyen részcsoport a G véges csoportban. Bizonyítsa be, hogy

- (1) ln. k. o. $(|H|, [G : H]) = 1$,
- (2) ha $[G : H]$ p -hatvány valamely p prímre, akkor G p -Sylow-részcsoportja normálosztó G -ben.

6. NILPOTENS ÉS FELOLDHATÓ CSOPORTOK

ÁPRILIS 23.–MÁJUS 17.

6.1. Feladat. (1 pt.)

Döntse el, hogy nilpotensek-e az alábbi csoportok:

- (1) S_n ($n \in \mathbb{N}$),
- (2) $D_n \times \mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$),
- (3) $(\mathbb{Z}; \circ)$, ahol $k \circ m = k + (-1)^k m$ ($k, m \in \mathbb{Z}$).

6.2. Feladat. (1 pt.)

Döntse el, hogy nilpotensek-e az alábbi csoportok:

- (1) D_n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$),
- (2) Q ,
- (3) $\mathbb{Z}_4 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_4$, ahol $\varphi: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}_4$ az a homomorfizmus, amely $\bar{1}$ -hez az inverzképzést rendeli.

6.3. Feladat. (1 pt. előadta P. Jolán)

Határozza meg a

- (1) Q ,
- (2) S_3

csoportok alsó és felső centrális láncát.

6.4. Feladat. (2 pt.)

Határozza meg a D_{2^k} ($k > 1$) csoport alsó és felső centrális láncát.

6.5. Feladat. (2 pt. előadta V. Katalin)

Mutassa meg, hogy ha G véges nilpotens csoport és $m \mid |G|$, akkor G -ben létezik m -edrendű részcsoport.

6.6. Feladat. (2 pt.)

Igazolja a véges nilpotens csoportokra tanult struktúratétel alkalmazásával, hogy véges nilpotens csoport minden részcsoportha és faktorcsoportja is nilpotens.

6.7. Feladat. (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy tetszőleges nilpotens csoport minden részcsoportha és faktorcsoportja is nilpotens.

6.8. Feladat. (2 pt.)

Legyen G véges nilpotens csoport és N minimális normálosztó G -ben. Mutassa meg, hogy $N \subseteq Z(G)$ és N prírendű.

6.9. Feladat. (2 pt. előadta Á. Sarolta)

Adja meg a következő csoportok kommutátorcsoportját:

- (1) S_4 ,
- (2) A_4 ,
- (3) L_5 .

6.10. Feladat. (1 pt.)

Döntse el, hogy tetszőleges G, H nilpotens csoportok és $\varphi: G \rightarrow \text{Aut } H$ hatás esetén a $G \rtimes_{\varphi} H$ szemidirekt szorzat szükségszerűen nilpotens-e. Ha igen, bizonyítsa be, ha nem, adjon ellenpéldát.

6.11. Feladat. (1 pt. előadta Á. Sarolta)

Döntse el, hogy feloldhatók-e az alábbi csoportok:

- (1) A_n ($n \in \mathbb{N}$),
- (2) $\mathbb{Z} \times Q$,
- (3) L_n ($n \in \mathbb{N}$).

6.12. Feladat. (1 pt.)

Döntse el, hogy feloldhatók-e az alábbi csoportok:

- (1) $S_n \times \mathbb{Q}$ ($n \in \mathbb{N}$),
- (2) D_n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$),
- (3) $(\mathbb{Z}; \circ)$, ahol $k \circ m = k + (-1)^k m$ ($k, m \in \mathbb{Z}$).

6.13. Feladat. (2 pt.)

Döntse el, hogy feloldhatók-e az alábbi csoportok:

- (1) $\text{Inn } A_n$ ($n \in \mathbb{N}$),
- (2) G_A (A tetszőleges halmaz).

6.14. Feladat. (1 pt.)

Határozza meg az alábbi csoportok kommutátorlancát:

- (1) $\mathbb{Z}_n \times S_n$ ($n \in \mathbb{N}$),
- (2) $(\mathbb{Z}; \circ)$, ahol $k \circ m = k + (-1)^k m$ ($k, m \in \mathbb{Z}$).

6.15. Feladat. (2 pt.)

Határozza meg az alábbi csoportok kommutátorlancát:

- (1) D_n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$),
- (2) L_p (p prímszám).

6.16. Feladat. (1 pt. előadta N. Győző)

Mutassa meg, hogy ha p, q különböző prímek, akkor minden pq -adrendű csoport feloldható.

6.17. Feladat. (2 pt.)

Igazolja, hogy ha a G csoport M, N normálosztói olyanok, hogy G/M és G/N feloldható, akkor $G/(M \cap N)$ is feloldható.

6.18. Feladat. (1 pt. előadta M. Miklós)

Keresse meg az alábbi csoportok összes kompozícióláncát:

- (1) $\mathbb{Z}_{12}$,
- (2) $\mathbb{Q}$,
- (3) D_5 .

6.19. Feladat. (1 pt. előadta F. Lajos)

Keresse meg az alábbi csoportok összes kompozícióláncát:

- (1) $\mathbb{Z}$,
- (2) D_4 ,
- (3) S_4 .

6.20. Feladat. (1 pt. előadta H. Ádám)

Határozza meg (izomorfia erejéig) S_5 és D_6 kompozíciófaktorait.

6.21. Feladat. (2 pt. előadta N. Győző és V. Katalin)

Igazolja, hogy egy Abel-csoportnak pontosan akkor van kompozíciólánca, ha véges.

6.22. Feladat. (2 pt. előadta H. Ádám és N. Győző)

Mutassa meg, hogy egy véges p -csoportnak minden kompozíciófaktora p -edrendű ciklikus csoport.

6.23. Feladat. (3 pt.)

Legyen G véges nilpotens csoport, H pedig tetszőleges részcsoportha. Mutassa meg hogy G -nek van H -t tartalmazó kompozíciólánca.

6.24. Feladat. (3 pt.)

Legyen G véges p -csoport. Bizonyítsa be, hogy

- (1) ha N minimális normálosztó G -ben, akkor $N \subseteq Z(G)$ és $|N| = p$,
- (2) G -nek van normálosztóiból álló kompozíciólánca,
- (3) ha N olyan normálosztó G -ben, amelyre $|N| = p^i$, akkor $N \subseteq Z_i(G)$.

7. SZABAD ABEL-CSOPORTOK,
A VÉGESEN GENERÁLT ABEL-CSOPORTOK ALAPTÉTELE
MÁJUS 11.–MÁJUS 17.

7.1. Feladat. (1 pt. előadta M. Szilvia)

Döntse el, hogy szabad Abel-csoportok-e a következő csoportok:

- (1) $\mathbb{Z}$,
- (2) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
- (3) $\mathbb{Q}$,
- (4) $\mathbb{R}^*$,
- (5) E_{p^∞} (p prímszám).

7.2. Feladat. (2 pt. előadta Á. Sarolta és M. Miklós)

Bizonyítsa be tetszőleges X, Y halmazokra, hogy ha az A_X és A_Y szabad Abel-csoport izomorf egymással, akkor $|X| = |Y|$.

7.3. Feladat. (1 pt. előadta M. Miklós)

Az előző feladatbeli állítás felhasználásával igazolja tetszőleges X, Y halmazokra, hogy ha a G_X és G_Y szabad csoport izomorf egymással, akkor $|X| = |Y|$.

7.4. Feladat. (2 pt.)

Legyen $M = (m_{ij})$ egy $\mathbb{Z}$ fölötti $n \times n$ -es mátrix. Tekintsük az $y_i = \sum_{j=1}^n m_{ij}x_j$ ($i = 1, 2, \dots, n$) elemeket az A_X ($X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$) szabad Abel-csoportban. Mutassa meg, hogy $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ pontosan akkor szabad generátorrendszer A_X -ben, ha M determinánsa ± 1 .

7.5. Feladat. (3 pt.)

Bizonyítsa be, hogy az A_X ($X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$) szabad Abel-csoport minden részcsoportha szabad Abel-csoport.

7.6. Feladat. (1 pt. előadta N. Győző)

Tekintsük a következő végesen generált Abel-csoportokat:

- (1) $C \times C_{36} \times C_{54} \times C$,
- (2) $C_4 \times C_6 \times C \times C_8 \times C_2$,
- (3) $C_5 \times C_{24} \times C_3 \times C_4 \times C \times C_2$,
- (4) $C_2 \times C \times C_{18} \times C_2 \times C_{27} \times C$,
- (5) $C \times C_8 \times C_{12} \times C_{30} \times C$,
- (6) $C \times C_{60} \times C_{24}$.

(a) Írja fel a megadott csoportokat az alaptétel első és második formájában megadott alakban.

(b) Döntse el, hogy vannak-e izomorfak a megadott csoportok között.

7.7. Feladat. (1 pt. előadta H. Ádám)

Igaz-e, hogy egy nemtriviális Abel-csoport pontosan akkor direkt felbonthatatlan, ha végtelen vagy prímszámrendű ciklikus csoport.