

MBX114G: DISZKRÉT MATEMATIKA III. GYAKORLAT
(2007.05.14)

1. LEKÉPEZÉSEK

1.1. Feladat. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Egy leképezés szürjektív, ha minden képelemnek van őse.
- (2) Egy leképezés injektív, ha minden képelemnek egyetlen őse van.
- (3) Injektív leképezések szorzata is injektív.
- (4) Ha két leképezés szorzata injektív, akkor a két leképezés is injektív.
- (5) Egy leképezésnek pontosan akkor van inverze, ha a leképezés bijektív.
- (6) Van olyan bijektív leképezés, amelynek inverze nem szürjektív.
- (7) Létezik két olyan leképezés, amelyek egyike sem szürjektív, de a szorzatuk igen.

1.2. Feladat. Adja meg az alábbi, ‘hozzárendelési szabállyal’ definiált transzformációkat ‘elempárokkal’ és ‘kétsoros írásmódban’:

- (1) $\alpha: \{0, 1, \dots, 9\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 9\}$, $n \mapsto 9 - n$;
- (2) $\beta: \{0, 1, \dots, 9\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 9\}$, $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$, és ha $n \geq 2$, akkor $n \mapsto$ a legnagyobb olyan prímszám, amely n -nél nem nagyobb;
- (3) $\gamma: \{0, 1, \dots, 9\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 9\}$, $n \mapsto 2n$ utolsó számjegye 10-es számrendszerben;
- (4) $\delta: \{0, 1, \dots, 9\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 9\}$, $n \mapsto n+2$ utolsó számjegye 10-es számrendszerben.

Döntse el, hogy ezek a transzformációk permutációk-e vagy sem, és a permutációknak adja meg az inverzét mindhárom írásmódban.

1.3. Feladat. Adja meg a következő két leképezés, ρ és σ szorzatát, és állapítsa meg, hogy a ρ , σ és $\rho\sigma$, valamint ha értelmezve van, akkor a $\sigma\rho$ leképezések injektívek-e, illetve szürjektívek-e. Ha valamelyik bijektív, akkor adja meg az inverzét is.

- (1) $\rho: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$, $k \mapsto |k|$; $\sigma: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$;
- (2) $\rho: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $q \mapsto \frac{q}{2}$; $\sigma: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $q \mapsto \begin{cases} q & \text{ha } q \geq 1, \\ 2q - 1 & \text{különben;} \end{cases}$
- (3) $\rho: P_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$, $A \mapsto A$ legnagyobb eleme; $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow P_{\text{fin}}(\mathbb{N})$, $n \mapsto \{1, 2, \dots, n\}$. [Itt $P_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ az $\mathbb{N}$ halmaz összes véges részhalmazainak halmazát jelöli.]

1.4. Feladat. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

- (1) Minden leképezés injektív vagy szürjektív.

- (2) Egy leképezés bijektív leképezéssel vett szorzata pontosan akkor injektív, ha maga a leképezés injektív.
- (3) Minden leképezés előáll egy szürjektív és egy injektív leképezés szorzataként.
- (4) Véges halmaz minden szürjektív transzformációja injektív.
- (5) Van olyan végtelen halmaz, amelynek minden szürjektív transzformációja injektív.

1.5. Feladat. Adjon meg

- (1) injektív, de nem szürjektív,
- (2) szürjektív, de nem injektív

transzformációt az $\mathbb{N}$ halmazon.

1.6. Feladat. Tekintsük a $\xi, \eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\xi: x \mapsto \begin{cases} -x & \text{ha } x \geq 0, \\ 1-x & \text{különben} \end{cases} \quad \text{és} \quad \eta: \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{ha } x \geq 1, \\ 1-x^2 & \text{különben} \end{cases}$$

transzformációkat. Adja meg a $\xi\eta$ és $\eta\xi$ szorzatot, és döntse el, hogy a $\xi, \eta, \xi\eta$ és $\eta\xi$ transzformációk injektívek-e, illetve szürjektívek-e. Ha valamelyik bijektív, akkor határozza meg az inverzét is.

2. PERMUTÁCIÓK

2.1. Feladat. Írja fel az alábbi S_7 -beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

$$(1) \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(2) \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

$$(3) \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.2. Feladat. Adja meg a következő S_7 -beli, páronként idegen ciklusok szorzataként előállított permutációkat kétsoros írásmódban:

$$(1) \delta = (1\ 3\ 6)(2\ 7\ 5\ 4),$$

$$(2) \varepsilon = (1\ 7)(2\ 6)(3\ 4\ 5),$$

$$(3) \eta = (1\ 5\ 4\ 2\ 7\ 3).$$

2.3. Feladat. Az előző két feladatban bevezetett permutációkból kiindulva adja meg az alábbi S_7 -beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

$$(\beta\alpha)^{-1}, \quad \varepsilon\eta^{-1}\beta\gamma\delta^{-1}, \quad \alpha^n \ (n \in \mathbb{N}), \quad ((\eta\beta)^{2006}\delta^{2007})^{-1}.$$

2.4. Feladat. Adja meg a következő S_9 -beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

$$(1) (\alpha^{-1}\beta\alpha)^{109}, \text{ ahol}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 1 & 9 & 2 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 2 & 5 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(2) \left((1\ 5\ 4\ 3\ 7\ 2)^9 ((2\ 9\ 3)(4\ 5\ 2\ 7))^{120} (4\ 8\ 1) \right)^{-1}.$$

2.5. Feladat. Keresse meg mindazokat a $\sigma \in S_8$ permutációkat, amelyekre teljesül, hogy

$$((1\ 2\ 3\ 4)(7\ 3\ 8))^3 \sigma(3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1}.$$

2.6. Feladat. Döntse el, hogy az első két feladatban bevezetett $\alpha, \dots, \eta \in S_7$ permutációk, valamint a segítségükkel megadott alábbi permutációk párosak-e vagy páratlanok:

$$(\eta^{-1}\delta^{112})^{111}, \quad (\varepsilon\gamma\alpha)^{-1}(\beta^{-1}\delta\eta^9)^2.$$

2.7. Feladat. Igazolja, hogy minden k hosszúságú $\gamma \in S_n$ ciklusra

$$(1) \gamma^k = \text{id},$$

$$(2) \gamma^\ell \neq \text{id}, \text{ ha } \ell \in \mathbb{N} \text{ kisebb } k\text{-nál.}$$

2.8. Feladat. Igazolja, hogy minden $\pi \in S_n$ permutációra $\pi^{n!} = \text{id}$. Hogyan lehet megadni a legkisebb olyan $k \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $\pi^k = \text{id}$?

2.9. Feladat. Mutassa meg, hogy S_9 minden eleme előáll

- (1) az $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ 9)$ transzpozíciók szorzataként;
- (2) az $(1\ 2)$ és $(1\ 2\ 3 \dots 9)$ ciklusok szorzataként.

2.10. Feladat. Keresse meg mindazokat a $\pi \in S_6$ permutációkat, amelyekre teljesül, hogy

- (1) $\pi^2 = (1\ 2)$;
- (2) $\pi^2 = (1\ 2)(3\ 4)$.

3. KOMPLEX SZÁMOK

3.1. Feladat. Határozza meg az alábbi kanonikus alakban megadott komplex számok trigonometrikus alakját:

- (1) $0, 1, -1, i, -i;$
- (2) $1 - i, -3 - \sqrt{3}i, -\sqrt{2} + \sqrt{6}i.$

3.2. Feladat. Határozza meg az alábbi trigonometrikus alakban megadott komplex számok kanonikus alakját:

$$u = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), \quad v = 5 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right),$$

$$w = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right).$$

3.3. Feladat. Számolja ki a lehető legegyszerűbben a megadott kifejezések értékét:

$$t = \frac{1}{1-2i} - \frac{1}{1+2i}, \quad u = \overline{\left(\frac{3-3i}{-3+\sqrt{3}i} \right)^{17}}, \quad v = \left(\frac{i(-1-i)}{|1-i|} \right)^{11},$$

$$w = \frac{3+i}{(-1+i)(3-2i)} + \frac{3-i}{(-1-i)(3-2i)}, \quad x = \left(\frac{(2-i)(-3+i)}{|(2-i)(-3+i)|} \right)^{1001},$$

$$y = \left(\frac{(-2-2i)(-5\sqrt{3}+15i)}{\sqrt{3}-i} \right)^{389}, \quad z = \frac{(7\sqrt{3}-21i)^{79}}{\left((-1-i)(-\sqrt{21}+\sqrt{7}i) \right)^{103}}.$$

3.4. Feladat. Adja meg a

$$\begin{array}{cccccccl} (-5+2i)x_1 & + & (1+i)x_2 & + & (3-9i)x_3 & + & 4ix_4 & = & 1-i \\ (-3+i)x_1 & + & (1+i)x_2 & + & (2-7i)x_3 & + & 3ix_4 & = & 1-i \\ (1-i)x_1 & + & (1+i)x_2 & + & -3ix_3 & + & ix_4 & = & 1-i \end{array}$$

lineáris egyenletrendszer általános megoldását.

3.5. Feladat. Végezze el az alábbi gyökvonásokat:

$$\sqrt[15]{0}, \quad \sqrt[9]{-1}, \quad \sqrt[11]{i}, \quad \sqrt[10]{-2+2i}, \quad \sqrt[89]{\frac{\sqrt{3}-3i}{-3+3i}}.$$

3.6. Feladat. Döntse el a megadott n pozitív egész és z komplex szám esetén, hogy n -edik egységgyök-e z , és ha igen, akkor primitív n -edik egységgyök-e. Ha az utóbbi kérdésre igenlő a válasz, akkor állítsa elő az összes n -edik egységgyököt z 'kis' nemnegatív egész kitevős hatványaként (pl. $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ primitív harmadik egységgyök, és $1 = z^0$, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = z^2$, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = z$):

- (1) $n = 8, z = 1 - i;$
- (2) $n = 8, z = -i;$
- (3) $n = 6, z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;$
- (4) $n = 10, z = \cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10};$

$$(5) \quad n = 7, \quad z = \cos \frac{8\pi}{7} + i \sin \frac{8\pi}{7}.$$

3.7. Feladat. Trigonometrikus alakúak-e a következő komplex számok:

$$t = 0(\cos \pi + i \sin \pi), \quad u = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right), \\ v = -1 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right), \quad w = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right).$$

Amelyik nem trigonometrikus alakú, azt adja meg trigonometrikus alakban.

3.8. Feladat. Igaz-e, hogy

$$\sqrt[42]{(-2\sqrt{3} - 2i)^7} = \left(\sqrt[42]{-2\sqrt{3} - 2i} \right)^7 = \sqrt[6]{-2\sqrt{3} - 2i}?$$

3.9. Feladat. Az alábbi komplex számok mely $n \in \mathbb{N}$ -re n -edik egységgyökök, illetve primitív n -edik egységgyökök:

$$-i, \quad -1 + i, \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \cos \frac{7\pi}{2007} + i \sin \frac{7\pi}{2007}.$$

3.10. Feladat. Adja meg a $\frac{\pi}{12}$ szög szinuszát és koszinuszát egész számokból alkotott gyökös kifejezésként. [Pl. $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.]

3.11. Feladat. Igazolja a következő egyenlőséget tetszőleges α szögre:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \quad \text{és} \quad \sin 3\alpha = -4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha.$$

3.12. Feladat. Mutassa meg, hogy

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}.$$

4. VEKTORRENDSZER ÉS MÁTRIX RANGJA, ALTEREK BÁZISAI

4.1. Feladat. Határozza meg a következő valós mátrixok rangját:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

Mekkora ugyanezen mátrixok rangja, ha racionális, illetve komplex számtest feletti mátrixként tekintjük őket?

4.2. Feladat. Határozza meg

- (1) az $\mathbb{R}^5$ vektortérben a $(3, -1, 3, 2, 5)$, $(5, -3, 2, 3, 4)$, $(-1, 3, 5, 0, 7)$, $(7, -5, 1, 4, 1)$
- (2) a $\mathbb{Q}^4$ vektortérben a $(1, 1, 4, -1)$, $(2, 5, 5, 1)$, $(4, 0, 3, 1)$, $(1, 2, 3, 0)$
- (3) a $\mathbb{C}^4$ vektortérben a $(2i, -2, 1, 1)$, $(1, i, 0, -i)$, $(-1 - i, 1, 1, i)$

vektorrendszer rangját.

4.3. Feladat. Válasszon ki az előző feladatban megadott vektorrendszerekből maximális lineárisan független részrendszert.

4.4. Feladat. Adja meg

- (1) az $\mathbb{R}^4$ -beli $[(3, 1, 0, 0), (1, 1, 0, -1), (1, -1, 0, 2)]$
- (2) a $\mathbb{Q}^5$ -beli $[(1, 4, -2, 0, -1), (-2, 0, 0, 1, 1), (1, -2, 2, -1, 1), (0, 2, 0, 0, 1)]$
- (3) a $\mathbb{C}^3$ -beli $[(1 - i, i, 0), (-1 - i, 1, 0)]$

alteret elemei segítségével. Állapítsa meg, hogy ezekben az alterekben bázist alkotnak-e a megadott vektorok.

4.5. Feladat. Adjon meg bázist

- (1) a 4.4. Feladatban megadott három
- (2) az $\mathbb{R}^5$ -beli $\{(2a - b + c, a + c, -a + b, b + c, b + c) \in \mathbb{R}^5 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$
- (3) a $\mathbb{Q}^5$ -beli $\{(3a - 4b + 2c, 2a + b - c, a + c, b + c, a + b + c) \in \mathbb{Q}^5 : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
- (4) a $\mathbb{C}^4$ -beli $\{(-b + c, ia + c, -a + ib, b + c) \in \mathbb{C}^4 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$

altérben.

4.6. Feladat. Tekintsük

- (1) az $\mathbb{R}^4$ vektortérben az $U = [(1, 1, 0, -1), (1, -1, 0, 2), (3, 1, 0, 0)]$ és $V = [(-1, 0, 1, -1), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 2, -1)]$
- (2) a $\mathbb{Q}^5$ vektortérben az $U = [(2, 2, 0, -1, 0), (3, 0, 2, -2, 1), (1, 0, 2, 2, 0)]$ és $V = [(1, -2, 2, -1, 1), (-2, 0, 0, 1, 1), (0, 2, 0, 0, 1)]$
- (3) a $\mathbb{C}^3$ vektortérben az $U = [(i, i, 1)]$ és $V = [(1 - i, i, 0), (-1 - i, 1, 0)]$

altereket. Adjon meg egy-egy bázist az $U + V$ és $U \cap V$ alterekben.

4.7. Feladat. Legyen M tetszőleges racionális mátrix. Igazolja, hogy M rangja független attól, hogy M -et racionális, valós vagy komplex mátrixnak tekintjük.

4.8. Feladat. Mutassa meg, hogy bármely T test feletti $n \times n$ -es A mátrixra ekvivalensek az alábbi tulajdonságok:

- (1) A sorvektorainak rendszere lineárisan független,
- (2) A oszlopvektorainak rendszere lineárisan független,
- (3) A rangja n ,
- (4) A determinánsa nem 0.

4.9. Feladat. Legyen V tetszőleges vektortér és benne $v_1, v_2, \dots, v_k$ tetszőleges vektorok. Milyen feltételek mellett 0, illetve 1 a $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektorrendszer rangja?

4.10. Feladat. Legyen T test, valamint legyen $A \in T^{k \times m}$ és $B \in T^{k \times n}$. Jelölje C azt a $T^{k \times (m+n)}$ -beli mátrixot, amely A és B oszlopainak egymás után írásával keletkezik. Igazolja, hogy $r(C) \leq r(A) + r(B)$.

4.11. Feladat. Legyen T test, és legyen $A, B \in T^{k \times m}$. Bizonyítsa be, hogy $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

4.12. Feladat. Legyen T test, valamint legyen $A \in T^{k \times m}$ és $B \in T^{m \times n}$. Mutassa meg, hogy $r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$.

5. LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK I.

A sík, illetve tér vektorterét a szokásos módon azonosítjuk $\mathbb{R}^2$ -tel, illetve $\mathbb{R}^3$ -bel. Továbbá $\mathbb{R}\mathbb{C}$ jelöli $\mathbb{C}$ -t mint $\mathbb{R}$ fölötti vektorteret.

5.1. Feladat. Döntse el, hogy lineáris leképezések-e az alábbi vektorterek között megadott leképezések:

- (1) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, φ a tér vektorainak merőleges vetítése az x, y tengelyek által kifeszített síkra;
- (2) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x, y, \frac{x+y}{2})$;
- (3) $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_2, 2x_3, 3x_4)$;
- (4) $\varphi: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^4$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, x_1+1, x_2+2, x_3+3)$;
- (5) $\varphi: \mathbb{R}\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $a+bi \mapsto (a, b)$ ($a, b \in \mathbb{R}$);
- (6) $\varphi: \mathbb{R}\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $a+bi \mapsto (a, b)$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

5.2. Feladat. Döntse el, hogy lineáris transzformációk-e az alábbi vektorterekben megadott transzformációk:

- (1) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, φ a sík vektorainak az origó körüli elforgatása $\frac{\pi}{3}$ szöggel;
- (2) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, φ a tér vektorainak merőleges vetítése az $x+y+z=0$ síkra;
- (3) $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3)$;
- (4) $\varphi: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3)$;
- (5) $\varphi: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1-x_2, x_2-x_3, x_3-x_1)$;
- (6) $\varphi: \mathbb{R}\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$.

5.3. Feladat. Tekintsük a megadott vektorterek alábbi bázisát:

- (1) $\mathbb{R}^2$: $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (0, -1)$;
- (2) $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 3$): $u_1 = (0, 1, 1, \dots, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1, 1, \dots, 1)$, $\dots$, $u_k = (1, 1, \dots, 1, 0)$;
- (3) $\mathbb{Q}^k$ ($k \geq 2$): $u_1 = (1, 1, \dots, 1)$, $u_2 = (1, 1, \dots, 1, 0)$, $u_3 = (1, \dots, 1, 0, 0)$, $\dots$, $u_k = (1, 0, \dots, 0)$;
- (4) $\mathbb{C}^k$ ($k \geq 2$): $u_1 = (0, \dots, 0, i)$, $u_2 = (0, \dots, 0, i, 0)$, $\dots$, $u_k = (i, 0, \dots, 0)$;
- (5) $\mathbb{R}\mathbb{C}$: $u_1 = 1+i$, $u_2 = 1-i$.

(a) Adja meg az 5.1. Feladatbeli lineáris leképezések mátrixát a standard bázisokban, valamint az itt megadott bázisokban.

(b) Adja meg az 5.2. Feladatbeli lineáris transzformációk mátrixát a standard bázisban, valamint az itt megadott bázisban.

5.4. Feladat. Adja meg a bázisáttérés mátrixát az alábbi két bázis között mindkét irányban:

- (1) $\mathbb{R}^2$: a standard bázis és az 5.3. Feladatbeli bázis;
- (2) $\mathbb{R}^2$: az 5.3. Feladatbeli bázis és az $(1, -1)$, $(-1, 2)$ bázis;
- (3) $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{Q}^k$ és $\mathbb{C}^k$ ($k = 3, 4$): a standard bázis és az 5.3. Feladatbeli bázis;
- (4) $\mathbb{R}\mathbb{C}$: a standard bázis és az 5.3. Feladatbeli bázis;
- (5) $\mathbb{R}\mathbb{C}$: az 5.3. Feladatbeli bázis és az $1 + \sqrt{3}i$, $-\sqrt{3} + i$ bázis.

5.5. Feladat. Tudjuk, hogy a φ lineáris leképezés, illetve transzformáció mely vektorokat rendeli egy adott bázis elemeihez. Adja meg φ hozzárendelési szabályát (l. 5.1. és 5.2. Feladat):

- (1) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $e_1\varphi = e_1$, $e_2\varphi = -e_2$;
- (2) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $e_1\varphi = e_2$, $e_2\varphi = -e_1$, $e_3\varphi = e_3$;
- (3) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $e_1\varphi = e_3$, $e_2\varphi = e_1$;
- (4) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $u_1\varphi = u_2\varphi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $u_3\varphi = (1, 1, 0)$;
- (5) $\varphi: \mathbb{R}\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $u_1\varphi = e_1$, $u_2\varphi = e_2$;
- (6) $\varphi: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $u_1\varphi = 0$, $u_2\varphi = u_1 + u_2$, $u_3\varphi = u_2 + u_3$, $u_4\varphi = 0$;
- (7) $\varphi: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^4$, $u_1\varphi = u_2$, $u_2\varphi = u_3$, $u_3\varphi = u_3 - u_4$.

Itt $e_1, e_2, \dots$ az adott vektortér standard bázisát, $u_1, u_2, \dots$ pedig az 5.3. Feladatban megadott bázisát jelöli.

5.6. Feladat. Igazolja, hogy az alábbi leképezések (transzformációk) lineárisak:

- (1) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, φ a sík vektorainak az origó körüli elforgatása α szöggel;
- (2) $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_2, 2x_3, \dots, (n-1)x_n)$;
- (3) $\varphi: \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^n$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_n)$;
- (4) $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1 - x_2, \dots, x_{n-1} - x_n, x_n - x_1)$.

5.7. Feladat. Tetszőleges $n \geq 3$ egész esetén adja meg az 5.6. Feladatbeli (2) lineáris leképezés, illetve (1),(3),(4) lineáris transzformáció mátrixát a standard bázis(ok)ban, valamint az 5.3. Feladatban megadott bázis(ok)ban.

5.8. Feladat. Tudjuk, hogy a φ lineáris leképezés mely vektorokat rendeli egy adott bázis elemeihez. Adja meg φ hozzárendelési szabályát (l. 5.6. Feladat):

- (1) $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$, $u_1\varphi = 0$, $u_2\varphi = u_1 + u_2$, $u_3\varphi = u_2 + u_3, \dots, u_{n-1}\varphi = u_{n-2} + u_{n-1}$, $u_n\varphi = 0$;
- (2) $\varphi: \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^{n+1}$, $u_1\varphi = u_2$, $u_2\varphi = u_3, \dots, u_{n-1}\varphi = u_n$, $u_n\varphi = u_n - u_{n+1}$.

Itt $u_1, u_2, \dots$ az adott vektortérnek az 5.3. Feladatban megadott bázisát jelöli.

5.9. Feladat. Adja meg a bázisáttérés mátrixát tetszőleges $k \geq 3$ egész esetén az $\mathbb{R}^k, \mathbb{Q}^k$ és $\mathbb{C}^k$ vektorterekben a standard bázis és az 5.3. Feladatbeli bázis között mindkét irányban.

6. LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK II.

6.1. Feladat. Tekintsük az alábbi φ és ψ lineáris leképezéseket, illetve transzformációkat:

- (1) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{C}$, $(a, b)\varphi = a - bi$,
 $\psi: \mathbb{R}\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(a + bi)\psi = (b, a)$ ($a, b \in \mathbb{R}$);
- (2) $\varphi: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$, $(x, y)\varphi = (x + y, x - y)$,
 $\psi: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^3$, $(x, y)\psi = (x, y, x + y)$;
- (3) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z)\varphi = (x - y, y - z)$,
 $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z)\psi = (y, z - x)$;
- (4) $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^3)$ és $\psi \in \text{Hom}(\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^3)$ az a lineáris leképezés, amelynek mátrixa a standard bázisokban

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad A_\psi = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

- (5) $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}\mathbb{C}, \mathbb{R}\mathbb{C})$ az a lineáris transzformáció, amelynek mátrixa a standard bázisban

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$\psi \in \text{Hom}(\mathbb{R}\mathbb{C}, \mathbb{R}\mathbb{C})$ pedig az, amelynek mátrixa az $i, 1 - i$ bázisban

$$A_\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

- (6) $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ és $\psi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ a sík vektorainak tükrözése az x , illetve az y tengelyre;
 - (7) $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ és $\psi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ a tér vektorainak tükrözése az origóra, illetve a tér vektorainak merőleges vetítése az x, y tengelyek által kifeszített síkra.
- (a) Döntse el, hogy értelmezve van-e φ és ψ összege, és ha igen, akkor adja meg a $\varphi + \psi$ összeget ugyanabban a formában, ahogyan φ -t és ψ -t megadja a feladat.
- (b) Döntse el, hogy értelmezve van-e φ és ψ szorzata, és ha igen, akkor adja meg a $\varphi\psi$ szorzatot ugyanabban a formában, ahogyan φ -t és ψ -t megadja a feladat.

6.2. Feladat. Döntse el, hogy előállnak-e a $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ lineáris leképezések, illetve transzformációk a megadott ξ és η lineáris leképezések, illetve transzformációk lineáris kombinációjaként:

- (1) $\xi: \mathbb{R}\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(a + bi)\xi = (a - b, b, a + b)$,
 $\eta: \mathbb{R}\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(a + bi)\eta = (a, 0, b)$,
 $\varphi_1: \mathbb{R}\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(a + bi)\varphi_1 = (a, -a, -b)$,
 $\varphi_2: \mathbb{R}\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(a + bi)\varphi_2 = (b, -b, -a)$ ($a, b \in \mathbb{R}$);
- (2) ξ és $\eta \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ a sík vektorainak merőleges vetítése az x , illetve y tengelyre, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ pedig rendre az identikus transzformáció, a sík vektorainak tükrözése az x tengelyre, valamint a sík vektorainak elforgatása az origó körül $\frac{\pi}{2}$ szöggel.

6.3. Feladat. Határozza meg a 6.1. Feladatbeli lineáris leképezések, illetve transzformációk rangját.

6.4. Feladat. Határozza meg az alábbi φ lineáris transzformációk sajátértékeit, és adjon meg bázist minden sajátértékhez tartozó sajátaltérben:

- (1) $\varphi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $(x, y)\varphi = (-y, x)$;
- (2) $\varphi: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$, $(x, y)\varphi = (-y, x)$;
- (3) $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $(x_1, x_2, x_3, x_4)\varphi = (x_3, x_2 - 3x_4, -x_1, 2x_4)$;
- (4) $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ a sík vektorainak merőleges vetítése az x tengelyre;
- (5) $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ a sík vektorainak tükrözése az x tengelyre;
- (6) $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ a sík vektorainak tükrözése az origóra;
- (7) $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ a sík vektorainak elforgatása az origó körül $\frac{\pi}{2}$ szöggel;
- (8) $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ a tér vektorainak tükrözése az $x + y + z = 0$ síkra.

6.5. Feladat. Döntse el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkot-e a sík lineáris transzformációinak $\text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ vektorterében az identikus transzformáció, az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükrözés és az origó körüli elforgatás $\frac{\pi}{3}$ szöggel.

6.6. Feladat. Legyen ξ és $\eta \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ a sík vektorainak merőleges vetítése az x , illetve y tengelyre. Határozza meg, melyik alteret generálja $\{\xi, \eta\}$ a $\text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ vektortérben.

6.7. Feladat. Oldja meg a 4.11. és 4.12. Feladatot a lineáris leképezésekről tanultak felhasználásával.

6.8. Feladat. Döntse el, hogy van-e olyan $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ lineáris transzformáció, amelynek két különböző bázisban felírt mátrixa

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
- (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
- (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
- (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;
- (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
- (6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
- (7) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. KVADRATIKUS ALAKOK, EUKLIDESZI TEREK

7.1. Feladat. Adott a V vektortéren egy kvadratikus alak a standard bázisban felírt A mátrixával, illetve f koordinátás alakjában:

- (1) $V = \mathbb{Q}^3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
- (2) $V = \mathbb{R}^3$, $f = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2$;
- (3) $V = \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;
- (4) $V = \mathbb{Q}^3$, $f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;
- (5) $V = \mathbb{R}^4$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
- (6) $V = \mathbb{R}^4$, $f = 8x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 8x_2x_4$.

- (a) A koordinátás alakban megadott kvadratikus alaknak írja fel a mátrixát, a mátrixával megadottat pedig írja fel koordinátás alakban.
- (b) Hozza kanonikus alakra a kvadratikus alakot, és adjon meg olyan bázist V -ben, amelyben ez a kvadratikus alak koordinátás alakja.
- (c) Ha a kvadratikus alak valós, akkor adja meg a normálalakját is, és állapítsa meg, hogy definitesség szempontjából melyik csoportba tartozik.

7.2. Feladat. Az adott A_i ($i = 0, 1, \dots, 4$) valós mátrixhoz keressen olyan D_i diagonális mátrixot és olyan Q_i nemelfajuló mátrixot, amelyre $A_i = Q_i D_i Q_i^T$:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \\
 A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, & A_2 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & A_4 &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

7.3. Feladat. Adjon meg ortonormált bázist a négydimenziós euklideszi tér megadott altereiben:

- (1) $U = [(1, 1, 1, 1), (3, -1, 3, -1), (2, 3, -2, -1)]$,
- (2) $V = [(1, 2, 1, 3), (4, 1, 1, 1), (3, 1, 1, 0)]$,
- (3) $W = \{(a, b, c, d) : 3a - b - c + d = 0, a + 2b - c - d = 0\}$,
- (4) továbbá a 4.4. Feladat (1) és a 4.6. Feladat (1) részében definiált alterekben.

7.4. Feladat. A 7.1. Feladatban megadott valós kvadratikus alakokat hozza főtengety-transzformációval kanonikus alakra, és adjon meg minden kvadratikus alak esetén olyan ortonormált bázist a megfelelő euklideszi térben, amelyben a kvadratikus alaknak ez a koordinátás alakja.

7.5. Feladat. A 7.2. Feladatban megadott A_i ($i = 0, 1, \dots, 4$) valós mátrixhoz keressen olyan D_i diagonális mátrixot és olyan Q_i ortogonális mátrixot, amelyre $A_i = Q_i D_i Q_i^{-1}$.

7.6. Feladat. Tekintsük az alábbi két kvadratikus alakot $\mathbb{R}^n$ -en:

$$f = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < k \leq n} x_i x_k, \quad g = \sum_{1 \leq i < k \leq n} x_i x_k.$$

- (a) Hozza kanonikus alakra a két kvadratikus alakot, és mindkét esetben adjon meg olyan bázist $\mathbb{R}^n$ -ben, amelyben ez a kvadratikus alak koordinátás alakja.
- (b) Hozza főtengety-transzformációval kanonikus alakra ezeket a kvadratikus alakokat, és adjon meg mindkét esetben olyan ortonormált bázist $\mathbb{R}^n$ -ben, amelyben a kvadratikus alaknak ez a koordinátás alakja.
- (c) Fogalmazza meg az (a) és (b) részben kapott eredmények mátrixokra vonatkozó megfelelőjét.

8. TEST FELETTI POLINOMGYŰRŰK I.

8.1. Feladat. Végezze el az alábbi maradékos osztást a megadott polinomgyűrűben:

- (1) $\mathbb{R}[x]$ -ben $(x^5 - 5x^3 + 5x + 1) : (3x^3 - 2x + 1)$,
- (2) $\mathbb{Q}[x]$ -ben $(x^5 - 5x^3 + 5x + 1) : (3x^3 - 2x + 1)$,
- (3) $\mathbb{R}[x]$ -ben $(x^4 - 10x^2 + 1) : (x^2 - 2\sqrt{2}x - 1)$,
- (4) $\mathbb{C}[x]$ -ben $(x^3 - 2) : (x^2 + ix - 1)$,
- (5) $\mathbb{Z}_2[x]$ -ben $(x^5 + x^4 + x^2 + x) : (x^4 + x^2 + \bar{1})$,
- (6) $\mathbb{Z}_5[x]$ -ben $(x^5 + \bar{2}x^4 - x^2 - x + \bar{1}) : (\bar{2}x^3 - x - \bar{1})$,
- (7) $\mathbb{Z}_7[x]$ -ben $(\bar{3}x^5 - x^3 - \bar{2}x^2 + x - \bar{1}) : (x^3 - \bar{2}x^2 + x - \bar{1})$.

8.2. Feladat. Határozza meg az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét a megadott polinomgyűrűben:

- (1) $x^5 - 5x^3 + 5x + 1, 3x^3 - 2x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$,
- (2) $x^4 - 10x^2 + 1, x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 \in \mathbb{R}[x]$,
- (3) $ix^3 - 1, x^5 - x^3 + x^2 - 1 \in \mathbb{C}[x]$,
- (4) $x^4 + x^2 + \bar{1}, x^5 + x^4 + x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$,
- (5) $x^4 + \bar{1}, x^3 - x \in \mathbb{Z}_3[x]$,
- (6) $x^4 + x^3 + \bar{2}x^2 - \bar{2}x + \bar{2}, x^4 - x^2 - \bar{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$.

8.3. Feladat. Adja meg az R polinomgyűrűben a megadott polinomegyenlet összes (u, v) megoldását, valamint azt a megoldást, ahol u a lehető legkisebb fokú.

- (1) $R = \mathbb{R}[x]$: $(x^5 - 3x^4 + 2x^2)u + (2x^4 - x^3)v = x$;
- (2) $R = \mathbb{Q}[x]$: $(x^4 + 2x^3 + x + 1)u + (x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1)v = x^3 - 2x$;
- (3) $R = \mathbb{C}[x]$: $(x - i)u + (x^2 + 1)v = x^3 + i$;
- (4) $R = \mathbb{Z}_2[x]$: $(x^4 + x^2 + \bar{1})u + (x^5 + x^4 + x^2 + x)v = x^4 + x^3 + x^2$;
- (5) $R = \mathbb{Z}_5[x]$: $(x^3 + x^2 + \bar{2}x - \bar{2})u + (x^3 - \bar{2}x^2 - x - \bar{1})v = x^2 + \bar{1}$;
- (6) $R = \mathbb{Z}_7[x]$: $(x^3 + \bar{3}x^2 - \bar{3}x - \bar{1})u + (x^4 + x^2 + \bar{3})v = x^4$.

8.4. Feladat. Legyenek adottak az alábbi polinomok:

$$\begin{aligned} f &= x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 12x^2 - 2x - 4 \in \mathbb{R}[x], \\ g &= x^3 + 3x + 2i \in \mathbb{C}[x], \\ u &= x^3 + x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x], \\ v &= x^4 - x^3 - x^2 + x \in \mathbb{Z}_3[x], \\ w &= x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x], \\ z &= x^3 + \bar{2}x^2 - \bar{3} \in \mathbb{Z}_7[x]. \end{aligned}$$

Horner-elrendezés alkalmazásával

- (1) számolja ki az $f(-1), g(2i), v(-\bar{1}), w(\bar{2}), z(-\bar{3})$ helyettesítési értékeket;
- (2) döntse el, hogy gyöke-e, és ha igen, akkor hány-szoros gyöke f -nek -2 , g -nek $-i$, u -nak $\bar{1}$, v -nek $\bar{1}$, w -nek $-\bar{2}$ és z -nek $\bar{3}$;
- (3) végezze el az $f : (x + 1)$, $g : (x - 1)$, $u : (x + \bar{1})$, $v : (x - \bar{1})$, $w : (x - \bar{2})$ és a $z : (x + \bar{2})$ maradékos osztást.

8.5. Feladat. Adja meg elempárok halmazaként az előző feladatbeli u, v, w, z , valamint a következő polinomokhoz tartozó polinomfüggvényeket:

$$\begin{aligned} f &= x^5 + x^3 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x], \\ g &= -x^4 - x^3 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x], \\ h &= x^6 + x^4 + x^3 + \bar{2}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x], \\ p &= x^7 + \bar{2}x^4 - \bar{3}x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_7[x]. \end{aligned}$$

Döntse el, hogy vannak-e közöttük azonosak.

8.6. Feladat. Határozza meg azt a legkisebb fokú $\mathbb{Z}_7$ -beli polinomot, amely $\bar{2}x$ -et ad maradékul $(x - \bar{1})^2$ -nel osztva, és $\bar{3}x$ -et ad maradékul $(x - \bar{2})^3$ -nel osztva.

8.7. Feladat. Legyen K tetszőleges test, $f, g, u, v \in K[x]$ tetszőleges polinomok, és jelölje d az f és g polinomok legnagyobb közös osztóját $K[x]$ -ben. Határozza meg az u és v polinomok legnagyobb közös osztóját $K[x]$ -ben, ha tudjuk, hogy $fu + gv = d$.

8.8. Feladat. Legyen K, L két test, melyre $K \subseteq L$, és legyen $f, g \in K[x]$. Ekkor persze $f, g \in L[x]$ is fennáll. Igazolja, hogy

- (1) $f \mid g$ pontosan akkor teljes $K[x]$ -ben, ha $L[x]$ -ben teljesül,
- (2) az f és g polinomnak ugyanaz a legnagyobb közös osztója, illetve legkisebb közös többszöröse $K[x]$ -ben, mint $L[x]$ -ben,
- (3) bármely $h \in K[x]$ és $u, v \in L[x]$ polinomok esetén, ha $fu + gv = h$, akkor $u, v \in K[x]$, és így az $fu + gv = h$ egyenletnek ugyanazok a polinompárok a megoldásai $K[x]$ -ben, mint $L[x]$ -ben.

8.9. Feladat. Mutassa meg, hogy $x^d - 1 \mid x^n - 1$ teljesül $\mathbb{Q}[x]$ -ben, ha $d, n \in \mathbb{N}$ -re $d \mid n$.

8.10. Feladat. Mely a, b valós, illetve $\mathbb{Z}_p$ -beli (p prímszám) együtthatók esetén teljesül $(x - 1)^2 \mid ax^{n+1} + bx^n + 1$?

8.11. Feladat. Legyen p prímszám és f, g két polinom $\mathbb{Z}_p$ felett. Igazolja, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ polinomfüggvények pontosan akkor azonosak, ha

$$x(x - \bar{1})(x - \bar{2}) \cdots (x - \overline{p-1}) \mid f - g.$$

8.12. Feladat. Mutassa meg, hogy tetszőleges p prímszámra $\mathbb{Z}_p[x]$ -ben fennáll az

$$x^p - x = x(x - \bar{1})(x - \bar{2}) \cdots (x - \overline{p-1})$$

egyenlőség.

9. TEST FELETTI POLINOMGYŰRŰK II.

VÉGES TESTEK

9.1. Feladat. Adja meg az alábbi valós együtthatós polinomok irreducibilis felbontását a komplex, illetve a valós számtest fölött:

- (1) $x^3 - 1$,
- (2) $x^4 - 1$,
- (3) $x^3 + 1$,
- (4) $x^4 + 1$,
- (5) $x^4 + x^2 + 1$,
- (6) $x^6 - x^3 + 1$.

9.2. Feladat. Adjon meg

- (1) harmadfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_5$ fölött;
- (2) negyedfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_3$ fölött;
- (3) ötödfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_3$ fölött;
- (4) negyedfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_2$ fölött;
- (5) ötödfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_2$ fölött;
- (6) hetedfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_2$ fölött.

9.3. Feladat. Döntse el, hogy irreducibilis-e az alábbi polinom a megadott polinomgyűrűben:

- (1) $x^3 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$,
- (2) $x^4 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$,
- (3) $x^4 + x^3 + x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$,
- (4) $x^4 + x^3 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$,
- (5) $x^5 - \bar{2}x^3 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$.

9.4. Feladat. Legyen p prímszám, f pedig egy n -edfokú irreducibilis polinom $\mathbb{Z}_p$ fölött. Adja meg a $\mathbb{Z}_p[x]/\langle f \rangle$ test alábbi elemét n -nél kisebb fokú polinom osztályaként:

- (1) $p = 2$, $f = x^3 + x^2 + \bar{1}$; $\overline{x^2 + x \cdot x + \bar{1}}$, $\overline{x + \bar{1}}^{-1}$, $\overline{x^2 \cdot x^2 + x + \bar{1}}^{-1}$;
- (2) $p = 3$, $f = x^2 + \bar{1}$; $\overline{\bar{1} - x \cdot \bar{1} + x}^{-1}$, $\overline{\bar{1} - x}^{-2}$;
- (3) $p = 5$, $f = x^3 + x + \bar{1}$; $\overline{x}^{-1}$, $\overline{(x^2 + \bar{1})}^{-5}$.

9.5. Feladat. Adja meg az alábbi valós együtthatós polinomok irreducibilis felbontását a komplex, illetve a valós számtest fölött:

- (1) $x^n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$),
- (2) $x^{2n} - x^n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

9.6. Feladat. Mutassa meg, hogy az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben pontosan akkor teljesül $x^2 + x + 1 \mid x^{2k} + x^k + 1$, ha $3 \nmid k$.

9.7. Feladat. Legyen p prímszám, f pedig egy n -edfokú irreducibilis polinom $\mathbb{Z}_p$ fölött. Adja meg a $\mathbb{Z}_p[x]/\langle f \rangle$ test elemeinek összegét.

10. RACIONÁLIS EGYÜTTHATÓS POLINOMOK.
VÉGES TESTEK II.

10.1. Feladat. Döntse el, hogy van-e racionális gyöke az alábbi egész, illetve racionális együtthatós polinomoknak:

- (1) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$,
- (2) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$,
- (3) $x^4 - \frac{19}{6}x^3 - \frac{7}{6}x^2 - \frac{13}{3}x + 2$,
- (4) $x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{24}x^3 - \frac{19}{24}x^2 - \frac{5}{24}x + \frac{1}{4}$,
- (5) $x^4 - 1, 3x^3 + 1, 5x^2 - 1, 8x - 2, 4$.

10.2. Feladat. Döntse el, hogy irreducibilisek-e az alábbi polinomok a racionális számtest fölött, és ha nem, akkor adja meg az irreducibilis felbontásukat $\mathbb{Q}[x]$ -ben.

- (1) $x^3 - 2$,
- (2) $x^4 - 1$,
- (3) $2x^3 - 5x^2 + 5x - 3$,
- (4) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$,
- (5) $x^5 + x^3 - 2x^2 - 2$,
- (6) $x^5 - 12x^4 + 36x^2 - 12$.

10.3. Feladat. Határozza meg a megadott elemek rendjét az alábbi véges testekben, és döntse el, hogy ezek közül mely elemek primitívek és melyek nem.

- (1) $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 + x + \overline{1} \rangle$; $\overline{x}, \overline{x + \overline{1}}$;
- (2) $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x^2 + \overline{1} \rangle$; $\overline{x + \overline{1}}, \overline{x^2 + x}$;
- (3) $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x + \overline{1} \rangle$; $\overline{x + \overline{1}}, \overline{x^2 + x}$;
- (4) $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + \overline{1} \rangle$; $\overline{x}, \overline{x - \overline{1}}$;
- (5) $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 + \overline{2} \rangle$; $\overline{x + \overline{1}}, \overline{2x + \overline{1}}$.

10.4. Feladat. Keresse meg a következő testekben a megadott elemek minimálpolinomját:

- (1) $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x + \overline{1} \rangle$ -ban $\overline{x^2 + x}, \overline{x^3 + \overline{1}}$;
- (2) $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^4 + x^2 + x + \overline{1} \rangle$ -ban $\overline{x - \overline{1}}, \overline{x^3 + x^2 + x}$;
- (3) $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 - \overline{2}x - \overline{2} \rangle$ -ban $\overline{x - \overline{1}}, \overline{x + \overline{2}}$.

10.5. Feladat. Jelölje T a $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^3 + x + \overline{1} \rangle$ testet és a az $\overline{x}$ elemet benne. Oldja meg T -ben az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} ay_1 + y_2 &= \overline{1} \\ a^2y_1 + (a + 1)y_2 &= \overline{2} \end{aligned}$$

10.6. Feladat. Az adott T test, az a eleme és a felette vett $f \in T[y]$ polinom esetén döntse el, hogy a gyöke-e f -nek:

- (1) $T = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x^2 + \overline{1} \rangle$, $a = \overline{x^2 + \overline{1}}$, $f = y^2 + \overline{x^2 + x}$;
- (2) $T = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + x - \overline{1} \rangle$, $a = \overline{x - \overline{1}}$, $f = y^3 - \overline{x + \overline{1}}y + \overline{x}$.

10.7. Feladat. Adja meg az alábbi polinomok irreducibilis felbontását $\mathbb{Q}[x]$ -ben.

- (1) $x^9 - 1$,
- (2) $x^4 - x^3 + 2x + 1$.

10.8. Feladat. Számolja ki, hogy hány másodfokú irreducibilis főpolinom van a véges T test felett.

10.9. Feladat. Hány n -edrendű elem van a T testben, ha

- (1) $n = 2$, $T = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 + x + \bar{1} \rangle$;
- (2) $n = 7$, $T = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x^2 + \bar{1} \rangle$;
- (3) $n = 13$, $T = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 - x^2 + \bar{1} \rangle$;
- (4) $n = 4$, $T = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + \bar{1} \rangle$;
- (5) $n = 4$, $T = \mathbb{Z}_5[x]/\langle x^3 - x + \bar{2} \rangle$;

10.10. Feladat. Legyen f irreducibilis n -edfokú főpolinom a $\mathbb{Z}_p$ test fölött, és tekintsük a $T = \mathbb{Z}_p[x]/\langle f \rangle$ testet. Mely pozitív egész k számokra teljesül, hogy az $x^k - a$ polinomnak van gyöke T -ben az összes $a \in T$ -re.

11. HIBAJAVÍTÓ KÓDOLÁS

11.1. Feladat. Állapítsa meg az alábbi $\mathbb{Z}_p$ fölötti C blokk-kódról, hogy

- (a) mekkora a minimális távolsága,
- (b) mely t nemnegatív egészekre t -hibajelző, illetve t -hibajavító,
- (c) lineáris-e:

- (1) $p = 2$, $C = \{0101, 1010, 1111\}$,
- (2) $p = 2$, $C = \{u_1 u_2 u_3 u_4 \in \mathbb{Z}_2^4 : u_1 = u_2, u_3 = u_4\}$,
- (3) $p = 2$, $C = \{0\}\mathbb{Z}_2^3\{0\} \cup \{1\}\mathbb{Z}_2^3\{1\}$,
- (4) $p = 3$, $C = \{012, 120, 201, 210, 021, 102\}$,
- (5) $p = 3$, $C = \{u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 \in \mathbb{Z}_3^5 : u_1 + u_2 = u_3 - u_4\}$.

11.2. Feladat. Az előző feladatbeli C lineáris kódokhoz adjon meg — lehetőleg több — generátormátrixot, és döntse el, hogy C szisztematikus-e. Ha C nem szisztematikus, akkor adjon meg vele ekvivalens szisztematikus lineáris kódot.

11.3. Feladat. Adja meg az alábbi G generátormátrix által definiált C kódot, határozza meg C minimális távolságát, és keressen ellenőrző mátrixot C -hez.

- (1) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{3 \times 5}$,
- (2) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{3 \times 5}$,
- (3) $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{3 \times 4}$,
- (4) $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3 \times 6}$,

11.4. Feladat. Határozza meg az összes

- (1) 4 hosszú nemtriviális ciklikus, lineáris, bináris kódot;
- (2) 5 hosszú nemtriviális ciklikus, lineáris, bináris kódot;
- (3) 3 hosszú nemtriviális ciklikus, lineáris kódot $\mathbb{Z}_3$ fölött.

11.5. Feladat. Legyen β a $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$ test egyik primitív eleme, $g \in \mathbb{Z}_3[x]$ pedig β minimálpolinomja. Jelölje C azt a ciklikus Hamming-kódot, amelynek generátorpolinomja g . Oldja meg az alábbi feladatokat az összes lehetséges β -ra:

- (1) Adja meg a C kódot és egy ellenőrző mátrixát.
- (2) Döntse el, hogy C szisztematikus kód-e.
- (3) Ha C szisztematikus kód, akkor adja meg a $G = (E \ H)$ (E egységmátrix) alakú generátormátrixát.
- (4) Kódolja G segítségével az

1120, 221022, 10201121

üzeneteket.

(5) Dekódolja az

12011102, 211200221211, 111121020001

sorozatokat, ha tudjuk, hogy az eredeti üzenetet G segítségével kódolták.